Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Чжан Сы-ин

(Москва — Шеньян)

Задачи устойчивости движения на конечном интервале времени основываются на оценках решений дифференциальных уравнений систем. В этой работе поставлен метод оценки решений в некоторых случаях, и тем самым установлены условия устойчивости.

§ 1. Линейная система. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $p_{sr}(t)$ — вещественные ограниченные непрерывные функции времени t. Характеристическое уравнение системы (1.1) имеет вид:

$$|p_{sr}(t) - \delta_{sr}\varkappa| = 0$$

Допустим, что это уравнение имеет только простые корни. Пусть среди них будет m вещественных корей $\varkappa_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ и 2σ комплексных корней $\lambda_i(t) \pm \mu_i(t)\sqrt{-1}$ $(i = m+1, \ldots, n-\sigma)$. Как известно, существуют линейное неособое преобразование с переменными коэффициентами

$$y_s = a_{s1}(t)x_1 + \cdots + a_{sn}(t)x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad |a_{sr}(t)| \neq 0 \tag{1.2}$$

и обратное преобразование

$$x_s = b_{s1}(t)y_1 + \cdots + b_{sn}(t)y_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad |b_{sr}(t)| \neq 0 \tag{1.3}$$

такие, что с их помощью система (1.1) может быть приведена к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_j}{dt} &= \varkappa_j y_j + Q_j && (j = 1, \ldots, m)\\
\frac{dy_i}{dt} &= \lambda_i y_i - \mu_i y_{\sigma+i} + Q_i && (i = m+1, \ldots, n-\sigma)\\
\frac{dy_{\sigma+i}}{dt} &= \lambda_i y_{\sigma+i} + \mu_i y_i + Q_{\sigma+i}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь Q_s $(s = 1, \ldots, n)$ — линейные комбинации переменных y_s с известными коэффициентами, зависящими от коэффициентов преобразований (1.2) и (1.3).

Рассмотрим функцию

$$V = e^{-\alpha(t)} \ (y_1^2 + \cdots + y_n^2) \tag{1.5}$$

где $\alpha(t)$ и ее производная — вещественные ограничные (в некоторых областях) непрерывные функции; $\alpha(t)$ пока не определена.

Найдем производную dV/dt в силу (1.4):

$$\frac{dV}{dt} = e^{-\alpha(t)} \left[\sum_{j=1}^{m} (2\varkappa_j - \alpha') y_j^2 + \sum_{i=m+1}^{n-\sigma} (\lambda_i - \alpha')(y_i^2 + y_{\sigma+i}^2) + \sum_{s=1}^{n} 2y_s Q_s \right] \tag{1.6}$$

Обозначим функцию в скобках через

$$H = \sum_{i,j} h_{ij} y_i y_j = \sum_{i,j} (h_{ij} - \delta_{ij}\alpha') y_i y_j \qquad \begin{pmatrix} h_{ij} = h_{ji} \\ h_{ij}^* = h_{ji}^* \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Чтобы $dV/dt \leqslant 0$, нужно сделать квадратичную форму H неположительной. Характеристическое уравнение этой формы будет

$$| h_{ij}^* - \delta_{ij} (\alpha' + \rho) | = 0 \tag{1.8}$$

Таким образом, можно записать

$$H = \rho_1 \xi_1^2 + \cdots + \rho_n \xi_n^2 \tag{1.9}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения (1.8). Введем обозначение $\alpha' + \rho = -\psi$, тогда (1.8) примет вид:

$$| h_{ij}^* + \delta_{ij} \psi | = 0 \tag{1.10}$$

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — корни этого уравнения, тогда можно переписать (1.9) в виде

$$H = (-\psi_1 - \alpha') \xi_1^2 + \cdots + (-\psi_n - \alpha') \xi_n^2$$

Форма H будет неположительна, если

$$-\psi_k - \alpha' \leqslant 0 \tag{1.11}$$

где ψ_k — наименьший из корней $\psi_1, \ldots, \psi_n$ уравнения (1.10). Из (1.11) меем

$$-\alpha(t) \leqslant \int \psi_k(t)\, dt + C \tag{1.12}$$

где C — произвольная постоянная.

