Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМОГО ВЕЛОСИПЕДА, КАТЯЩЕГОСЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

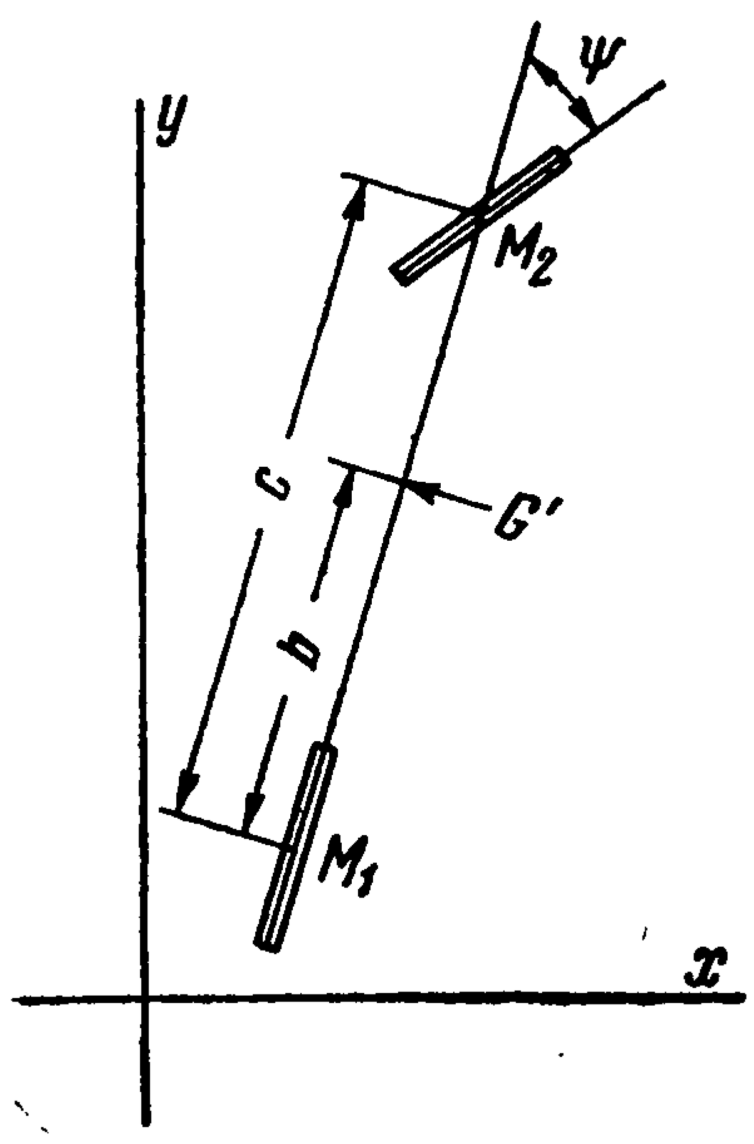
А. М. Летов
(Москва)

Задаче о качении велосипеда по горизонтальной плоскости посвящена значительная литература.

В настоящее время эта задача привлекает интерес в связи с возможностью применения велосипедного механизма в системах, содержащих автоматически управляемое велосипедное шасси.

Ниже дается способ исследования данной задачи при учете нелинейного закона сервоуправления передним колесом. Устойчивость может быть достигнута при любой, даже сколь угодно малой, скорости качения велосипеда, если скорость сервомотора управления может быть сделана достаточно большой. [1]

§ 1. Постановка задачи. Пусть θ — угол отклонения рамы велосипеда от вертикали, ψ — угол отклонения управляемого, переднего колеса от линии, соединяющей точки M_1 и M_2 касания колес плоскости качения.



Фиг. 1

Предположим, что эта плоскость абсолютно шероховата. Используем известное (см., например, [1]) уравнение момента количества движения относительно оси M_1M_2:

$$\ddot{\theta} = -\frac{bv}{cd}\dot{\psi} + \frac{g}{d}\left(\theta - \frac{v^2}{cg}\psi\right) \qquad (1.1)$$

