Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Я. Н. Ройтенберг
(Москва)

Теория оптимальных процессов в линейных системах интенсивно разрабатывается за последние годы в трудах Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе [1, 2, 3].

Этим работам предшествовали работы А. А. Фельдбаума [4], А. Я. Лернера [5, 6] и другие. Большой цикл работ в данной области принадлежит Р. Беллману [7, 8, 9] — автору фундаментальной монографии по динамическому программированию [9].

В настоящей работе рассматривается один из вопросов теории динамического программирования — задача о выборе закона изменения добавочных внешних сил, при помощи которых в нестационарной линейной системе обеспечивалось бы осуществление наперед заданного движения. Эта задача рассматривается как для систем непрерывного действия, так и для импульсных систем.

§ 1. Системы непрерывного действия. Уравнения движения системы непрерывного действия можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, y_k = x_j(t) + q_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь y_k — обобщенные координаты, $x_j(t)$ — заданные внешние силы, $q_j(t)$ — добавочные внешние силы, закон изменения которых во времени требуется выбрать так, чтобы обеспечить осуществление заданного движения. Через $f_{jk}(D)$ обозначены полиномы от D, коэффициенты которых являются заданными функциями времени; $D = d/dt$ — оператор дифференцирования по времени.

Нетрудно видеть, что уравнения движения (1.1) относятся также и к системам, у которых предусмотрено наличие обычно применяемых управляющих сил, являющихся функциями от рассогласований (т. е. разности между заданными и фактическими значениями управляемых координат системы) и их производных. Необходимые для этого внешние силы входят в число заданных внешних сил $x_j(t)$, а силы, которые должны являться функциями от управляемых координат системы и их производных, учтены в левых частях уравнений (1.1).

Систему уравнений (1.1) можно представить в таком виде:

$$\begin{gathered} b_{j1}(t) \overset{m_1}{y_1} + b_{j2}(t) \overset{m_2}{y_2} + \ldots + b_{jn}(t) \overset{m_n}{y_n} = \\ = \Psi_j \left(\overset{m_1 - 1}{y_1}, \ldots, y_1, \ldots, \overset{m_n - 1}{y_n}, \ldots, y_n \right) + x_j(t) + q_j(t) \qquad (j=1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь через m_k $(k = 1, \ldots, n)$ обозначен порядок старшей производной от y_k по времени, встречающейся в уравнениях (1.1). Входящие в уравнения (1.2) функции Ψ_j являются линейными функциями своих аргументов.

Предполагая, что определитель

$$\Delta^* = | b_{jk}(t) | \qquad (1.3)$$

не равен тождественно нулю, из уравнений (1.2) получим

$$\overset{m_j}{y_j} = \Phi_j\left(\overset{m_1-1}{y_1}, \ldots, \dot{y}_1, \ldots, \overset{m_n-1}{y_n}, \ldots, y_n\right) + \qquad 1.4$$

$$+ \frac{B_{1j}(t)}{\Delta^*(t)}[x_1(t) + q_1(t)] + \ldots + \frac{B_{nj}(t)}{\Delta^*(t)}[x_n(t) + q_n(t)] \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Здесь Φ_j—линейные функции своих аргументов, а B_{ij} — алгебраические дополнения элементов b_{ij} в определителе (1.3).

Систему уравнений (1.4) можно преобразовать к форме Коши. Для этого введем новые переменные z_i при помощи соотношений

$$z_1 = y_1,\ z_2 = \dot{y}_1, \ldots, z_{m_1} = \overset{m_1-1}{y_1}, \ldots, z_r = \overset{m_n-1}{y_n} \qquad (1.5)$$

где

$$r = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \qquad (1.6)$$

Линейные комбинации внешних сил в правых частях уравнений (1.4) обозначим так:

$$X_{\sigma_j}(t) = \frac{B_{1j}(t)}{\Delta^*(t)} x_1(t) + \ldots + \frac{B_{nj}(t)}{\Delta^*(t)} x_n(t)$$

$$Q_{\sigma_j}(t) = \frac{B_{1j}(t)}{\Delta^*(t)} q_1(t) + \ldots + \frac{B_{nj}(t)}{\Delta^*(t)} q_n(t) \qquad (\sigma_j = \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \qquad (1.7)$$