При условии (1.12) производная $dV/dt \leqslant 0$ и, следовательно,

$$V \leqslant V_0 \tag{1.13}$$

Здесь V_0 — значение V при $t = t_0$. Подставим (1.12) в (1.5). Очевидно, что в силу (1.13) значение C не будет играть роли и можно принять $C = 0$. Таким образом, согласно (1.5) будем иметь

$$V = (y_1^2 + \cdots + y_n^2) \exp \int \psi_k(t)\, dt \tag{1.14}$$

Пусть при $t = t_0$

$$| x_{s0} | \leqslant x_{s0}^\circ \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

тогда при $t = t_0$ согласно (1.2) имеем

$$| y_{s0} | = | a_{s1}(t_0) | x_{10}^\circ + \cdots + | a_{sn}(t_0) | x_{n0}^\circ \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.16}$$

При $t > t_0$ согласно (1.13) имеем

$$(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \exp \int \psi_k(t)\, dt \leqslant (y_{10}^2 + \cdots + y_{n0}^2) \exp \int \psi_k(t)\, dt \,|_{t_0}$$

или

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant A \exp - \int_{t_0}^{t} \psi_k(\xi)\, d\xi \qquad (A = y_{10}^2 + \cdots + y_{n0}^2) \tag{1.17}$$

Отсюда следует

$$|y_s| \leqslant A^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \psi_k(\xi)\, d\xi\right) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.18}$$

Наконец, согласно (1.3) получим оценки решений системы (1.1):

$$|x_s| \leqslant A^{1/2} [|b_{s1}(t)| + \cdots + |b_{sn}(t)|] \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \psi_k(\xi)\, d\xi\right) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

Чтобы при условии (1.15) обеспечить

$$|x_s| \leqslant x_s^{\circ} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.20}$$

для всех t на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, где x_s°, T — заданные числа, достаточно, чтобы

$$A^{1/2} [|b_{s1}(t)| + \cdots + b_{sn}(t)|] \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \psi_k(\xi)\, d\xi\right) \leqslant x_s^{0} \quad \begin{pmatrix} t_0 \leqslant t \leqslant T \\ s = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Это — условия устойчивости движения на конечном интервале времени $[t_0, T]$.

§ 2. **Система с медленно изменяющимися коэффициентами.** В этом случае коэффициенты системы (1.1) имеют вид:

$$p_{sr}(t) = C_{sr} + \varepsilon f_{sr}(t) \qquad (s, r = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где C_{sr} — постоянные, ε — достаточное малое число, f_{sr} — ограничные функции. Система (1.1) в этом случае примет вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = C_{s1}x_1 + \cdots + C_{sn}x_n + \varepsilon (f_{s1}x_1 + \cdots + f_{sn}x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Введем неособое линейное преобразование с постоянными коэффициентами

$$y_s = a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Обратное преобразование

$$x_s = b_{s1}y_1 + \cdots + b_{sn}y_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

тоже будет неособым.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Корни уравнения

$$|C_{sr} - \delta_{sr}\lambda| = 0 \tag{2.5}$$

простые и вещественные.

В этом случае при помощи преобразования (2.3) система (2.2) приводится к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s y_s + \varepsilon Q_s \qquad \left(Q_s = \sum_k f_{sr}(b_{k1}y_1 + \cdots + b_{kn}y_n)\right) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Рассмотрим функцию

$$V = e^{-\alpha_1(t)} y_1^2 + \cdots + e^{-\alpha_n(t)} y_n^2 \tag{2.7}$$

Здесь $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ и их производные — вещественные непрерывные и ограниченные (в некоторых областях) функции. Найдем dV/dt. В силу (2.6)

$$\frac{dV}{dt} = \{e^{-\alpha_1(t)}(-\alpha_1' + 2\lambda_1) y_1^2 + \cdots + e^{-\alpha_n(t)}(-\alpha_n' + 2\lambda_n) y_n^2\} +$$
$$+ \varepsilon [e^{-\alpha_1(t)} 2y_1Q_1 + \cdots + e^{-\alpha_n(t)} 2y_nQ_n] \tag{2.8}$$