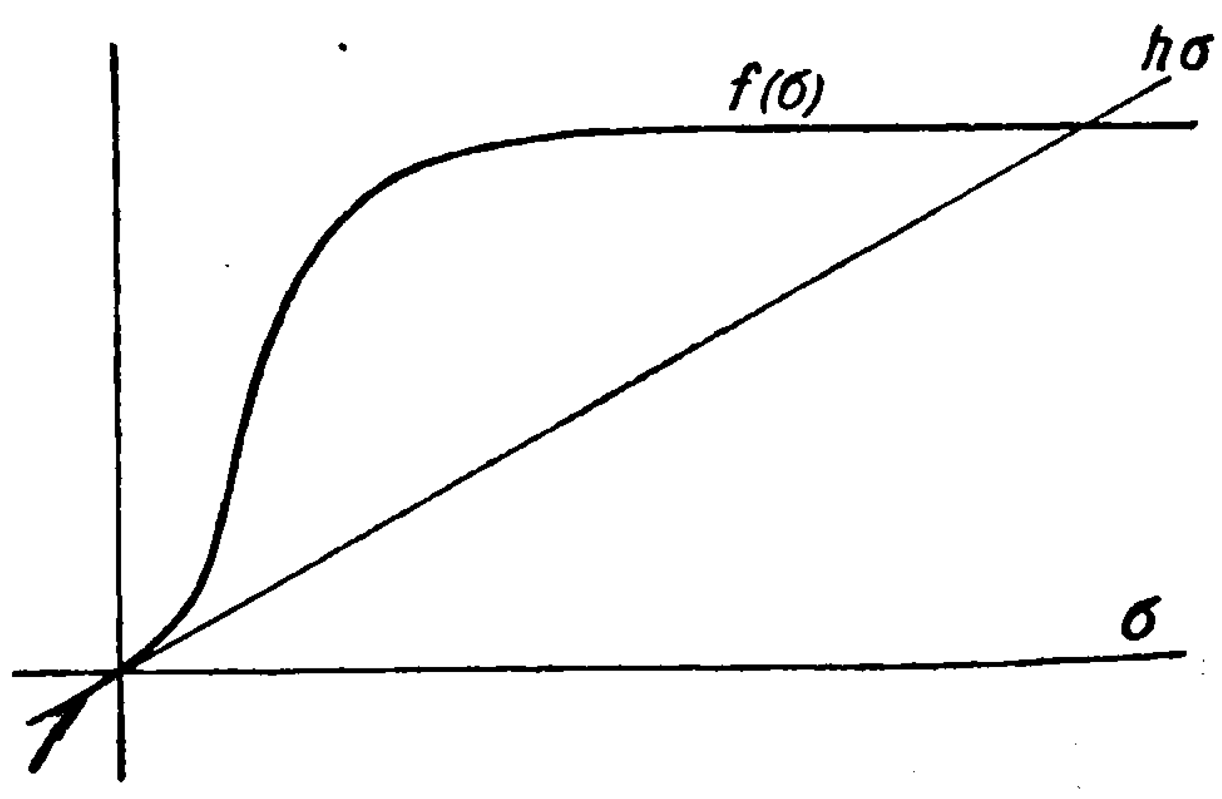
В случае малых отклонений это уравнение описывает возмущенное движение велосипеда, наблюдаемое в окрестности его установившегося движения с постоянной скоростью v вдоль неподвижной прямой M_1M_2. Здесь через d обозначено расстояние центра тяжести G велосипеда и груза от линии M_1M_2, через c — расстояние между точками M_1M_2, через b—расстояние проекции G' центра тяжести G на линию M_1M_2 до точки M_1 касания заднего колеса (фиг. 1). Предположим, что переднее колесо автоматически управляется сервомотором, уравнение движения которого есть

$$\dot{\psi} = W\dot{\theta} + f(\sigma), \qquad \sigma = a\theta + E\dot{\theta} + G^2\ddot{\theta} - \frac{1}{l}\psi - N\dot{\psi} \qquad (1.2)$$

[1] При подготовке статьи к печати рецензент заметил, что в статье применяются методы исследования устойчивости «в большом» к задаче, сохроняющей смысл лишь для малых возмущений.

Это замечание справедливо, но изложенный метод допускает обобщение на случай учета допольнительных нелинейных членов, а также на случай устойчивости неустановившихся движений, чем и оправдывается его применение к данной частной задаче.

Здесь постоянная W характеризует величину гироскопического момента переднего колеса, стабилизирующий эффект которого хорошо известен [2] в случае качения велосипеда, предоставленного самому себе, a, E, G^2, l, N — параметры системы управления. Нелинейная функция $f(\sigma)$ принадлежит к классу А или классу А′ функций [3] (фиг. 2).



