Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА

Е. И. Харламова
(Москва)

В 1947 г. Гриоли, изучая регулярные прецессии, получил новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [1]. Это решение в работе [2] записано в системе координат, оси которой являются главными осями эллипсоида инерции для точки опоры. При этом оказалось, что с аналитической стороны решение Гриоли характеризуется наличием двух частных квадратичных интегралов определенного вида.

В настоящей работе изучается вопрос о существовании новых решений подобного вида. Составлена система алгебраических уравнений для определения искомых параметров. Найдены и исследованы два решения этой системы. Первому соответствует случай Гриоли, второе решение приводит к новому случаю интегрируемости [4]. Условия, накладываемые в этом случае на моменты инерции, могут выполняться, если тело имеет полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью [3].

1. Пусть O — неподвижная точка тела, $Oxyz$ — неизменно связанные с телом оси координат, являющиеся главными осями эллипсоида инерции тела для неподвижной точки. Моменты инерции тела для этих осей обозначим через A, B, C. Пусть центр тяжести тела находится в одной из главных плоскостей эллипсоида инерции, например в плоскости Oxz. Угол между осью Ox и прямой, идущей из неподвижной точки в центр тяжести тела, обозначим через α. Произведение веса тела на расстояние от неподвижной точки до центра тяжести обозначим через l. Искомыми переменными являются p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси $Oxyz$ и γ, γ', γ'' — проекции на те же оси единичного вектора, направленного в сторону, противоположную направлению силы тяжести. Эти переменные должны удовлетворять уравнениям Эйлера — Пуассона

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)\,qr + l\gamma'\sin\alpha, \qquad C\frac{dr}{dt} = (A-B)\,pq - l\gamma'\cos\alpha$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C-A)\,rp + l\gamma''\cos\alpha - l\gamma\sin\alpha \tag{1.1}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma' \tag{1.2}$$

Известны три интеграла этих уравнений:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2l(\gamma\cos\alpha + \gamma''\sin\alpha) = 2h \tag{1.3}$$

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = m \tag{1.4}$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \tag{1.5}$$

где h и m — постоянные интегрирования.

Введем вместо γ' новую переменную Γ' и новую независимую переменную τ посредством соотношений

$$l\gamma' = q\Gamma', \qquad d\tau = q\,dt$$

При этом уравнения (1.1) дают

$$A\frac{dp}{d\tau} = (B-C)\,r + \Gamma'\sin\alpha, \qquad C\frac{dr}{d\tau} = (A-B)\,p - \Gamma'\cos\alpha \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{Bq^2}{2} = (C-A)\,rp + l\gamma''\cos\alpha - l\gamma\sin\alpha \tag{1.7}$$

Уравнения (1.6) будут линейными относительно p и r, если

$$\Gamma' = bp + b''r$$

где b, b'' — подлежащие определению постоянные. Имеем

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{d\tau} &= (B - C + b''\sin\alpha)\,r + bp\sin\alpha \\ C\frac{dr}{d\tau} &= (A - B - b\cos\alpha)\,p - b''r\cos\alpha \end{aligned} \tag{1.8}$$

Подчиним постоянные b, b'' условию

$$\frac{b\sin\alpha}{A-B-b\cos\alpha} = \frac{B-C+b''\sin\alpha}{-b''\cos\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{b\cos\alpha}{A-B} - \frac{b''\sin\alpha}{B-C} = 1 \tag{1.9}$$

Исключая при помощи этого равенства из первого уравнения (1.8) b'', а из второго b, получим

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{d\tau} &= \frac{b}{A-B}\left[(A-B)\,p\sin\alpha + (B-C)\,r\cos\alpha\right] \\ C\frac{dr}{d\tau} &= -\frac{b''}{B-C}\left[(A-B)\,p\sin\alpha + (B-C)\,r\cos\alpha\right] \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из уравнений (1.10) имеем

$$\frac{Ab''}{B-C}\,p + \frac{Cb}{A-B}\,r = n \tag{1.11}$$

В последующем постоянную интегрирования n полагаем отличной от нуля.

Итак, в искомых случаях интегрируемости должно иметь место соотношение

$$l\gamma' = q\,(bp + b''r) \tag{1.12}$$

причем постоянные b, b'' стеснены условием (1.9). Эти постоянные имеют размерность моментов инерции.

Второе допущение состоит в том, что q^2 должно являться квадратичной функцией переменных p и r:

$$q^2 = \varepsilon_2 p^2 + \varepsilon_2' pr + \varepsilon_2'' r^2 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_1'' r + \varepsilon_0 \tag{1.13}$$

Выражения (1.12) и (1.13) являются обобщением интегралов, имеющих место в решении, найденном Гриоли, аналитическая запись которого дана в работе [2].