Так как величина ε предполагается достаточно малой и функция в квадратных скобках ограничена, то знак dV/dt будет вполне определен формой в фигурных скобках. Если

$$-\alpha_s' + 2\lambda_s < 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

то $dV/dt < 0$. Условие (2.9) можно представить в виде

$$-\alpha_s'(t) \leqslant -2\lambda_s - \delta \qquad (\delta > 0) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

После интегрирования имеем

$$-\alpha_s(t) \leqslant -2\lambda_s t - \delta t + C_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

Здесь произвольные постоянные C_s можно положить равными нулю (аналогично § 1).

Теперь согласно (2.11) видно, что для (2.7) можно принимать

$$V = e^{-\delta t}(e^{-2\lambda_1 t} y_1^2 + \cdots + e^{-2\lambda_n t} y_n^2) \tag{2.12}$$

При этом будем иметь $V < V_0$ или (полагая для простоты $t_0 = 0$)

$$e^{-\delta t}(e^{-2\lambda_1 t} y_1^2 + \cdots + e^{-2\lambda_n t} y_n^2) < (y_{10}^2 + \cdots + y_{n0}^2) = A$$

Отсюда следует

$$|y_s| < A^{1/2} e^{(\lambda_s + \delta/2)t} = e^{1/2\delta t} A^{1/2} e^{\lambda_s t} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

Наконец, получим оценки решений системы (2.2):

$$|x_s| < e^{1/2\delta t} A^{1/2} [|b_{s1}| e^{\lambda_1 t} + \cdots + |b_{sn}| e^{\lambda_n t}] \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.14}$$

и условия устойчивости будут (2.15)

$$e^{1/2\delta t} A^{1/2} [|b_{s1}| e^{\lambda_1 t} + \cdots + |b_{sn}| e^{\lambda_n t}] \leqslant x_s^\circ \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

2. Уравнение (2.5) имеет m простых вещественных корней λ_j ($j = 1, \ldots, m$) и 2σ простых комплексных корней $\lambda_i \pm \mu_i\sqrt{-1}$ ($i = m+1, \ldots, n-\sigma$). В этом случае канонический вид системы (2.2) будет

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + \varepsilon Q_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.16}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i - \mu_i y_{\sigma+i} + \varepsilon Q_i$$
$$\frac{dy_{\sigma+i}}{dt} = \lambda_i y_{\sigma+i} + \mu_i y_i + \varepsilon Q_{\sigma+i} \qquad (i = m+1, \ldots, n-\sigma)$$

Рассмотрим функцию

$$V = e^{-\alpha_1(t)} y_1^2 + \cdots + e^{-\alpha_m(t)} y_m^2 + \sum_{i=m+1}^{n-\sigma} e^{-\alpha_i(t)}(y_i^2 + y_{\sigma+i}^2) \tag{2.17}$$

Производная dV/dt в силу (2.16) будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} e^{-\alpha_j(t)} (-\alpha_j' + 2\lambda_j)\, y_j^2 +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{n-\sigma} e^{-\alpha_i(t)} (-\alpha_i' + 2\lambda_i)(y_i^2 + y_{\sigma+i}^2) + \varepsilon \sum_{s=1}^{n} 2y_s Q_s \qquad (2.18)$$

Если выполняются условия

$$\begin{aligned} -\alpha_j'(t) + 2\lambda_j &< 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ -\alpha_i'(t) + 2\lambda_i &< 0 \qquad (i = m+1, \ldots, n-\sigma) \end{aligned} \qquad (2.19)$$

то $dV/dt < 0$ и, следовательно, $V < V_0$.