Фиг. 2

Требуется установить условия устойчивости невозмущенного движения велосипеда, который управляется сервомотором с нелинейной характеристикой $f(\sigma)$.

§ 2. Устойчивость при достаточно большой скорости качения велосипеда. Введем обозначения для постоянных

$$\frac{g}{d} = m, \qquad n = \frac{v^2}{cd}, \qquad p = \frac{bv}{cd} \tag{2.1}$$

Очевидно, имеем

$$\ddot\theta = m\theta - pW\dot\theta - n\psi - pf(\sigma), \qquad \dot\psi = W\dot\theta + f(\sigma)$$
$$\sigma = (a + mG^2)\theta + [E - W(N + pG^2)]\dot\theta - (1/l + nG^2)\psi - (N + pG^2)f(\sigma) \tag{2.2}$$

Первоначально преобразуем их к нормальной форме Коши. При помощи обозначений

$$\theta = \eta_1, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{s}\,\eta_2, \qquad \psi = \eta_3, \qquad \tau = \sqrt{s}\,t \tag{2.3}$$

где новые переменные являются безразмерными, а постоянная s пока остается произвольной, получим

$$\dot\eta_1 = \eta_2, \quad \dot\eta_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3 + h_2 f(\sigma), \quad \dot\eta_3 = b_{32}\eta_2 + f(\sigma)$$
$$\sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + p_3\eta_3 - (N + pG^2)f(\sigma) \tag{2.4}$$

Общая задача устойчивости, описываемая уравнениями вида (2.4), ранее рассматривалась в [4]. Здесь обозначено

$$\frac{m}{s} = b_{21}, \qquad -\frac{pW}{\sqrt{s}} = b_{22}, \qquad -\frac{M}{s} = b_{23}, \qquad -\frac{p}{s} = h_2$$
$$W = b_{22}, \qquad \frac{1}{\sqrt{s}} = h_3, \qquad p_1 = a + mG^2 \tag{2.5}$$
$$p_2 = [E - W(N + pG^2)]\sqrt{s}, \qquad p_3 = -\left(\frac{1}{l} + nG^2\right)$$

Следует обратить внимание на выражение σ. При учете в уравнении велосипеда момента с постоянной p управление велосипедом по ускорению $\ddot\theta$ его падения усиливает эффект управления, достигаемый при помощи канала тахометрической обратной связи.

Приведем уравнения (2.4) к канонической форме. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — корни уравнения

$$\lambda[\lambda^2 - b_{22}\lambda - b_{21} - b_{22}b_{23}] = 0$$

Каноническое преобразование определим формулами

$$x_1 = \frac{b_{21}}{H(\lambda_1)}\eta_1 + \frac{\lambda_1}{H(\lambda_1)}\eta_2 + \frac{b_{23}}{H(\lambda_1)}\eta_3 \qquad (2.6)$$
$$x_2 = \frac{b_{21}}{H(\lambda_2)}\eta_1 + \frac{\lambda_2}{H(\lambda_2)}\eta_2 + \frac{b_{23}}{H(\lambda_2)}\eta_3$$
$$x_3 = -\frac{b_{32}}{h_3}\eta_1 + \frac{1}{h_3}\eta_3$$
$$H(\lambda) = h_2\lambda + b_{23}h_3 = h_2\lambda + b_{23}h_3$$

Это преобразование не является особым, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, поэтому оно может быть обращено. Канонические уравнения в новых переменных будут иметь вид:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f(\sigma), \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f(\sigma), \quad \varkappa\dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - Rf(\sigma) \qquad (2.7)$$

Здесь

$$\varkappa(\sigma) = 1 + (N + pG^2)\frac{df}{d\sigma}, \qquad \beta_1 = -\frac{H(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda}[p_1 + \lambda_1 p_2 + b_{32}p_3]$$
$$R = -h_2p_2 - h_3p_3, \qquad \beta_2 = \frac{H(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}[p_1 + \lambda_2 p_2 + b_{32}p_3] \qquad (2.8)$$

Числа λ_1, λ_2 определяются равенствами

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b_{22}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{nW - m}{s} \qquad (2.9)$$

Потребуем выполнения условия

$$nW - m > 0 \qquad (2.10)$$

Уравнение $\dot{x}_3 = f(\sigma)$ для канонической переменной x_3 из системы (2.7) выпадает. Нелинейная функция $\varkappa(\sigma)$ положительна, а $\operatorname{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$.