Правая часть выражения (1.13) при помощи (1.11) может быть представлена в виде

$$\varepsilon_2 p^2 + \varepsilon_2' pr + \varepsilon_2'' r^2 + \frac{1}{n}(\varepsilon_1 p + \varepsilon_1'' r)\left(\frac{Ab''}{B-C}\,p + \frac{Cb}{A-B}\,r\right) + \varepsilon_0$$

Подставив сюда вместо произведения pr его выражение через p^2, r^2, n^2 из (1.11), записываем зависимость между p, q, r таким образом:

$$q^2 = \varepsilon p^2 + \varepsilon'' r^2 + e' n^2 \tag{1.14}$$

Вследствие (1.10), (1.14), уравнение (1.7) приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} l\gamma'' \cos\alpha - l\gamma \sin\alpha = \varepsilon b \frac{B}{A} p^2 \sin\alpha - \varepsilon'' b'' \frac{B}{C} r^2 \cos\alpha + \\ + rp\left[\varepsilon b \frac{B}{A} \frac{B-C}{A-B} \cos\alpha - \varepsilon'' b'' \frac{B}{C} \frac{A-B}{B-C} \sin\alpha - (C-A)\right] \end{aligned} \tag{1.15}$$

Преобразуем интеграл (1.3). Подстановка q^2 в виде (1.14) дает

$$Ap^2 + Cr^2 + B(\varepsilon p^2 + \varepsilon'' r^2) + 2(l\gamma \cos\alpha + l\gamma'' \sin\alpha) - 2h + Be'n^2 = 0 \tag{1.16}$$

Введем вместо h постоянную β равенством

$$Be'n^2 - 2h = \beta n^2 \tag{1.17}$$

Тогда (1.16) с учетом (1.11) запишется так:

$$\begin{aligned} -l\gamma \cos\alpha - l\gamma'' \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\left[A + \varepsilon B + \beta \frac{A^2 b''^2}{(B-C)^2}\right] p^2 + \\ + \tfrac{1}{2}\left[C + \varepsilon'' B + \beta \frac{C^2 b^2}{(A-B)^2}\right] r^2 + \beta \frac{ACbb''}{(A-B)(B-C)} pr \end{aligned} \tag{1.18}$$

Из уравнений (1.15) и (1.18) находим

$$l\gamma = ap^2 + a'pr + a''r^2, \qquad l\gamma'' = cp^2 + c'pr + c''r^2 \tag{1.19}$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$a = -\varepsilon b \frac{B}{A} \sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}\left[A + \varepsilon B + \beta \frac{A^2 b''^2}{(B-C)^2}\right] \cos\alpha \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} a' = -\left[\varepsilon b \frac{B(B-C)}{A(A-B)} \cos\alpha - \varepsilon'' b'' \frac{B(A-B)}{C(B-C)} \sin\alpha - (C-A)\right] \sin\alpha - \\ - \frac{ACbb''}{(A-B)(B-C)} \cos\alpha \end{aligned}$$

$$a'' = \varepsilon'' b'' \frac{B}{C} \cos\alpha \sin\alpha - \tfrac{1}{2}\left[C + \varepsilon'' B + \beta \frac{C^2 b^2}{(A-B)^2}\right] \cos\alpha$$

$$c = \varepsilon b \frac{B}{A} \sin\alpha \cos\alpha - \tfrac{1}{2}\left[A + \varepsilon B + \beta \frac{A^2 b''^2}{(B-C)^2}\right] \sin\alpha$$

$$\begin{aligned} c' = \left[\varepsilon b \frac{B(B-C)}{A(A-B)} \cos\alpha - \varepsilon'' b'' \frac{B(A-B)}{C(B-C)} \sin\alpha - (C-A)\right] \cos\alpha - \\ - \frac{\beta ACbb''}{(A-B)(B-C)} \sin\alpha \end{aligned}$$

$$c'' = -\varepsilon'' b'' \frac{B}{C} \cos^2\alpha - \tfrac{1}{2}\left[C + \varepsilon'' B + \beta \frac{C^2 b^2}{(A-B)^2}\right] \sin\alpha$$

Переходим к интегралу (1.4). Введем вместо m постоянную μ равенством $lm = \mu n^3$. Принимая во внимание формулы (1.19), (1.12) и (1.14), получаем

$$\begin{aligned} Ap(ap^2 + a'pr + a''r^2) + B(\varepsilon p^2 + \varepsilon'' r^2)(bp + b''r) + \\ + Cr(cp^2 + c'pr + c''r^2) - \mu n^3 + B(bp + b''r)e'n^2 = 0 \end{aligned}$$