где

$$\sigma_1 = m_1, \qquad \sigma_2 = m_1 + m_2, \ldots, \sigma_n = r \qquad (1.8)$$

Уравнения (1.4) можно теперь переписать так:

$$\dot{z}_1 - z_2 = 0, \ldots, \dot{z}_{m_1} - \Phi_1(z_1, z_2, \ldots, z_r) = X_{\sigma_1}(t) + Q_{\sigma_1}(t), \ldots$$

$$\ldots, \dot{z}_r - \Phi_n(z_1, z_2, \ldots, z_r) = X_{\sigma_n}(t) + Q_{\sigma_n}(t) \qquad (1.9)$$

В силу линейности функций $\Phi_j(z_1, z_2, \ldots, z_r)$, уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\dot{z}_j + \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t) z_k = X_j(t) + Q_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \qquad (1.10)$$

В уравнениях (1.10) функции $X_\mu(t)$ и $Q_\mu(t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l = 1, \ldots, n)$, тождественно равны нулю.

Система скалярных уравнений (1.10) эквивалентна матричному уравнению

$$\dot{z} + a(t) z = X(t) + Q(t) \qquad (1.11)$$

где z, $a(t)$, $X(t)$ и $Q(t)$ — следующие матрицы:

$$z = \| z_j \|, \qquad a(t) = \| a_{jk}(t) \|, \qquad X(t) = \| X_j(t) \|, \qquad Q(t) = \| Q_j(t) \|. \qquad (1.12)$$

Общее решение уравнения (1.11) имеет следующий вид:

$$z(t) = N(t, t_0) z(t_0) + \int_{t_0}^{t} N(t, \tau)[X(\tau) + Q(\tau)]\, d\tau \qquad (1.13)$$

где

$$N(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau) \qquad (1.14)$$

а $\theta(t)$ — фундаментальная матрица для однородного матричного уравнения, получаемого из (1.11) при $X(t)+Q(t)\equiv 0$. Через $\theta^{-1}(t)$ обозначена обратная матрица.

Функция $N(t, \tau)$ является матричной функцией веса для системы (1.10).

Так как функции $X_\mu(t)$ и $Q_\mu(t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l=1, \ldots, n)$, тождественно равны нулю, то элементы матрицы z будут

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)\, z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau)\,[X_{\sigma_i}(\tau)+Q_{\sigma_i}(\tau)]\,d\tau \quad (j=1, \ldots, r) \tag{1.15}$$

Подставляя в (1.15) выражения (1.7), которыми определены $X_{\sigma_i}(t)$ и $Q_{\sigma_i}(t)$, получим

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)\, z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau) \frac{B_{li}(\tau)}{\Delta^*(\tau)}\,[x_l(\tau)+q_l(\tau)]\,d\tau \quad (j=1, \ldots, r) \tag{1.16}$$

Обозначая

$$W_{jl}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau) \frac{B_{li}(\tau)}{\Delta^*(\tau)} \qquad \begin{pmatrix} j=1, \ldots, r \\ l=1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

представим общее решение уравнений (1.10) в таком виде

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)\, z_k(t_0) + \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\,[x_l(\tau)+q_l(\tau)]\,d\tau \qquad (j=1, \ldots, r) \tag{1.18}$$

Потребуем теперь, чтобы некоторые обобщенные координаты системы $z_{p_1}, \ldots, z_{p_m}$, начиная с определенного момента времени t_1, изменялись по следующим наперед заданным законам:

$$z_{p_i}(t) = r_{p_i}(t) \qquad (t \geqslant t_1) \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{1.19}$$

Как следует из выражений (1.18), условия (1.19) будут выполняться, если добавочные силы $q_l(t)$ будут выбраны [так, чтобы] при $t \geqslant t_1$ выполнялись следующие соотношения:

$$\sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{p_i l}(t, \tau)\, q_l(\tau)\, d\tau = R_{p_i}(t) \qquad (t \geqslant t_1) \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{1.20}$$