Легко видеть, что устойчивость относительно переменных x_1, x_2, σ гарантирует устойчивость и относительно переменных η_1, η_2, η_3. Задача состоит в выборе постоянных управления a, E, G^2, l, N, гарантирующих устойчивость при любой $f(\sigma)$ класса (A).

Рассмотрим знакоопределенную и всюду положительную функцию

$$V = -\frac{a_1^2}{2\lambda_1}x_1^2 - \frac{2a_1a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}x_1x_2 - \frac{a_2^2}{2\lambda_2}x_2^2 + \int_0^\sigma \varkappa(\sigma)f(\sigma)\,d\sigma \qquad (2.11)$$

Ее полная производная согласно (2.7) имеет вид:

$$\dot{V} = -(a_1x_1 + a_2x_2 + \sqrt{R}f(\sigma))^2$$

если выполняются соотношения (2.12)

$$\beta_1 + 2\sqrt{R}a_1 - \frac{2a_1a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{a_1^2}{\lambda_1} = 0, \qquad \beta_2 + 2\sqrt{R}a_2 - \frac{2a_1a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{a_2^2}{\lambda_2} = 0$$

Соотношения (2.12) могут быть разрешены относительно постоянных a_1, a_2, если выполняются неравенства [3]

$$\Gamma^2 = R + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} > 0, \qquad R > 0 \qquad (2.13)$$
$$D^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)R + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 \pm 2\lambda_1\lambda_2\sqrt{R\Gamma^2} > 0 \qquad (2.14)$$

Следовательно, критерий устойчивости сводится к ограничению выбора параметров регулятора неравенствами (2.13), (2.14), а также неравенством (2.10). Рассмотрим их. Неравенство $R > 0$ (2.13) имеет вид:

$$pE + 1/l + nG^2 > pW(N + pG^2) \qquad (2.15)$$

Далее имеем

$$\frac{\beta_1}{\lambda_1}+\frac{\beta_2}{\lambda_2}=h_2p_2-\frac{h_3b_{23}}{\lambda_1\lambda_2}(p_1+b_{32}p_3)$$

$$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=(h_2b_{22}+h_2b_{23})p_1+[h_2(b_{22}^2+b_{21}+b_{23}b_{32})+h_3b_{22}b_{23}]p_2+$$
$$+(h_2b_{22}+h_3b_{23})b_{32}p_3$$

Следовательно,

$$\Gamma^2=\frac{h_3(a\ln-m)}{l(Wn-m)}$$

Отсюда должно быть

$$aln-m>0 \tag{2.16}$$

Обращение неравенства невозможно в силу (2.10). Наконец, пользуясь формулами (2.8), (2.5), (2.1), находим последнее условие устойчивости:

$$D^2=(p^2W-n)a+pnW[E-W(N+pG^2)]+m\left(\frac{1}{l}+np^2G^4\right)\pm \tag{2.17}$$
$$\pm 2\left\{(Wn-m)\left(\frac{aln-m}{l}\right)\left[\frac{1}{l}+nG^2+pE-pW(N+pG^2)\right]\right\}^{1/2}>0$$

Полученные условия допускают механическую интерпретацию.

Если параметры колеса заданы, то постоянная гироскопического момента переднего колеса есть $W=kv$, где k — коэффициент пропорциональности, и неравенство (2.10) принимает вид:

$$kv^3>cg \tag{2.18}$$

Оно, наверное, будет выполняться, если скорость велосипеда достаточно велика. Заметим, что неравенство (2.18) представляет собой условие естественной стабилизации велосипеда, предоставленного самому себе, достигаемой благодаря гироскопическому эффекту колеса [2]. Оно накладывает ограничение снизу на скорость качения и не содержит параметров автоматического управления. В этом случае неравенство (2.16) ограничивает снизу выбор параметра al системы управления и мы имеем

$$alV^2>cg \tag{2.19}$$

Неравенства (2.15), (2.17) могут быть выполнены за счет выбора параметров E и G^2.