При подстановке в это выражение вместо n левой части равенства (1.11) получим однородный многочлен третьей степени относительно переменных p, r:

$$(aA+\varepsilon Bb)\,p^3+(a'A+cC+\varepsilon Bb'')\,p^2r+(c'C+a''A+\varepsilon''Bb)\,pr^2+$$
$$+(c''C+\varepsilon''Bb'')\,r^3+e'B\,(bp+b''r)\left(\frac{Ab''}{B-C}\,p+\frac{Cb}{A-B}\,r\right)^2-$$
$$-\mu\left(\frac{Ab''}{B-C}\,p+\frac{Cb}{A-B}\,r\right)^3=0 \tag{1.21}$$

Таким образом, переменные p, r связаны соотношениями (1.11) и (1.21). Так как $n\neq 0$, то по крайней мере один из коэффициентов левой части соотношения (1.11) отличен от нуля. Пусть это будет коэффициент при p, тогда, выразив p через r и подставив в (1.21), получим уравнение третьей степени, которое в общем случае дает для r постоянное значение. Во избежание этого случая нужно потребовать, чтобы это равенство было тождеством относительно r, откуда будет следовать обращение в нуль коэффициентов при неизвестных в многочлене (1.21). Получим, таким образом, уравнения

$$aA+\varepsilon Bb+e'Bb\,\frac{A^2b''^2}{(B-C)^2}-\mu\,\frac{A^3b''^3}{(B-C)^3}=0 \tag{1.22}$$

$$c''C+\varepsilon''Bb''+e'Bb''\,\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}-\mu\,\frac{C^3b^3}{(A-B)^3}=0$$

$$a'A+cC+\varepsilon Bb''+e'B\left[\frac{A^2b''^3}{(B-C)^2}+2b\,\frac{ACbb''}{(B-C)\,(A-B)}\right]-$$
$$-3\mu\,\frac{A^2Cb''^2b}{(B-C)^2\,(A-B)}=0 \tag{1.23}$$

$$c'C+a''A+\varepsilon''Bb+e'B\left[\frac{C^2b^3}{(A-B)^2}+2b''\,\frac{ACbb''}{(B-C)\,(A-B)}\right]-$$
$$-3\mu\,\frac{C^2Ab^2b''}{(A-B)^2\,(B-C)}=0$$

Подставив a, c'' из (1.20) в (1.22), получаем два уравнения для определения μ и β:

$$\frac{\beta}{2}\cos\alpha+\mu\,\frac{b''}{B-C}=e'B\,\frac{b}{A}+\left[\left(b\cos\alpha-\frac{A}{2}\right)\varepsilon B-\frac{A^2}{2}\right]\frac{(B-C)^2}{A^3b''^2}\cos\alpha$$

$$\frac{\beta}{2}\sin\alpha+\mu\,\frac{b}{A-B}=e'B\,\frac{b''}{C}+\left[\left(b''\sin\alpha-\frac{C}{2}\right)\varepsilon''B-\frac{C^2}{2}\right]\frac{(A-B)^2}{A^3b^2}\sin\alpha$$

Определитель этих линейных относительно $^1/_2\beta$ и μ уравнений равен, вследствие (1.9), единице, поэтому

$$\frac{\beta}{2}=e'B\left[\frac{b^2}{A\,(A-B)}-\frac{b''^2}{C\,(B-C)}\right]+\left[\left(b\cos\alpha-\frac{A}{2}\right)\varepsilon B-\frac{A^2}{2}\right]\frac{(B-C)^2\,b\cos\alpha}{A^3\,(A-B)\,b''^2}-$$
$$-\left[\left(b''\sin\alpha-\frac{C}{2}\right)\varepsilon''B-\frac{C^2}{2}\right]\frac{(A-B)^2\,b''\sin\alpha}{C^3\,(B-C)\,b^2} \tag{1.24}$$

$$\mu=e'B\left(\frac{b''}{C}\cos\alpha-\frac{b}{A}\sin\alpha\right)-$$
$$-\left[\left(b\cos\alpha-\frac{A}{2}\right)\varepsilon B-\frac{A^2}{2}\right]\frac{(B-C)^2\sin\alpha\cos\alpha}{A^3b''^2}+$$
$$+\left[\left(b''\sin\alpha-\frac{C}{2}\right)\varepsilon''B-\frac{C^2}{2}\right]\frac{(A-B)^2\sin\alpha\cos\alpha}{C^3b^2}$$