Как и в случае 1, функцию V можно представить в виде

$$V = e^{-\delta t} \left[\sum_{j=1}^{m} e^{-2\lambda_j t} y_j^2 + \sum_{i=m+1}^{n-\sigma} e^{-2\lambda_i t} (y_i^2 + y_{\sigma+i}^2)\right] \qquad (2.20)$$

Так как $V < V_0$, то (предполагая $t_0 = 0$) отсюда имеем

$$e^{-\delta t} \left[\sum_{j=1}^{m} e^{-2\lambda_j t} y_j^2 + \sum_{i=m+1}^{n-\sigma} e^{-2\lambda_i t} (y_i^2 + y_{\sigma+i}^2)\right] < \sum_{s=1}^{n} y_{s0}^2 = A \qquad (2.21)$$

Наконец, на основании (2.21) получим

$$|y_j| < e^{1/2\,\delta t} A^{1/2} e^{\lambda_j t} \qquad (j = 1, \ldots, m) \qquad (2.22)$$

$$|y_i| < e^{1/2\,\delta t} A^{1/2} e^{\lambda_i t}, \qquad |y_{\sigma+i}| < e^{1/2\,\delta t} A^{1/2} e^{\lambda_i (t)} \qquad (i = m+1, \ldots, n-\sigma)$$

и, следовательно, согласно (2.4)

$$|x_s| < e^{1/2\,\delta t} A^{1/2} [\,|b_{s1}|\, e^{\lambda_1 t} + \cdots + |b_{sm}|\, e^{\lambda_m t} +$$

$$+ |b_{sm+1}|\, e^{\lambda_{m+1} t} + \cdots + |b_{sn}|\, e^{\lambda_{n-\sigma} t}] \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (2.23)$$

Таким образом, условия устойчивости будут

$$e^{1/2\,\delta t} A^{1/2} [\,|b_{s1}|\, e^{\lambda_1 t} + \cdots + |b_{sm}|\, e^{\lambda_m t} +$$

$$+ |b_{sm+1}|\, e^{\lambda_{m+1} t} + \cdots + |b_{sn}|\, e^{\lambda_{n-\sigma} t}] \leqslant x_s^\circ \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad (2.24)$$

Исследование кратных корней проводится аналогично.

§ 3. Система с постоянно действующими возмущениями. В этом случае уравнения движения системы будут

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\, x_1 + \cdots + p_{sn}(t)\, x_n + R_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

Здесь функции R_s описывают постоянно действующие возмущения. В дальнейшем рассматриваются два случая:

$$|R_s| \leqslant R_s^\circ(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.2)$$

$$|R_s| \leqslant l_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.3)$$

где $R_s^\circ(t)$ — известные функции, l_s — постоянные.

Оценим решения системы (3.1). Как известно, общее решение системы (3.1) имеет вид:

$$x_s^* = x_s + u_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.4)$$

Здесь x_s — общее решение однородного уравнения (1.1), а u_s — частное решение системы (3.1). Оценка для x_s приведена в § 1, поэтому найдем оценку для u_s.

Пусть $x_1^{(l)}, \ldots, x_n^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, n)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, причем для $t = t_0$

$$x_s^{(l)}(t_0) = \begin{cases} 1 & (l = s) \\ 0 & (l \neq s) \end{cases} \tag{3.5}$$

По методу Лагранжа частное решение системы (3.1) будет

$$u_s = \sum_{i=1}^{n} x_s^{(i)}(t) \int_{\tau=t_0}^{t} \frac{1}{D(\tau)} \sum_{l=1}^{n} D_{li}(\tau) R_l(\tau)\, d\tau \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

Здесь $D = \det \|x_s^{(l)}\|$, а D_{li} — минор элемента $x_l^{(i)}$ со знаком. Можно переписать (3.6) в виде

$$u_s = \sum_{l=1}^{n} \int_{\tau=t_0}^{t} \frac{1}{D(\tau)} \sum_{i=1}^{n} x_s^{(i)}(t) D_{li}(\tau) R_l(\tau)\, d\tau \tag{3.7}$$

Введем обозначения $Z_s^{(l)}(t, \tau)$:

$$Z_s^{(l)}(t, \tau) = \frac{1}{D(\tau)} \sum_{i=1}^{n} x_s^{(i)}(t) D_{li}(\tau) \qquad (s, l = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

Нетрудно доказать, что функции $Z_s^{(l)}(t, \tau)$ составляют фундаментальную систему решений однородного уравнения.