§ 3. Устойчивость при сколь угодно малой скорости качения велосипеда. Теперь допустим, что неравенство (2.10), характеризующее наличие собственной гироскопической стабилизации велосипеда, доставляемой передним колесом, не выполняется. Пусть

$$\gamma=N+pG^2+\frac{h_2p_3}{b_{23}}, \qquad b_{21}^\circ=b_{21}-\frac{p_1b_{23}}{p_3}, \qquad b_{22}^\circ=b_{22}-\frac{p_2b_{23}}{p_3} \tag{3.1}$$

Тогда, исключив η_3, при помощи равенства (2.4) найдем

$$\dot\eta_1=\eta_2, \qquad \dot\eta_2=b_{21}^\circ\eta_1+b_{22}^\circ\eta_2+\frac{b_{23}}{p_3}[\sigma+\gamma f(\sigma)]$$

При помощи неособого преобразования эти уравнения приводятся к виду

$$\dot x_s=\mu_sx_s+[\sigma+\gamma f(\sigma)] \quad (s=1,2) \tag{3.2}$$

Здесь μ_s — корни уравнения $\mu^2-b_{22}^\circ\mu-b_{21}^\circ=0$. Так как

$$-b_{22}^\circ=\frac{pW/l+n[E-WN]}{\sqrt{s}(1/l+nG^2)}, \qquad -b_{21}^\circ=\frac{aln-m}{ls(1/l+nG^2)} \tag{3.3}$$

то, требуя выполнения неравенств

$$\frac{aln - m}{ls(1/l + nG^2)} > 0, \qquad \frac{pW/l + n[E - WN]}{1/l + nG^2} > 0 \tag{3.4}$$

получим

$$\operatorname{Re}\mu_k < 0 \qquad (k = 1, 2)$$

Искомое преобразование, будучи обращенным, может быть записано так:

$$\eta_1 = \frac{b_{23}}{p_3(\mu_2 - \mu_1)}(x_2 - x_1), \qquad \eta_2 = \frac{b_{23}}{p_3(\mu_2 - \mu_1)}(\mu_2 x_2 - \mu_1 x_1) \tag{3.5}$$

Третье уравнение находим дифференцированием σ. Пусть

$$f(\sigma) = h\sigma + \varphi(\sigma) \tag{3.6}$$

где $\varphi(\sigma)$ — функция класса A′

$$\left(\frac{df}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} \geqslant h > 0 \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} 1 + h\gamma = M, \qquad S = -\frac{b_{23}p_2}{p_3} - Rh, \quad R = -h_3 p_3 - \frac{p_2 b_{23}\gamma}{p_3} \\ \beta_1^\circ = \frac{b_{23}}{p_3(\mu_2 - \mu_1)}[-p_2 b_{21}^\circ - \mu(p_1 + p_2 b_{22}^\circ - p_3 b_{32})] \\ \beta_2^\circ = \frac{b_{23}}{p_3(\mu_2 - \mu_1)}[p_2 b_{21}^\circ + \mu_2(p_1 + p_2 b_{22}^\circ + p_3 b_{32})] \end{gathered} \tag{3.8}$$

Тогда найдем окончательно

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = \mu_1 x_1 + [M\sigma + \gamma\varphi(\sigma)], \qquad \dot{x}_2 = \mu_2 x_2 + [M\sigma + \gamma\varphi(\sigma)] \\ \varkappa\dot{\sigma} = \beta_1^\circ x_1 + \beta_2^\circ x_2 - S\sigma - R\varphi(\sigma) \end{gathered} \tag{3.9}$$

Допустим, что

$$M > 0, \qquad \gamma \geqslant 0, \qquad R > 0, \qquad S > 0 \tag{3.10}$$

и рассмотрим V-функцию:

$$V = -\frac{a_1^2 x_1^2}{2\mu_1} - \frac{2a_1 a_2}{\mu_1 + \mu_2}x_1 x_2 - \frac{a_2^2}{2\mu_2}x_2^2 - \int_0^\sigma [M\sigma + \gamma\varphi(\sigma)]\varkappa(\sigma)\,d\sigma \tag{3.11}$$

Она положительна всюду, за исключением начала координат. Ее полная производная, вычисленная согласно уравнениям (3.9), имеет вид:

$$\dot{V} = -(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 - [M\sigma + \gamma\varphi(\sigma)][S\sigma + R\varphi(\sigma)]$$

