Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О «ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ» МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. И. Киргетов

(Москва)

Понятие «возможного перемещения» системы, без сомнения, является основным в аналитической механике. Это не просто одно из понятий аналитической механики, но понятие, на котором построено все здание аналитической механики понятие, полностью обусловливающее характер аналитической механики, степень ее общности, границы ее приложения. Аналитическая механика распространяется только на те материальные системы, для которых установлено понятие «возможного перемещения» системы или, другими словами, указано определение «возможных перемещений» системы.

В развитии аналитической механики можно наметить несколько этапов. На каждом из этих этапов было свое, отвечающее этому этапу определение «возможных перемещений» системы. Так что в настоящее время аналитическая механика включает в себя несколько различных определений «возможных перемещений». Относительно всех этих определений справедливы следующие два замечания.

Во-первых, все эти определения линейные. Их линейность заключается в том, что всякая линейная комбинация «возможных перемещений» системы является согласно этим определениям также «возможным перемещением» системы.

Во-вторых, «возможные перемещения» системы, устанавливаемые этими определениями, не зависят от сил, действующих на систему. Это их свойство следует понимать в том смысле, что всякая строка $\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}$, являющаяся «возможным перемещением» системы при одних силах, остается им и при всяких других силах, действующих на систему.

Отдельные этапы в развитии аналитической механики различались по степени общности тех материальных систем, которые изучались аналитической механикой на каждом таком этапе. Переход от одного этапа в развитии аналитической механики к следующему совершался путем распространения аналитической механики на новые системы и знаменовался прежде всего введением нового определения «возможных перемещений» системы, допускавшего такое расширение области приложения аналитической механики. При этом вновь вводимое определение «возможных перемещений» системы каждый раз содержало в себе предыдущее в качестве своего частного случая. Так что переход от предыдущего определения «возможных перемещений» системы к последующему являлся переходом от частного определения к более общему. Этот процесс последовательного обобщения определения «возможных перемещений» системы обладал той замечательной особенностью, что он ни на каком из своих этапов не выводил аналитическую механику за рамки единого динамического принципа — принципа Гаусса.

Самым общим из принятых в настоящее время в аналитической механике определений «возможных перемещений» системы является известное определение Н. Г. Четаева [1] для систем с нелинейными дифференциальными связями первого порядка. В предлагаемой работе дается некоторое расширение определения Н. Г. Четаева. Это расширение проводится в плане принципа Гаусса. На основе линейности предлагаемого определения «возможных перемещений» системы и независимости от сил, действующих на систему «возможных перемещений», устанавливаемых этим определением, в работе доказано некоторое свойство предлагаемого определения «возможных перемещений» системы, интересное в том отношении, что оно в определенном смысле может быть истолковано как утверждение единственности предлагаемого, а значит, в своих рамках и всех предыдущих определений «возможных перемещений» системы.

1. Имеем систему n материальных точек. Обозначим через x_1, x_2, x_3, $m_1 = m_2 = m_3$; x_4, x_5, x_6, $m_4 = m_5 = m_6$; ... декартовы координаты и массу первой, второй, ... точек рассматриваемой материальной системы, через X_1, X_2, X_3; X_4, X_5, X_6; ... компоненты по осям координат равнодействующей активных сил, действующих на первую, вторую, ... точки этой системы.

Силы, действующие на систему (имеются в виду активные силы), предположим известными функциями времени, координат и скоростей точек системы. Понимая под состоянием системы в какой-либо момент времени положение системы и скорости ее точек в этот момент, предположим, что в каждом данном состоянии системы, в каждый данный фиксированный момент времени силы, действующие на систему, можно изменять произвольным образом.

Связи системы предположим линейными второго порядка. Согласно терминологии, введенной Деляссю [2], это значит, что уравнения связей предполагаются зависящими от ускорений точек системы и притом зависящими линейным образом. Пусть уравнения связей системы будут

$$a_{\lambda 1} x_1'' + \ldots + a_{\lambda,\, 3n} x_{3n}'' = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

Эти уравнения предполагаются, конечно, независимыми.

Предположим, что связи системы не зависят от сил, действующих на систему. Последнее следует понимать в том смысле, что изменение сил, действующих на систему, не влечет за собой изменения коэффициентов и свободных членов в уравнениях (1). В виду такого предположения функции $a_{\lambda i}$ и a_λ зависят только от времени, координат и скоростей точек системы.