где

$$R_{p_i}(t) = r_{p_i}(t) - \sum_{k=1}^{r} N_{p_i k}(t, t_0)\, z_k(t_0) - \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{p_i l}(t, \tau)\, x_l(\tau)\, d\tau \quad (i=1, \ldots, m) \tag{1.21}$$

Соотношения (1.20) определяют собой закон, по которому должны изменяться добавочные внешние силы $q_l(t)$ $(l=1, \ldots, n)$. Если число m обобщенных координат, закон изменения которых во времени заранее предписан, меньше числа n возможных добавочных внешних сил, то полагаем

$$q_{\alpha_1}(t) \equiv q_{\alpha_2}(t) \equiv \ldots \equiv q_{\alpha_{n-m}}(t) \equiv 0 \tag{1.22}$$

Из (1.20) имеем m соотношений для определения m добавочных внешних сил $q_{s_1}(t)$, $q_{s_2}(t), \ldots, q_{s_m}(t)$:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_{t_0}^{t} W_{p_i s_\mu}(t, \tau)\, q_{s_\mu}(\tau)\, d\tau = R_{p_i}(t) \qquad (t \geqslant t_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.23}$$

Для решения системы интегральных уравнений (1.23) можно применить числовой метод, для чего разделим интервал времени (t_1, t) на малые интервалы (t_1, t_2), (t_2, t_3), $(t_3, t_4), \ldots$ и будем искать $q_{s_\mu}(t)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ в виде ступенчатых функций, сохраняющих неизменными свои значения на интервале (t_0, t_1) и на каждом из указанных здесь интервалов.

При этом из (1.23) получим систему рекуррентных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{m} \left[\int_{t_0}^{t_1} W_{p_i s_\mu}(t_1, \tau)\, d\tau\right] q_{s_\mu}(t_0) = R_{p_i}(t_1) && (i = 1, \ldots, m)\\
&\sum_{\mu=1}^{m} \left[\int_{t_0}^{t_1} W_{p_i s_\mu}(t_2, \tau)\, d\tau\right] q_{s_\mu}(t_0) + \\
&\qquad + \sum_{\mu=1}^{m} \left[\int_{t_1}^{t_2} W_{p_i s_\mu}(t_2, \tau)\, d\tau\right] q_{s_\mu}(t_1) = R_{p_i}(t_2) && (i = 1, \ldots, m)\\
&\sum_{\mu=1}^{m} \left[\int_{t_0}^{t_1} W_{p_i s_\mu}(t_3, \tau)\, d\tau\right] q_{s_\mu}(t_0) + \sum_{\mu=1}^{m} \left[\int_{t_1}^{t_2} W_{p_i s_\mu}(t_3, \tau)\, d\tau\right] q_{s_\mu}(t_1) + \\
&\qquad + \sum_{\mu=1}^{m} \left[\int_{t_2}^{t_3} W_{p_i s_\mu}(t_3, \tau)\, d\tau\right] q_{s_\mu}(t_2) = R_{p_i}(t_3) && (i = 1, \ldots, m)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

Из соотношений (1.24) последовательно найдем величины

$$q_{s_\mu}(t_0), \quad q_{s_\mu}(t_1), \quad q_{s_\mu}(t_2), \quad \ldots \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

представляющие собой значения искомых ступенчатых функций $q_{s_\mu}(t)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ на интервалах времени (t_0, t_1), (t_1, t_2), $(t_2, t_3), \ldots$ соответственно.

Рассмотрим теперь случай, когда число добавочных внешних сил меньше числа обобщенных координат, изменение которых во времени должно происходить по наперед заданному закону.

Соотношения (1.23) в этом случае могут быть удовлетворены лишь для дискретных моментов времени $t = T_1, T_2, T_3, \ldots$ Для стационарных систем это было показано в работе А. Я. Лернера [6].