Подставив в (1.23) a', c', c, a'' из (1.20) и β, μ из (1.24), получим

$$E\varepsilon B + F\varepsilon'' B + G = 0, \qquad E''\varepsilon'' B + F''\varepsilon B + G'' = 0$$

$$E = b'' - \frac{C}{2}\sin\alpha + b\left(\frac{C}{A} - \frac{B-C}{A-B}\right)\sin\alpha\cos\alpha + {}$$
$$+ C\frac{B-C}{A-B}\,\frac{b}{b''}\left(1 - 2\frac{b}{A}\cos\alpha\right)\cos\alpha$$

$$E'' = b - \frac{A}{2}\cos\alpha + b''\left(\frac{A}{C} - \frac{A-B}{B-C}\right)\sin\alpha\cos\alpha + {}$$
$$+ A\frac{A-B}{B-C}\,\frac{b''}{b}\left(1 - 2\frac{b''}{C}\sin\alpha\right)\sin\alpha$$

$$F = b''\,\frac{A(A-B)}{C(B-C)}\sin\alpha\left[\sin\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{A(A-B)}{(B-C)}\,\frac{b''}{b^2}\left(1 - \frac{2}{C}b''\sin\alpha\right)\right]$$

$$F'' = b\,\frac{C(B-C)}{A(A-B)}\cos\alpha\left[\cos\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{C(B-C)}{(A-B)}\,\frac{b}{b''^2}\left(1 - \frac{2}{A}b\cos\alpha\right)\right]$$

$$G = \frac{A}{2}(C-2A)\sin\alpha + \frac{A^2(A-B)^2b''^2}{2(B-C)^2b^2}\sin\alpha + AC\frac{B-C}{A-B}\,\frac{b}{b''}\cos\alpha$$
$$G'' = \frac{C}{2}(A-2C)\cos\alpha + \frac{C^2(B-C)^2b^2}{2(A-B)^2b''^2}\cos\alpha + AC\frac{A-B}{B-C}\,\frac{b''}{b}\sin\alpha \tag{1.25}$$

Уравнения (1.25) служат для определения εB и $\varepsilon'' B$ в зависимости от A, B, C, b, b'', α. От e' эти выражения не зависят.

Преобразуем интеграл (1.5). Подставив (1.19), (1.12), (1.14), (1.11), получим

$$(ap^2 + a'pr + a''r^2)^2 + (cp^2 + c'pr + c''r^2)^2 + (bp + b''r)^2\Big[\varepsilon p^2 + {}$$
$$+ \varepsilon'' r^2 + e'\left(\frac{Ab''}{B-C}p + \frac{Cb}{A-B}r\right)^2\Big] = \frac{l^2}{n^4}\left(\frac{Ab''}{B-C}p + \frac{Cb}{A-B}r\right)^4 \tag{1.26}$$

По тем же соображениям, которые были высказаны выше по отношению к многочлену (1.21), однородный многочлен (1.26) является тождеством по p и r. Поэтому его коэффициенты должны быть равны нулю. Учитывая выражения (1.20), получим пять уравнений:

$$\varepsilon^2 B^2\frac{b^2}{A^2}\sin^2\alpha + b^2\left[\varepsilon + e'\frac{A^2b''^2}{(B-C)^2}\right] + \frac{1}{4}\left[A + \varepsilon B + \beta\frac{A^2b''^2}{(B-C)^2}\right]^2 = \lambda\frac{A^4b''^4}{(B-C)^4}$$

$$\varepsilon''^2B^2\frac{b''^2}{C^2}\cos^2\alpha + b''^2\left[\varepsilon'' + e'\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}\right] + {}$$
$$+ \frac{1}{4}\left[C + \varepsilon'' B + \beta\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}\right]^2 = \lambda\frac{C^4b^4}{(A-B)^4}$$

$$\left[\varepsilon B\frac{b(B-C)}{A(A-B)}\cos\alpha - \varepsilon'' B\frac{b''(A-B)}{C(B-C)}\sin\alpha - (C-A)^2\right]^2 + {}$$
$$+ \beta^2\frac{A^2C^2b^2b''^2}{(B-C)^2(A-B)^2} + \frac{1}{2}\left[A + \varepsilon B + \beta\frac{A^2b''^2}{(B-C)^2}\right]\left[C + \varepsilon'' B + \beta\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}\right] - {}$$
$$- 2\varepsilon\varepsilon' B^2\frac{bb''}{AC}\sin\alpha\cos\alpha + 4b^2b''^2e'\frac{AC}{(B-C)(A-B)} + {}$$
$$+ b^2\left[\varepsilon'' + e'\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}\right] + b''^2\left[\varepsilon + e'\frac{A^2b^2}{(B-C)^2}\right] = 6\lambda\frac{A^2C^2b^2b''^2}{(B-C)^2(A-B)^2}$$