В самом деле, из (3.8) видно, что $Z_s^{(l)}$ являются линейными комбинациями решений $x_s^{(l)}$ с коэффициентами $D_{li}(\tau) / D(\tau)$. Кроме того, из (3.8) при $t = \tau$ и при $t = t_0$ соответственно имеем

$$Z_s^{(l)}(\tau, \tau) = \begin{cases} 1 & (l = s) \\ 0 & (l \neq s) \end{cases} \qquad Z_s^{(l)}(t_0, t_0) = \begin{cases} 1 & (l = s) \\ 0 & (l \neq s) \end{cases} \tag{3.9}$$

Поэтому для $Z_s^{(l)}$ согласно (1.19) имеются оценки

$$|Z_s^{(l)}| \leqslant A^{1/2} [\,|b_{s1}(t)| + \cdots + |b_{sn}(t)|\,] \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \varphi_k(\xi)\, d\xi\Big) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

которые получаются при помощи неособого линейного преобразования

$$y_s^{(l)} = a_{s1}(t) Z_1^{(l)}(t, \tau) + \cdots + a_{sn}(t) Z_n^{(l)}(t, \tau) \qquad (l, s = 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

и обратного преобразования

$$Z_s^{(l)}(t, \tau) = b_{s1}(t) y_1^{(l)} + \cdots + b_{sn}(t) y_n^{(l)} \qquad (l, s = 1, \ldots, n) \tag{3.12}$$

Отсюда видно, что $A = y_{10}^{(l)2} + \cdots + y_{n0}^{(l)2}$, но согласно (3.9) и (3.11) $y_{s0}^{(l)}$ будут

$$y_{10}^{(l)} = a_{1l}(t_0), \ldots, y_{n0}^{(l)} = a_{nl}(t_0) \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{3.13}$$

Поэтому имеем

$$y_{10}^{(l)2} + \cdots + y_{n0}^{(l)2} = a_{1l}^2(t_0) + \cdots + a_{nl}^2(t_0) \leqslant A_{\max} \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{3.14}$$

где

$$A_{\max} = \max\Big\{\sum_{s=1}^{n} a_{s1}^2(t_0), \ldots, \sum_{s=1}^{n} a_{sn}^2(t_0)\Big\}$$

Следовательно, из (3.10) получим

$$|Z_s^{(l)}| \leqslant A_{\max}^{1/2}[|b_{s1}(t)| + \cdots + |b_{sn}(t)|]\exp -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\psi_k(\xi)\,d\xi = Z_s^*(t) \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.15}$$

Заметим, что в частном случае при

$$|y_{s0}^{(l)}| \leqslant |y_{s0}|, \quad \text{или} \quad |Z_{s0}^{(l)}| \leqslant |x_{s0}| \tag{3.16}$$

для оценок $|Z_s^{(l)}|$ будут справедливы неравенства (1.19).