Примечание. Следует отметить, что эта статья не является первым опытом в вопросе изучения материальных систем со связями второго порядка. Материальные системы такого рода обсуждаются, например, в статьях Деляссю [2], Пшеборского [3], Вылковича [4].

2. В соответствии с принципом Гаусса система ускорений точек материальной системы в действительном движении реализует минимум функции

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2}\left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2$$

при условии выполнения соотношений

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} x_i'' = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m)$$

Значит, действительные ускорения точек материальной системы должны удовлетворять уравнениям

$$m_i x_i'' - X_i + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda a_{\lambda i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} x_i'' = a_\lambda \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, 3n \\ \lambda = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{2}$$

где коэффициенты σ_λ представляют собой неопределенные множители Лагранжа.

Введя обозначения

$$b_{\lambda j} = \frac{a_{\lambda j}}{m_j}, \qquad b_\lambda = a_\lambda - \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} \frac{X_i}{m_i} \tag{3}$$

перепишем уравнения (2) в виде

$$\begin{gathered} m_i x_i'' - X_i + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda b_{\lambda, i} m_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{3n} b_{\lambda i} (m_i x_i'' - X_i) = b_\lambda \end{gathered} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, 3n \\ \lambda = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Отсюда тотчас вытекают уравнения для неопределенных множителей

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda \sum_{i=1}^{3n} b_{\mu i} b_{\lambda i} m_i = -b_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

Уравнения связей независимы, поэтому определитель системы (4) отличен от нуля. Следовательно, эта система при любых правых частях, а значит и при любом выборе сил, действующих на систему, позволяет найти неопределенные множители σ_λ.

Уравнения (2), в которых множители σ_λ найдены из уравнений (4), позволяют указать ускорения системы во всякий момент времени, как только в этот момент заданы состояние системы и силы, действующие на нее, какими бы последние ни были.

3. Примем в качестве «возможных перемещений» системы всевозможные строки $\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} \delta x_i = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

где коэффициенты $a_{\lambda i}$ суть коэффициенты уравнений (1).

Это определение «возможных перемещений» системы будем обозначать буквой A. Покажем, что определению A присущи все указанные во введении особенности принятых в аналитической механике определений «возможных перемещений» системы.

Оно, очевидно, линейное.

Затем «возможные перемещения» системы, устанавливаемые этим определением, не зависят от сил, действующих на систему.

В самом деле, коэффициенты $a_{\lambda i}$, по предположению, не зависят от сил, действующих на систему. Поэтому всякая строка $\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}$, удовлетворяющая соотношениям (5) при одних силах и являющаяся, следовательно, при этих силах «возможным перемещением» системы, будет удовлетворять им, а значит, будет оставаться «возможным перемещением» и при всяких других силах, действующих на рассматриваемую материальную систему.

Наконец, определение A таково, что принцип Даламбера — Лагранжа в рамках этого определения «возможных перемещений» устанавливает в качестве уравнений движения те же уравнения, что и принцип Гаусса.

Чтобы убедиться в этом, покажем, что принцип Даламбера — Лагранжа в рамках определения A устанавливает в качестве уравнений движения рассматриваемой системы как раз уравнения (2). Вывод уравнений движения системы из принципа Даламбера — Лагранжа проведем обычным способом. Умножив уравнения (5) на неопределенные множители σ_λ, добавим их к основному уравнению механики. Получим

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i x_i'' - X_i)\,\delta x_i + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\delta x_i = 0$$

что можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(m_i x_i'' - X_i + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda a_{\lambda i}\right) \delta x_i = 0 \tag{6}$$

Отсюда при специальном выборе множителей σ_λ (множители σ_λ должны быть такими, чтобы в соотношении (6) исчезали скобки при зависимых компонентах δx_i) непосредственно следуют равенства

$$m_i x_i'' - X_i + \sum_{\lambda=1}^{3n} \sigma_\lambda a_{\lambda i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 3n) \tag{7}$$

Уравнения (7), к которым следует добавить еще уравнения связей, полностью совпадают с уравнениями (2), вытекающими из принципа Гаусса. Что и требовалось.

4. Два определения «возможных перемещений» системы будем называть эквивалентными, если многообразия «возможных перемещений», устанавливаемые этими определениями, совпадают.