$$\varepsilon B\frac{b}{A}\sin\alpha\left[\varepsilon B\frac{b(B-C)}{A(A-B)}\cos\alpha-\varepsilon'' B\frac{b''(A-B)}{C(B-C)}\sin\alpha-(C-A)\right]+$$
$$+e'\frac{ACb^3b''}{(B-C)(A-B)}+\frac{\beta}{2}\frac{ACbb''}{(B-C)(A-B)}\left[A+\varepsilon B+\beta\frac{A^2b''^2}{(B-C)^2}\right]+$$
$$+bb''\left[\varepsilon+e'\frac{A^2b'^2}{(B-C)^2}\right]=2\lambda\frac{A^3Cbb''^3}{(B-C)^3(A-B)} \qquad (1.27)$$

$$-\varepsilon'' B\frac{b''}{C}\cos\alpha\left[\varepsilon B\frac{b(B-C)}{A(A-B)}\cos\alpha-\varepsilon'' B\frac{b''(A-B)}{C(B-C)}\sin\alpha-(C-A)\right]+$$
$$+e'\frac{ACbb''^3}{(B-C)(A-B)}+\frac{\beta}{2}\frac{ACbb''}{(B-C)(A-B)}\left[C+\varepsilon'' B+\beta\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}\right]+$$
$$+bb''\left[\varepsilon''+e'\frac{C^2b^2}{(A-B)^2}\right]=2\lambda\frac{AC^3b^3b''}{(B-C)(A-B)^3}\quad \lambda=\frac{e^2}{n^4}$$

В уравнения (1.27) подставим величину β, определяемую первой формулой (1.24). При подстановке найденных из (1.25) выражений для εB и $\varepsilon'' B$ в (1.27) получим систему алгебраических уравнений для определения величин e', λ, b, b'', $\operatorname{tg}\alpha$. Эти уравнения не выписываются здесь в развернутом виде, так как они весьма громоздки. С учетом (1.9) мы имеем, следовательно, шесть уравнений, связывающих указанные пять величин. Однако эта система уравнений оказывается совместной. В частности, удалось установить два решения:

первое решение

$$\lambda=\frac{(A-B)^2(B-C)^2}{A^4C^4}[(A-B)(B-C)+(A+C-B)^2], \qquad (1.28)$$

$$e'=2\frac{(A-B)(B-C)}{A^2C^2},\quad b=A\sqrt{\frac{A-B}{A-C}},\quad b''=C\sqrt{\frac{B-C}{A-C}}, \qquad (1.29)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{B-C}{A-B}} \qquad (1.30)$$

второе решение

$$\lambda=\frac{l^2}{n^4}=\frac{(C-A)(A-B)^2(C-B)^2(C-2A)^2(2C-A)^2}{H^2A^2C^2[3AC-B(A+C)]H^2} \qquad (1.31)$$

$$e'=\frac{6(A-B)(C-B)(C-A)(C-2A)^2(2C-A)^2}{H^2[3AC-B(A+C)][3AC-2B(A+C)]H^2} \qquad (1.32)$$

$$b=-\frac{H}{3(C-A)}\sqrt{\frac{A-B}{C(C-2A)}},\quad b''=\frac{H}{3(C-A)}\sqrt{\frac{C-B}{A(2C-A)}} \qquad (1.33)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2C-A}{2A-C}\sqrt{\frac{A(C-B)(2C-A)}{C(A-B)(C-A)}} \qquad (1.34)$$

где

$$H=\sqrt{A(C-B)(2C-A)^3+C(A-B)(C-2A)^3} \qquad (1.35)$$

При подстановке этих выражений в (1.25) находим:

для первого решения

$$\varepsilon=\varepsilon''=-1 \qquad (1.36)$$

для второго решения

$$\frac{\varepsilon}{A^2}=\frac{\varepsilon''}{C^2}=-\frac{(2C-A)(C-2A)}{[3AC-B(A+C)][3AC-2B(A+C)]} \qquad (1.37)$$

Так как в формулах (1.28)—(1.37) A и C входят симметрично, полагаем, не умаляя общности, $C>A$.