Вернемся к (3.7). В силу (3.8) имеем

$$u_s = \sum_{l=1}^{n}\int_{\tau=t_0}^{t} Z_s^{(l)}(t,\tau)R_l(\tau)\,d\tau \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.17}$$

Согласно неравенству Гельдера имеем

$$|u_s| \leqslant \sum_{l=1}^{n}\left\{\int_{\tau=t_0}^{t}|Z_s^{(l)}(t,\tau)|^p\,d\tau\right\}^{1/p}\left\{\int_{\tau=t_0}^{t}|R_l(\tau)|^q\,d\tau\right\}^{1/q} \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.18}$$

Здесь

$$p > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

По (3.2) имеем

$$\int_{\tau=t_0}^{t}|R_l(\tau)|^q\,d\tau \leqslant \int_{\tau=t_0}^{t}(R_l^\circ(\tau))^q\,d\tau$$

Поэтому согласно (3.15) получим

$$|u_s| \leqslant Z_s^*(t)(t-t_0)^{\frac{1}{p}}\sum_{l=1}^{n}\left\{\int_{\tau=t_0}^{t}(R_l^\circ(\tau))^q\,d\tau\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.19}$$

В случае (2.3) имеем

$$|u_s| \leqslant Z_s^*(t)(t-t_0)\sum_{l=1}^{n} l_l \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.20}$$

Окончательные оценки общих решений системы (3.1) согласно (1.19), (3.15) и (3.19) получим в виде

$$|x_s^*| \leqslant [|b_{s1}(t)| + \cdots + |b_{sn}(t)|]\left\{A^{1/2} + A_{\max}^{1/2}(t-t_0)^{\frac{1}{p}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=1}^{n}\left[\int_{\tau=t_0}^{t}(R_l^\circ(\tau))^q\right]^{1/q}\right\}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\psi_k(\xi)\,d\xi\right) = x_s^{**} \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3.21}$$

Условия устойчивости будут

$$x_s^{**} \leqslant x_s^\circ \qquad (s=1,\ldots,n) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3.22}$$

В случае, когда коэффициенты медленно изменяются, т. е. имеет место (2.1), для оценок x_s мы применим результаты § 2 и получим соответствующие оценки для $|x_s^*|$.

§ 4. Нелинейная система. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

где $X_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ — голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся в своих разложениях относительно этих переменных с членов не ниже второго порядка, причем коэффициенты при степенях x_s представляют собой вещественные непрерывные ограниченные функции t.

Если корни характеристического уравнения первого приближения системы (4.1) совпадают с корнями характеристического уравнения в § 1, то при помощи преобразований (1.2) и (1.3) систему (4.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\frac{dy_j}{dt} = \varkappa_j y_j + Q_j + Y_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ &\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i - \mu_i y_{\sigma+i} + Q_i + Y_i \\ &\frac{dy_{\sigma+i}}{dt} = \lambda_i y_{\sigma+i} + \mu_i y_i + Q_{\sigma+i} + Y_{\sigma+i} \qquad (i = m+1, \ldots, n-\sigma) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $Y_s = a_{s1}X_1 + \cdots + a_{sn}X_n$ $(s = 1, \ldots, n)$, а Q_s — те же, что и в § 1. Если ограничить рассуждения областью

$$t \geqslant t_0, \qquad |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

где h достаточно мало, то получим те же оценки (1.19), поскольку в этом случае знак dV/dt не зависит от членов, содержащих Y_s. Если к тому же начальные возмущения (1.15) достаточно малы, то условия устойчивости (1.20) действительны и для системы (4.1).

§ 5. Примеры. 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon a \cos 2t\right)x_1 + (1 - \varepsilon a \sin 2t)\,x_2 \\ &\frac{dx_2}{dt} = (-1 - \varepsilon a \sin 2t)\,x_1 + \left(-\frac{1}{2} - \varepsilon a \cos 2t\right)x_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь a — некоторое положительное число, ε — параметр. Заданы

$$\begin{aligned} &|x_{10}| \leqslant x_{10}^\circ, \qquad |x_{20}| \leqslant x_{20}^\circ \qquad \text{при } t = t_0 \\ &|x_1| \leqslant x_1^\circ, \qquad |x_2| \leqslant x_2^\circ \qquad \text{при } t \text{ на } [t_0, T] \end{aligned}$$

где T — заданное малое число. Найдем условия устойчивости.