Если имеем, например, лишь одну добавочную внешнюю силу $q_s(t)$ а требования (1.19) сохраняются, то соотношения (1.23) для момента времени $t = T_1$ принимают вид:

$$\int_{t_0}^{T_1} W_{p_i s}(T_1, \tau)\, q_s(\tau)\, d\tau = R_{p_i}(T_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.25}$$

Разобьем интервал (t_0, T_1) на m равных или неравных подынтервалов (t_0, t_1), $(t_1, t_2), \ldots, (t_{m-1}, T_1)$. Примем функцию $q_s(t)$ ступенчатой и обозначим через $q_s(t_0)$, $q_s(t_1), \ldots, q_s(t_{m-1})$ ее значения на каждом из указанных подынтервалов соответственно.

Введем еще следующие обозначения:

$$\int_{t_0}^{t_1} W_{p_is}(T_1,\tau)\,d\tau = c_i^{(0)}, \quad \int_{t_1}^{t_2} W_{p_is}(T_1,\tau)\,d\tau = c_i^{(1)}, \ldots, \int_{t_{m-1}}^{T_1} W_{p_is}(T_1,\tau)\,d\tau = c_i^{(m-1)}$$

$$(i = 1, \ldots, m) \tag{1.26}$$

Соотношения (1.25) теперь принимают вид:

$$c_i^{(0)}q_s(t_0) + c_i^{(1)}q_s(t_1) + \ldots + c_i^{(m-1)}q_s(t_{m-1}) = R_{p_i}(T_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.27}$$

Из системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (1.27) найдем значения $q_s(t_0)$, $q_s(t_1), \ldots, q_s(t_{m-1})$, т. е. закон изменения добавочной внешней силы $q_s(t)$ на интервале (t_0, T_1), обеспечивающий выполнение для момента времени $t = T_1$ требований

$$z_{p_i}(T_1) = r_{p_i}(T_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.28}$$

Для момента времени $t = T_2$ соотношения (1.23) принимают вид:

$$\int_{t_0}^{T_2} W_{p_is}(T_2,\tau)\,q_s(\tau)\,d\tau = R_{p_i}(T_2) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.29}$$

или

$$\int_{T_1}^{T_2} W_{p_is}(T_2,\tau)\,q_s(\tau)\,d\tau = R_{p_i}^{*}(T_2) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.30}$$

где

$$R_{p_i}^{*}(T_2) = R_{p_i}(T_2) - \int_{t_0}^{T_1} W_{p_is}(T_2,\tau)\,q_s(\tau)\,d\tau \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.31}$$

Интервал T_1, T_2 также разобьем на m равных или неравных подынтервалов (t_m, t_{m+1}), $(t_{m+1}, t_{m+2}), \ldots, (t_{2m-1}, T_2)$, где

$$t_m = T_1 \tag{1.32}$$

Через $q_s(t_m)$, $q_s(t_{m+1}), \ldots, q_s(t_{2m-1})$ обозначим значения ступенчатой функции $q_s(t)$ на интервалах (t_m, t_{m+1}), $(t_{m+1}, t_{m+2}), \ldots, (t_{2m-1}, T_2)$, соответственно. Аналогично (1.26) обозначим

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} W_{p_is}(T_2,\tau)\,d\tau = c_i^{(m)}, \quad \int_{t_{m+1}}^{t_{m+2}} W_{p_is}(T_2,\tau)\,d\tau = c_i^{(m+1)}, \ldots$$

$$\ldots, \int_{t_{2m-1}}^{T_2} W_{p_is}(T_2,\tau)\,d\tau = c_i^{(2m-1)} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.33}$$

Соотношения (1.30) примут вид: (1.34)

$$c_i^{(m)}q_s(t_m) + c_i^{(m+1)}q_s(t_{m+1}) + \ldots + c_i^{(2m-1)}q_s(t_{2m-1}) = R_{p_i}^{*}(T_2) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Из системы уравнений (1.34) найдем значения $q_s(t_m)$, $q_s(t_{m+1}), \ldots$ $\ldots, q_s(t_{2m-1})$, т. е. закон изменения добавочной внешней силы на интервале (T_1, T_2), обеспечивающий выполнение для момента времени T_2 требований:

$$z_{p_i}(T_2) = r_{p_i}(T_2) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.35}$$