Определения «возможных перемещений», задаваемые соответственно соотношениями

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\delta x_i = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{3n} b_{\lambda i}\delta x_i = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

где

$$b_{\lambda i} = \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} a_{\mu i}$$

причем определитель $|c_{\lambda\mu}|$ отличен от нуля, очевидно, эквивалентны.

С другой стороны, если определения «возможных перемещений» системы, задаваемые соответственно соотношениями (8) и (9), будут эквивалентными, то все соотношения (9) могут быть представлены в качестве линейных комбинаций соотношений (8).

В самом деле, соотношения (8) и (9) можно рассматривать как две системы линейных алгебраических уравнений. Эти две системы уравнений имеют, согласно предположению, одни и те же решения и, значит, что известно из алгебры, уравнения одной из этих систем, например уравнения (9), будут линейными комбинациями уравнений второй системы — системы (8). Что и требовалось.

Докажем следующее предложение.

Среди всевозможных линейных определений «возможных перемещений» материальной системы, при которых «возможные перемещения» не зависят от сил, действующих на систему, а принцип Даламбера — Лагранжа дает те же уравнения движения, что и принцип Гаусса, не найдется ни одного такого, которое не было бы эквивалентным определению A.

Пусть B — какое-нибудь линейное определение «возможных перемещений» системы такое, что «возможные перемещения», им устанавливаемые, не зависят от сил, действующих на систему, а принцип Даламбера — Лагранжа на базе этого определения устанавливает в качестве уравнений движения системы как раз уравнения (2).

Зафиксируем момент времени и состояние системы в этот момент.

Пусть при каких-то силах строка

$$\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_{3n} \tag{10}$$

является согласно определению B «возможным перемещением» системы. Тогда при этих силах выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i x_i'' - X_i)\delta\alpha_i = 0 \tag{11}$$

(x_i'' здесь действительные ускорения материальной системы), а значит, выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{3n} \delta\alpha_i \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda a_{\lambda i} = 0$$

получающееся из (11) исключением в нем при помощи равенств (2) количеств $m_i x_i'' - X_i$.

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\delta\alpha_i = 0 \tag{12}$$

При замене данных сил другими строка (10) не перестает быть «возможным перемещением» системы, поэтому и соотношение (12) не перестает быть верным при переходе к новым силам, а значит, оно должно выполняться при произвольном изменении сил, действующих на систему. При таком изменении сил суммы

$$a_{\lambda 1}\delta\alpha_1 + \ldots + a_{\lambda,\, 3n}\delta\alpha_{3n}$$

как не зависящие от сил, остаются неизменными, величины же σ_λ меняются произвольно. В самом деле, система уравнения (4) может быть переписана:

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i b_{\mu i} = a_\mu + \sum_{\lambda=1}^{m} \sigma_\lambda \sum_{i=1}^{3n} b_{\mu i} b_{\lambda i} m_i \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

Последняя система уравнений позволяет указать требуемые силы для произвольного выбора множителей σ_λ.

Из сказанного следует, что должны выполняться равенства

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i}\delta\alpha_i = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, m)$$

Это значит, что всякое «возможное перемещение» системы, устанавливаемое определением B, будет вместе с тем «возможным перемещением» в смысле определения A.

С другой стороны, число уравнений движения, даваемых принципом Даламбера — Лагранжа в рамках всякого данного определения «возможных перемещений» системы, равно числу линейно независимых «возможных перемещений». В силу этого обстоятельства, число линейно независимых «возможных перемещений» системы среди «возможных перемещений», устанавливаемых определением B, равно $3n - m$, т. е. равно числу линейно независимых «возможных перемещений», устанавливаемых определением A. Отсюда и из доказанного выше предложения непосредственно следует, что многообразия «возможных перемещений» системы, устанавливаемые определениями A и B, должны совпадать и, значит, определение B должно быть эквивалентным определению A. Что и требовалось.

Поступила 1 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса. Изв. Казан. физ.-мат. об-ва, сер. 3, т. VI, 1932—1933.
2. Delassus E. Sur les liaisons et les mouvements. Ann. de l'Ecole Normal Supérieure, vol. 30, 1913.
3. Przeborski A. Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik. Math. Zeitschrift, H. 2, 1932.
4. Vâlcovici V. Une extension des liaisons non holonomes. Comptes rendus, vol. 243, p. 1012, 1956.