если выбрать параметры регулятора так, чтобы имели место равенства

$$\beta_2^\circ - \frac{a_1^2}{\mu_1} - \frac{2a_1 a_2}{\mu_1 + \mu_2} = 0, \qquad \beta_2^\circ - \frac{a_2^2}{\mu_2} - \frac{2a_1 a_2}{\mu_1 + \mu_2} = 0 \tag{3.12}$$

Наряду с (3.10), (3.4) условия устойчивости будут иметь вид:

$$\Gamma^2 = \frac{\beta_1^\circ}{\mu_1} + \frac{\beta_2^\circ}{\mu_2} > 0, \qquad D^2 = \beta_1^\circ\mu_1 + \beta_2^\circ\mu_2 > 0 \tag{3.13}$$

§ 4. Условия устойчивости и их интерпретация. Прежде всего имеем

$$\gamma = N - \frac{b}{vl} \geqslant 0 \tag{4.1}$$

Этому условию легко удовлетворить, выбирая должное значение постоянной N тахометрической обратной связи. В частности, при отсутствии жесткой обратной связи ($l = \infty$) эта постоянная должна быть неотрицательной; в дальнейшем полагаем $N = \rho n$, где ρ — положительная постоянная.

Если (4.1) выполняется, то, очевидно, $M > 0$. Два последних неравенства (3.10) можно записать так: (4.2)

$$\left(\frac{1}{l} + nG^2\right)^2 > n\left(N - \frac{b}{vl}\right)[E - W(N + pG^2)], \quad h > \frac{n\,[E - W(N + pG^2)]}{R\sqrt{s}\,(1/l + nG^2)}$$

Если система управления велосипедом не содержит сигнала жесткой обратной связи ($l = \infty$), то неравенства (3.4), (4.1), (4.2) становятся очевидными; неравенство (4.2) ограничивает выбор характеристики сервомотора в классе A^1 функций.

Действительно, для неравенств (4.2) имеем

$$G^2 > \frac{\rho\,[E - W(N + pG^2)]}{G^2}, \qquad h > \frac{[E - W(N + pG)]\,G^2}{\{G^4 - \rho\,[E - W(N + pG^2)]\}\,n} \tag{4.3}$$

Если скорость велосипеда достаточно мала, эти неравенства можно упростить так:

$$G^2 > \frac{\rho E}{G^2}, \qquad h > \frac{G^2Ecd}{(G^4 - \rho E)\,v^2} \tag{4.4}$$

Первому неравенству можно удовлетворить за счет выбора числа ρ; второе неравенство отбирает в классе A такие сервомоторы, скорость которых ограничена по модулю снизу числом, обратно пропорциональным квадрату скорости качения велосипеда. Следовательно, чтобы сохранить устойчивость велосипеда при сколь угодно малой скорости v его качения, сервомотор должен вращать переднее колесо сколь угодно быстро. (На возможность такого решения было указано Н. Г. Четаевым).

Другое решение можно получить, положив для простоты $G^2 = 0$. В этом случае неравенства (3.13) принимают вид

$$E - W(N + pG^2) > 0 \tag{4.5}$$

$$-\left(an - \frac{m}{l}\right)[E - W(N + pG^2)] + \left[\frac{pW}{l} + n(E - WN)\right]\Big\{W(1/l + nG^2) +$$
$$+ \frac{pW/l + n(E - WN)}{1/l + nG^2}[E - W(N + pG^2)] - (a + mG^2)\Big\} > 0 \tag{4.6}$$

В частном случае ($l = \infty$) неравенство (4.6) упрощается:

$$-a(E - WpG^2) + E\left\{nWG^2 + \frac{E}{G^2}(E - WpG^2) - a - mG^2\right\} > 0 \tag{4.7}$$

Ясно, что выполнение условий (4.6), (4.7) достигается при достаточно большом значении E постоянной искусственного демпфирования.

Задача допускает обобщение на случай качения велосипеда с переменной скоростью. При этом могут быть применены методы решения задачи об устойчивости неустановившихся движений, указанные в [3], гл. XI и в [5], гл. IX.

Поступила 1 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика, т. III. Гостехиздат, 1934.
2. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение, т. II, пер. Г. А. Вольперта. Изд-во иностр. лит., 1952.
3. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Гостехиздат, 1955.
4. Letov A. M. Die Stabilität von Regelsystemen mit nachgebender Rückführung. Regelungstechnik ;Modern Theorien und ihre Verwendarkeit. Verlag R. Oldenbourg, München, 1956.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.