Этот процесс можно продолжить и обеспечить для дискретных моментов времени $t^* = T_1, T_2, T_3, \ldots$ при наличии лишь одной добавочной внешней силы $q_s(t)$ выполнение m условий (1.19):

$$z_{p_i}(t^*) = r_{p_i}(t^*) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Заметим, что с уменьшением длины интервалов $T_i - T_{i-1}$ значения $q_s(t_j)$ будут, вообще говоря, возрастать. Это может служить причиной ограничения снизу длины этих интервалов.

При фиксированных значениях T_i, в которых должны выполняться условия (1.19), может быть поставлена задача об обеспечении некоторых экстремальных свойств движения, например, минимума среднеквадратического значения отклонения $r_{p_i}(t) - z_{p_i}(t)$ и т. п. Это приведет к задаче об условном экстремуме соответствующих функционалов, которые могут быть найдены при помощи (1.23).

Сделаем еще следующее замечание. В уравнениях (1.24), (1.25), (1.29) предполагаются известными функции $W_{jl}(t, \tau)$ для фиксированного значения $t = t_\zeta$. Как видно из выражений (1.17), для определения функций $W_{jl}(t_\zeta, \tau)$ должны быть известны функции $N_{j\xi}(t_\zeta, \tau)$, представляющие собой элементы матричной функции веса $N(t, \tau)$ для того же значения $t = {}_\zeta t$. Как известно,

$$N_{j\xi}(t_\zeta, \tau) = Z_\xi(\tau) \tag{1.36}$$

где $Z_\xi(\tau)$ — интегралы построенной для системы уравнений (1.10) сопряженной системы уравнений

$$\frac{dZ_\xi}{d\tau} - \sum_{k=1}^{r} a_{k\xi}(\tau) Z_k = 0 \qquad (\xi = 1, \ldots, r) \tag{1.37}$$

принимающие при $\tau = t_\zeta$ следующие значения:

$$Z_j(t_\zeta) = 1, \qquad Z_k(t_\zeta) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r) \tag{1.38}$$

Таким образом, для возможности определения функций $W_{jl}(t_\zeta, \tau)$ необходимо проинтегрировать сопряженную систему уравнений (1.37) при условиях (1.38). Из этого вытекает и метод определения добавочных внешних сил $q_s(t)$ при помощи электронных вычислительных устройств.

2. Импульсные системы. Для рассматриваемой здесь задачи, в случае нестационарной импульсной системы, уравнения движения будут представлять собой систему линейных разностных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(T) y_k = x_j(t) + q_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где T — оператор упреждения, определяемый соотношением

$$T^s y_k = y_k(t + s\tau) \tag{2.2}$$

а τ — некоторая постоянная величина.

Уравнения (2.1) могут быть получены из уравнений (1.1) заменой в последних оператора дифференцирования D оператором упреждения T.

Повторив преобразования (1.2) — (1.9), приведем систему уравнений (2.1) к виду

$$Tz_j + \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t)\, z_k = X_j(t) + Q_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.3}$$

где аналогично (1.5)

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = Ty_1, \ldots, \quad z_{m_1} = T^{m_1 - 1} y_1, \ldots, \quad z_r = T^{m_n - 1} y_n \tag{2.4}$$

а функции $X_j(t)$, $Q_j(t)$ определены выражениями (1.7) и (1.8).