2. Рассмотрим первое решение. Из (1.31) и неравенства $C > A$ заключаем, что

$$C > B > A, \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{B-A}{C-A}} \tag{2.1}$$

и поэтому (1.29) дает

$$b = A\cos\alpha, \qquad b'' = C\sin\alpha \tag{2.2}$$

Подставив (2.2), (1.36), (1.29) в (1.11) и (1.14), получаем с учетом (1.30)

$$p\cos\alpha + r\sin\alpha = \nu, \quad p^2 + r^2 = 2\nu^2 - q^2, \quad \nu = -\frac{n}{AC}\sqrt{(C-B)(B-A)}$$

Отсюда

$$p = \sin\alpha\sqrt{\nu^2 - q^2} + \nu\cos\alpha, \qquad r = -\cos\alpha\sqrt{\nu^2 - q^2} + \nu\sin\alpha$$

Введем вместо q переменную σ равенством $q = \nu\sin\sigma$, тогда

$$p = \nu(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\sigma), \qquad r = \nu(\sin\alpha - \cos\alpha\cos\sigma)$$

Формула (1.12) дает теперь

$$l\gamma' = \nu^2\sin\sigma\,[A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + (A-C)\sin\alpha\cos\alpha\cos\sigma]$$

Уравнение для определения зависимости σ от времени получим, подставив найденные величины в любое из первых двух уравнений (1.1) и приняв во внимание (2.1):

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\nu, \qquad \sigma = -\nu t$$

(несущественная постоянная интегрирования опущена). Поэтому

$$p = \nu(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\nu t), \quad q = -\nu\sin\nu t, \quad r = \nu(\sin\alpha - \cos\alpha\cos\nu t)$$

$$l\gamma' = -\nu^2\sin\nu t\,[A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + (A-C)\sin\alpha\cos\alpha\cos\nu t] \tag{2.3}$$

Подставив (1.36), (1.29), (2.2) в (1.24), находим

$$\beta = \frac{(C-B)(B-A)}{A^2C^2}(2B - A - C), \qquad \mu = \frac{\sqrt{(A-B)^3(B-C)^3}}{A^2C^2}$$

После этого, получив из (1.20) выражения для a, a', a'', c, c', c'' и подставив их в формулы (1.19), найдем

$$l\gamma = \nu^2[C\sin\alpha\cos\nu t + (C-B)\cos\alpha\sin^2\nu t]$$

$$l\gamma'' = \nu^2[-A\cos\alpha\cos\nu t + (A-B)\sin\alpha\sin^2\nu t] \tag{2.4}$$

Приведенный в этом пункте случай интегрируемости получен и исследован Гриоли [1]. В форме (2.3), (2.4) это решение дано в работе [2].

3. Исследуем второе решение. Введем следующие обозначения:

$$\cos\rho = \sqrt{\frac{C(A-B)(C-2A)}{(C-A)[3AC - B(A+C)]}}, \qquad \sin\rho = \sqrt{\frac{A(C-B)(2C-A)}{(C-A)[3AC - B(A+C)]}}$$

$$\nu = -\frac{3n}{H}\sqrt{\frac{AC(C-A)(A-B)(C-B)(C-2A)(2C-A)}{[3AC - B(A+C)]}} \tag{3.1}$$

С их учетом выражение (1.11) при подстановке (1.33) записывается в виде $Ap\cos\rho + Cr\sin\rho = \nu$. Подстановка (1.32) и (1.34) в (1.11) дает

$$A^2p^2 + C^2r^2 = [3AC - B(A+C)]\left\{\frac{2\nu^2}{3AC} - q^2\frac{3AC - 2B(A+C)}{(C-2A)(2C-A)}\right\} \tag{3.2}$$

Из последних двух соотношений находим

$$Ap = \nu\cos\rho + \sin\rho\sqrt{\frac{3AC-2B(A+C)}{3AC}\left\{\nu^2 - \frac{3AC[3AC-B(A+C)]}{(C-2A)(2C-A)}q^2\right\}}$$

$$Cr = \nu\sin\rho - \cos\rho\sqrt{\frac{3AC-2B(A+C)}{3AC}\left\{\nu^2 - \frac{3AC[3AC-B(A+C)]}{(C-2A)(2C-A)}q^2\right\}} \qquad (3.3)$$

Введем вместо q новую переменную σ равенством $q = \nu\varkappa\sin\sigma$, где

$$\varkappa = \sqrt{\frac{(C-2A)(2C-A)}{3AC[3AC-B(A+C)]}} \qquad (3.4)$$

Тогда

$$Ap = \nu(\cos\rho + \chi\sin\rho\cos\sigma), \qquad Cr = \nu(\sin\rho - \chi\cos\rho\cos\sigma)$$

$$\chi = \sqrt{1 - \frac{2B(A+C)}{3AC}} \qquad (3.5)$$

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять положительные величины A, B, C, чтобы α, n, p, r были действительны.