Пусть $t_0 = 0$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon a\right)x_1 + x_2 + \varepsilon a\,(1 - \cos 2t)\,x_1 - (\varepsilon a \sin 2t)\,x_2 \\ &\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \left(-\frac{1}{2} - \varepsilon a\right)x_2 - \varepsilon a \sin 2t\, x_1 + \varepsilon a\,(1 - \cos 2t)\,x_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Если T и ε очень малы, то исследование можно произвести аналогично тому, как и в § 2.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon a\right) - \varkappa & 1 \\ -1 & \left(-\frac{1}{2} - \varepsilon a\right) - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{5.3}$$

имеет корни (при $(\varepsilon a)^2 < 1$)

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}$$

В этом случае имеем преобразования:

$$y_1 = \varepsilon a x_1 + x_2, \qquad y_2 = \sqrt{1-(\varepsilon a)^2}\, x_1 \tag{5.4}$$

$$x_1 = \frac{y_2}{-\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}}, \qquad x_2 = y_1 + \frac{\varepsilon a}{-\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}}\, y_2 \tag{5.5}$$

При помощи преобразований (5.4) и (5.5) приведем систему (5.2) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{2}\, y_1 - \sqrt{1-(\varepsilon a)^2}\, y_2 + \varepsilon Q_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{1}{2}\, y_2 + \sqrt{1-(\varepsilon a)^2}\, y_1 + \varepsilon Q_2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Рассматриваем функцию $V = e^{-\alpha(t)}(y_1^2 + y_2^2)$. Согласно (2.22) и (2.24) имеем $-\alpha'(t) - 1 < 0$ и

$$e^{-\delta t} e^t (y_1^2 + y_2^2) < y_{10}^2 + y_{20}^2 \tag{5.7}$$

Здесь δt очень мало, поэтому можно считать $e^{-\delta t} \approx 1$. По (5.4) имеем

$$|y_{10}| \leqslant |\varepsilon a|\, x_{10}^\circ + x_{20}^\circ, \qquad |y_{20}| \leqslant |\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}|\, x_{10}^\circ$$

Отсюда и из (5.7) следует

$$e^t (y_1^2 + y_2^2) < (x_{10}^{\circ 2} + 2|\varepsilon a|\, x_{10}^\circ x_{20}^\circ + x_{20}^{\circ 2})$$

Последнее неравенство дает оценки:

$$\begin{aligned} |y_1| &< e^{-1/2\, t} (x_{10}^{\circ 2} + 2|\varepsilon a|\, x_{10}^\circ x_{20}^\circ + x_{20}^{\circ 2})^{1/2} \\ |y_2| &< e^{-1/2\, t} (x_{10}^{\circ 2} + 2|\varepsilon a|\, x_{10}^\circ x_{20}^\circ + x_{20}^{\circ 2})^{1/2} \end{aligned}$$

В силу (5.5) имеем

$$|x_1| < \frac{1}{|\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}|}\, e^{-1/2\, t} (x_{10}^{02} + 2|\varepsilon a|\, x_{10}^\circ x_{20}^\circ + x_{20}^{\circ 2})^{1/2} = x_1^*$$

$$|x_2| < \left(1 + \frac{\varepsilon a}{|\sqrt{1-(\varepsilon a)^2}|}\right) e^{-1/2\, t} (x_{10}^{02} + 2|\varepsilon a|\, x_{10}^\circ x_{20}^\circ + x_{20}^{\circ 2})^{1/2} = x_2^*$$

Условия устойчивости будут

$$x_1^* \leqslant x_1^\circ, \qquad x_2^* \leqslant x_2^\circ \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

Таким образом, например, если

$$x_{10}^\circ = 1, \qquad x_{20}^\circ = 1; \qquad x_1^\circ = 2, \qquad x_2^\circ = 2$$

то при $|\varepsilon a| \leqslant 1/2$ условия устойчивости будут выполняться.