Система скалярных уравнений (2.3) эквивалентна матричному уравнению

$$Tz + a(t)\, z = X(t) + Q(t) \tag{2.5}$$

где матрицы z, $a(t)$, $X(t)$, $Q(t)$ определены (1.12). Решение уравнения (2.5) имеет следующий вид:

$$z(t) = \theta(t)\, \theta^{-1}(t - \vartheta\tau)\, z^*(t - \vartheta\tau) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\vartheta} \theta(t)\, \theta^{-1}(t - \vartheta\tau + j\tau)\, [X(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + Q(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)] \tag{2.6}$$

где $\theta(t)$ — квадратная матрица, столбцы которой являются линейно независимыми решениями однородного матричного уравнения

$$Tz + a(t)\, z = 0 \tag{2.7}$$

Матрица $\theta^{-1}(t)$ является обратной для матрицы $\theta(t)$, а через ϑ обозначена целая часть t/τ.

В выражении (2.6) второе слагаемое обращается в нуль на интервале $0 < t < \tau$, и поэтому согласно (2.6)

$$z(t) = z^*(t) \qquad (0 < t < \tau) \tag{2.8}$$

где $z^*(t)$ — наперед заданная матрица, которая определена на интервале $0 < t < \tau$ законом изменения искомой матрицы $z(t)$ на этом (начальном) интервале времени. Элементы матрицы $z(t)$ согласно (2.6) будут иметь вид:

$$z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} [\theta(t)\, \theta^{-1}(t - \vartheta\tau)]_{\nu k}\, z_k^*(t - \vartheta\tau) + \tag{2.9}$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta} [\theta(t)\, \theta^{-1}(t - \vartheta\tau + j\tau)]_{\nu k}\, [X_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) +$$

$$+ Q_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)] \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

Обозначая через $N(t, j\tau)$ матричную функцию веса

$$N(t, j\tau) = \theta(t)\, \theta^{-1}(t - \vartheta\tau + j\tau) \tag{2.10}$$

можно представить решение (2.6) в виде

$$z(t) = N(t, 0)\, z^*(t - \vartheta\tau) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\vartheta} N(t, j\tau)\, [X(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + Q(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)] \tag{2.11}$$

Выражения (2.9) теперь примут вид:

$$z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t, 0)\, z_k^*(t - \vartheta\tau) + \tag{2.12}$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu k}(t, j\tau)\, [X_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + Q_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)] \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

Так как функции $X_\mu(t)$ и $Q_\mu(t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l=1,\ldots,n)$, тождественно равны нулю, то выражения (2.12) можно переписать так:

$$z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t,\ 0)\, z_k^*(t-\vartheta\tau) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu\sigma_i}(t,\ j\tau)\,[X_{\sigma_i}(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) + Q_{\sigma_i}(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)] \qquad (\nu=1,\ldots,r) \tag{2.13}$$

Заменяя X_{σ_i} и Q_{σ_i} согласно (1.7), приведем выражения (2.13) к следующему виду:

$$z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t,\ 0)\, z_k^*(t-\vartheta\tau) + \tag{2.14}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta} \sum_{l=1}^{n} N_{\nu\sigma_i}(t,\ j\tau)\, \frac{B_{li}(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)}{\Delta^*(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)}\,[x_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) +$$

$$+ q_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)] \qquad (\nu=1,\ldots,r)$$

Обозначая

$$W_{\nu l}(t,\ j\tau) = \sum_{i=1}^{n} N_{\nu\sigma_i}(t,\ j\tau)\, \frac{B_{li}(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)}{\Delta^*(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)} \qquad \begin{pmatrix} \nu=1,\ldots,r \\ l=1,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

можно представить выражения (2.14) в таком виде:

$$z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t,\ 0)\, z_k^*(t-\vartheta\tau) + \tag{2.16}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t,\ j\tau)\,[x_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) + q_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)] \qquad (\nu=1,\ldots,r)$$

Для выполнения условий (1.19), аналогично соотношениям (1.23), будем иметь теперь следующие соотношения:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{p_i s_\mu}(t,\ j\tau)\, q_{s_\mu}(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) = R_{p_i}(t) \quad (t \geqslant t_1) \quad (i=1,\ldots,m), \tag{2.17}$$