Вследствие $C > A$, из (1.34) заключаем, что необходимо должно выполняться неравенство

$$(C-B)(A-B)(C-2A) > 0$$

Это возможно при:

1) $B > C > 2A$, 2) $2A > C > B > A$, 3) $C > 2A > 2B$

В первом случае

$$3AC - B(A+C) = -C(B-2A) - A(B-C) < 0$$

$$-A(B-C)(2C-A)^3 - C(B-A)(C-2A)^3 < 0$$

во втором

$$3AC - B(A+C) = C(2A-B) + A(C-B) > 0$$

$$A(C-B)(2C-A)^3 + C(B-A)(2A-C)^3 > 0$$

в третьем

$$3AC - B(A+C) = A(2C-B) + C(A-B) > 0$$

$$A(C-B)(2C-A)^3 + C(A-B)(C-2A)^3 > 0$$

Видим, что величина n, определяемая равенством (1.31), во всех этих случаях действительна. Из (3.1) заключаем, что действительной будет также и ν. В первом случае множитель, стоящий перед фигурной скобкой в равенстве (3.2), отрицателен, а второй множитель

$$\frac{2\nu^2}{3AC} - q^2\frac{3AC-2B(A+C)}{(C-2A)(2C-A)} = \frac{2\nu^2}{3AC} + q^2\frac{2A(B-C)+C(2B-A)}{(C-2A)(2C-A)}$$

положителен, поэтому первый случай должен быть отброшен, ибо при этом $A^2p^2 + C^2r^2 < 0$.

Во втором случае формулы (3.1) дают для $\cos\rho$, $\sin\rho$ действительные значения, но выражение, стоящее под радикалом в (3.3), отрицательно. Действительно,

$$[3AC - 2B(A+C)]\left\{\nu^2 - \frac{3AC[3AC-B(A+C)]}{(C-2A)(2C-A)}q^2\right\} =$$

$$= -[2C(B-A) + A(2B-C)]\left\{\nu^2 + \frac{3AC[3AC-B(A+C)]}{(2A-C)(2C-A)}q^2\right\} < 0$$

так как $2B > 2A > C$. В этом случае p и r оказываются комплексными, поэтому второй случай также необходимо отбросить.

В третьем случае, характеризуемом неравенством $C > 2A > 2B$, все величины оказываются действительными. При этом $C > A + B$, что для твердого тела не имеет места, однако это условие может выполняться, если тело имеет полости, заполненные жидкостью [3].

Подставив найденные величины в (1.12), находим:

$$\gamma' = \frac{\sqrt{3AC(C-2A)(2C-A)}}{[3AC - B(A+C)]^{3/2}}\left[B - 3\chi\sqrt{\frac{AC(A-B)(C-B)}{(C-2A)(2C-A)}}\cos\sigma\right]\sin\sigma \tag{3.6}$$

Зависимость σ от времени получаем из первого уравнения (1.1) в виде

$$\frac{N}{\nu}\frac{d\sigma}{dt} = k + k'\cos\sigma \tag{3.7}$$

где

$$k = \sqrt{(C-2A)(2C-A)[3AC - 2B(A+C)]}$$

$$k' = (A+C)\sqrt{3(A-B)(C-B)}$$

$$N = 3AC\sqrt{3AC - B(A+C)} \tag{3.8}$$

Получив из (1.24) значение β, находим затем коэффициенты (1.20), после чего формулы (1.19) с учетом (3.4) дадут

$$\gamma = \frac{1}{3AC - B(A+C)}\{\cos\rho\,[3A(C-B)\sin^2\sigma + B(A+C)] + 3AC\chi\sin\rho\cos\sigma\}$$

$$\gamma'' = \frac{1}{3AC - B(A+C)}\{\sin\rho\,[3C(A-B)\sin^2\sigma + B(A+C)] - 3AC\chi\cos\rho\cos\sigma\} \tag{3.9}$$

Таким образом, найдена зависимость переменных p, q, r, γ, γ', γ'' от времени. Итак, уравнения Эйлера — Пуассона при условиях

$$C > 2A > 2B$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{H}\sqrt{A(C-B)(2C-A)^3}, \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{H}\sqrt{C(A-B)(C-2A)^3}$$