2. Пример Б. В. Булгакова. Б. В. Булгаков предложенным им методом вычислил «накопление возмущений» системы с переменными коэффициентами на основе трех систем с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.6x_1 + 2.7x_2 + R_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -1.5x_1 - x_2 + R_2 \text{ на } [0,4] \tag{5.8}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3.3x_2 + R_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -1.9x_1 - 1.3x_2 + R_2 \text{ на } [4.7] \tag{5.9}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.9x_1 + 3.8x_2 + R_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -2.4x_1 - 1.1x_2 + R_2 \text{ на } [7.10] \tag{5.10}$$

$$(|R_1| \leqslant l_1 = \text{const}, \qquad |R_2| \leqslant l_2 = \text{const})$$

Здесь при $t_0 = 0$ имеем $x_{10} = 1$, $x_{20} = 0$.

Требуется оценить x_1 при $t = 10$.

Б. В. Булгаков получил результат

$$x_1 \leqslant 0.1362 + 3.8777 l_1 + 5.7620 l_2 \qquad (5.11)$$

Для простоты мы вместо систем (5.8), (5.9) и (5.10) рассмотрим на отрезке [0,10] одну систему:

$$dx_1 / dt = 0.8 x_1 + 3.21 x_2 + R_1, \qquad dx_2 / dt = -1.89 x_1 - 1.18 x_2 + R_2 \qquad (5.12)$$

Характеристическое уравнение системы (3.12) будет

$$\begin{vmatrix} 0.8 - \varkappa & 3.21 \\ -1.89 & -1.18 - \varkappa \end{vmatrix} = 0$$

оно имеет корни $\varkappa = -0.19 + i2.25$.

Прямое и обратное линейные преобразования соответственно будут

$$y_1 = \frac{0.99}{3.21} x_1 + x_2, \qquad y_2 = \frac{2.25}{3.20} x_1, \qquad x_1 = \frac{3.21}{2.25} y_2, \qquad x_2 = y_1 - \frac{0.99}{2.25} y_2$$

Оценки для $|y_1|$ и $|y_2|$ будут

$$|y_1| \leqslant e^{-0.19t} (y_{10}^2 + y_{20}^2)^{0.5} = e^{-0.19t} \cdot 0.766 \qquad |y_2| \leqslant e^{-0.19t} 0.766$$

При $t = 10$ имеем

$$|x_1| \leqslant \frac{3.21}{2.25} e^{-1.9} 0.766 = 0.162$$

Найдем оценку частного решения u_1 системы (5.12). Для фундаментальной системы решений имеем начальные значения

$$x_{10}^{(1)} = 1, \qquad x_{20}^{(1)} = 0, \qquad x_{10}^{(2)} = 0, \qquad x_{20}^{(2)} = 1$$

Отсюда и из равенства (3.14) получаем

$$(y_{10}^{(1)^2} + y_{20}^{(1)^2})^{1/2} = 0.766, \qquad (y_{10}^{(2)^2} + y_{20}^{(2)^2})^{1/2} = 1$$

Поэтому

$$|u_1| \leqslant \frac{3.21}{2.25} e^{-1.9} \cdot 1 \cdot 10 (l_1 + l_2) = 2.12 l_1 + 2.12 l_2$$

Наконец, получим

$$|x_1^*| \leqslant 0.162 + 2.12 l_1 + 2.12 l_2 \qquad (5.13)$$

(5.13) можно сравнить с (5.11).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. Г. Четаеву за руководство в ходе работы.

Поступила 12 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1955.
2. Лебедев А. А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
3. Лебедев А. А. К задаче об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
4. Карачаров К. А., Пилютик А. Г. Устойчивость неустановившегося движения на конечном отрезке времени. Часть 1. Отдел научно-технической информации, 1958.
5. Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т. О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами. ПММ, т. XIV, вып. 1, 1950.
6. Моисеев Н. Д. О некоторых методах теории технической устойчивости. Тр. Военно-воздушной академии, вып. 135, 1945.
7. Чжан Сы-Ин. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XXIII, вып. 2, 1959.