где

$$R_{p_i}(t) = r_{p_i}(t) - \sum_{k=1}^{r} N_{p_i k}(t,\ 0)\, z_k^*(t-\vartheta\tau) - \tag{2.18}$$

$$- \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{p_i l}(t,\ j\tau)\, x_l(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \qquad (j=1,\ldots,m)$$

Соотношения (2.17) определяют собой закон, по которому должны изменяться добавочные внешние силы $q_{s_\mu}(t)$ $(\mu=1,\ldots,m)$ для того, чтобы некоторые обобщенные координаты системы $z_{p_i}(i=1,\ldots,m)$, начиная с определенного момента времени $t_1 = j_1\tau$, который мы примем кратным τ, изменялись по наперед заданным законам (1.19):

$$z_{p_i}(t) = r_{p_i}(t) \qquad (t \geqslant t_1) \qquad (i=1,\ldots,m)$$

Для решения системы уравнений (2.17) можно, так же как в п. 1, применить числовой метод. Для этого разделим интервал времени $(j_1\tau,\ \vartheta\tau)$ на малые интервалы $(j_1\tau,\ j_2\tau)$, $(j_2\tau,\ j_3\tau)$, $(j_3\tau,\ j_4\tau), \ldots$ и будем искать

$q_{s_\mu}(t)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ в виде ступенчатых функций, сохраняющих неизменными свои значения на интервале $(0, j_1\tau)$ и на каждом из указанных здесь интервалов. Обозначим эти значения через $q_{s_\mu}(0)$, $q_{s_\mu}(t_1)$, $q_{s_\mu}(t_2)$, $q_{s_\mu}(t_3), \ldots$ соответственно. Здесь

$$t_1 = j_1\tau, \qquad t_2 = j_2\tau, \qquad t_3 = j_3\tau, \ldots \tag{2.19}$$

При этом из (2.17) получим систему рекуррентных соотношений:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_i s_\mu}(t_1, j\tau)\right] q_{s_\mu}(0) = R_{p_i}(t_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.20}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_i s_\mu}(t_2, j\tau)\right] q_{s_\mu}(0) + \sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{j=j_1+1}^{j_2} W_{p_i s_\mu}(t_2, j\tau)\right] q_{s_\mu}(t_1) = R_{p_i}(t_2) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_i s_\mu}(t_3, j\tau)\right] q_{s_\mu}(0) + \sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{j=j_1+1}^{j_2} W_{p_i s_\mu}(t_3, j\tau)\right] q_{s_\mu}(t_1) +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{j=j_2+1}^{j_3} W_{p_i s_\mu}(t_3, j\tau)\right] q_{s_\mu}(t_2) = R_{p_i}(t_3) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

. . . .

Из соотношений (2.20) последовательно найдем величины

$$q_{s_\mu}(0),\ q_{s_\mu}(t_1), q_{s_\mu}(t_2), \ldots \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

Когда число добавочных внешних сил меньше числа координат, изменение которых во времени должно происходить по наперед заданному закону, соотношения (2.17), так же как и в системах непрерывного действия, могут быть удовлетворены лишь для дискретных моментов времени $t = T_1, T_2, T_3, \ldots$, которые для простоты примем кратными τ:

$$T_1 = \vartheta_1\tau, \qquad T_2 = \vartheta_2\tau, \qquad T_3 = \vartheta_3\tau, \ldots \tag{2.21}$$

При наличии лишь одной добавочной внешней силы $q_s(t)$ соотношения (2.17) для момента времени $t = T_1$ принимают вид:

$$\sum_{j=1}^{\vartheta_1} W_{p_i s}(T_1, j\tau)\, q_s(j\tau - \tau) = R_{p_i}(T_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.22}$$

Разобьем интервал $(0, T_1)$ на m равных или неравных подынтервалов $(0, j_1\tau)$, $(j_1\tau, j_2\tau)$, $(j_2\tau, j_3\tau), \ldots, (j_{m-1}\tau, T_1)$ и, принимая функцию $q_s(t)$ ступенчатой, обозначим через $q_s(0), q_s(t_1), \ldots, q_s(t_{m-1})$ ее значения на каждом из указанных подынтервалов соответственно. Обозначим еще

$$\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_i s}(T_1, j\tau) = c_i^{(0)}, \qquad \sum_{j=j_1+1}^{j_2} W_{p_i s}(T_1, j\tau) = c_i^{(1)}, \ldots$$

$$\ldots, \sum_{j=j_{m-1}+1}^{\vartheta_1} W_{p_i s}(T_1, j\tau) = c_i^{(m-1)} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.23}$$