допускают решение, которое определяется

$$p = \frac{\nu}{A}(\cos\rho + \chi\sin\rho\cos\sigma), \qquad q = \nu\varkappa\sin\sigma, \qquad r = \frac{\nu}{C}(\sin\rho - \chi\cos\rho\cos\sigma) \tag{3.10}$$

и равенствами (3.6), (3.9) причем $\sin\rho$, $\cos\rho$, $\varkappa$, χ определяется (3.1), (3.4) и (3.5)

$$\nu = -3AC\sqrt{\frac{l}{H}}\sqrt[4]{\frac{C-A}{3AC - B(A+C)}}$$

Переменная σ находится из уравнения (3.7) с учетом (3.8).

В справедливости полученного результата можно убедиться непосредственно, подставив решение (3.10), (3.6), (3.9) в уравнения (1.1), (1.2) и интегралы (1.3), (1.4), (1.5).

Учитывая формулу (1.24) для μ, найдем из соотношения $lm = \mu n^3$, что постоянная интеграла площадей m равна введенной равенством (3.1) постоянной ν, т. е. $m = \nu$.

В задачах, сводящихся к интегрированию уравнений Эйлера — Пуассона, в качестве основных переменных часто выбирают углы Эйлера. Введем эти углы следующим образом.

Формула

$$Ap\cos\rho + Cr\sin\rho = \nu \tag{3.11}$$

означает, что проекция вектора (p, q, r) на прямую, идущую по направлению вектора:

$$(A\cos\rho,\ 0,\ C\sin\rho) \tag{3.12}$$

остается постоянной. Угол между вектором (3.12) и вектором $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ обозначим через θ:

$$\cos\theta = \frac{A\gamma\cos\rho + C\gamma''\sin\rho}{\sqrt{A^2\cos^2\rho + C^2\sin^2\rho}}$$

или с учетом (3.9)

$$\cos\theta = \frac{3\,[A^2(C-B)\cos^2\rho + C^2(A-B)\sin^2\rho]\sin^2\sigma}{[3AC - B(A+C)]\sqrt{A^2\cos^2\rho + C^2\sin^2\rho}} + \frac{3AC(A-C)\,\chi\sin\rho\cos\rho\cos\sigma + B(A+C)(A\cos^2\rho + C\sin^2\rho)}{[3AC - B(A+C)]\sqrt{A^2\cos^2\rho + C^2\sin^2\rho}} \tag{3.13}$$

Составляющие вектора (p, q, r) по направлениям (3.12) и $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ являются производными от угла собственного вращения φ и угла прецессии ψ. Проекция (p, q, r) на направление (3.12), как видно из (3.11), есть $\nu/\sqrt{A^2\cos^2\rho + C^2\sin^2\rho}$. Имеем, таким образом,

$$p\gamma + q\gamma' + r\gamma'' = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta, \qquad \frac{\nu}{\sqrt{A^2\cos^2\rho + C^2\sin^2\rho}} = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta$$

Отсюда

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'' - \frac{\nu\cos\theta}{\sqrt{A^2\cos^2\rho + C^2\sin^2\rho}}\right)$$

Подставив сюда найденные уже значения переменных, найдем зависимость $d\psi/dt$ от σ, а следовательно, и зависимость угла прецессии от времени.

Так как проекция (p, q, r) на прямую, идущую по направлению (3.12), постоянна, для завершения исследования достаточно проследить, какую кривую описывает на единичной сфере с центром в неподвижной точке апекс — точка пересечения этой прямой со сферой.

Из (3.7) заключаем, что при $k < k'$ переменная σ асимптотически приближается к значению σ^*, определяемому равенством

$$\cos\sigma^* = -k/k'$$

При этом переменные p, q, r асимптотически приближаются к соответствующим постоянным p^*, q^*, r^* и, следовательно, в пределе имеем перманентное вращение.

При $k > k'$ σ неограниченно возрастает с течением времени, а переменная θ, как видно из (3.11), заключена между двумя пределами θ_{min} и θ_{max} и, следовательно, траектория апекса заключена между параллелями, определяемыми этими пределами для θ.

Исследования этой траектории мы не проводим.

Поступила 26 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precesioni regolari dinamicamente possibili par solido pesante asimmetrico, Annali Matem. pura di aplicata, ser. IV, vol. XXVI, 1947.
2. Гуляев М. П. Об одном частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. ВМУ, № 3, 1955.
3. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела,имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Полное собр. соч., т. III, 1936.
4. Харламова Е. И. Один частный случай интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона. ДАН, т. 125, № 5, 1958.