Соотношения (2.22) принимают теперь вид:

$$c_i^{(0)} q_s(0) + c_i^{(1)} q_s(t_1) + \ldots + c_i^{(m-1)} q_s(t_{m-1}) = R_{p_i}(T_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.24}$$

Из уравнений (2.24) найдутся интересующие нас значения $q_s(0)$, $q_s(t_1), \ldots, q_s(t_{m-1})$, чем и определится закон изменения добавочной внешней силы $q_s(t)$ на интервале $(0, T_1)$. Продолжая аналогично (1.29)—(1.34) этот процесс, найдем закон изменения добавочной внешней силы $q_s(t)$ на интервалах (T_1, T_2), (T_2, T_3) и т. д. Таким образом, выполнение условий (1.19)

$$z_{p_i}(t^*) = r_{p_i}(t^*) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

обеспечено для дискретных моментов времени $t^* = T_1, T_2, T_3, \ldots$

В соотношениях (2.20)—(2.23) предполагаются известными функции $W_{\nu l}(t, j\tau)$ для фиксированного значения $t = t_\zeta$. Для определения функций $W_{\nu l}(t_\zeta, j\tau)$ в соответствии с (2.15) должны быть известны функции $N_{\nu\xi}(t_\zeta, j\tau)$, являющиеся элементами матричной функции веса (2.10) при значении $t = t_\zeta$. Как показано в работе [10]:

$$N_{\nu\xi}(t_\zeta, j\tau) = Z_\xi(t_\zeta - \vartheta_\zeta\tau + j\tau) \tag{2.25}$$

где ϑ_ζ — целая часть t_ζ/τ, а Z_ξ — решения построенной для системы разностных уравнений (2.3) сопряженной системы разностных уравнений

$$Z_\xi(t) + \sum_{k=1}^{k} a_{k\xi} Z_k(t+\tau) = 0 \qquad (\xi = 1, \ldots, r) \tag{2.26}$$

удовлетворяющие на интервале $\vartheta_\zeta\tau < t < (\vartheta_\zeta + 1)\tau$ условиям

$$Z_\nu^\nu(t) = 1, \qquad Z_k(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, r) \tag{2.27}$$

Таким образом, для возможности определения функций $W_{\nu l}(t_\zeta, j\tau)$ необходимо найти решение системы однородных разностных уравнений (2.26) при условиях (2.27).

Из этого вытекает также и метод решения поставленной здесь задачи для импульсных систем при помощи электронных вычислительных устройств.

Поступила 30 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, СХ, № 1, стр. 7, 1956.
2. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, № 4, стр. 459, 1958.
3. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Успехи матем. наук, т. XIV, вып. 1, стр. 3, 1959.
4. Фельдбаум А. А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. Автоматика и телемеханика, т. XVI, № 2, стр. 129, 1955.
5. Лернер А. Я. Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, I и II. Автоматика и телемеханика, № 2 и 4, 1952.
6. Лернер А. Я. Улучшение динамических свойств систем автоматического регулирования при помощи нелинейных связей. В кн. «Основы автоматического регулирования», под ред. В. В. Солодовникова. Машгиз, 1954, стр. 848.
7. Bellman R. The Theory of Dynamic Programming. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 60, p. 503, 1954.
8. Bellman R., Gliksberg I., Gross O. On the «bang-bang» Control Problem. Quart. Appl. Mathemat. vol. 14, № 1, p. 11, 1956.
9. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton Univ. Press, 1957.
10. Ройтенберг Я. Н. О накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах. ПММ, т. XXII, вып. 4, стр. 534, 1958.