Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В статье рассматриваются задачи оптимального (по быстродействию) регулирования систем с линейной основной частью, соответствующие некоторым основным типам ограничений на управляющие воздействия. Обсуждаются предельные переходы в решениях, которые соответствуют переходам от одного типа ограничений к другому. На основе этих предельных переходов описываются приближенные методы вычисления оптимальных траекторий и построения оптимальных систем.

§ 1. В этом параграфе даются формулировки основных задач оптимального регулирования, рассмотренных в статье.

Пусть поведение фазовых координат $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы регулирования описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\eta + e^1\xi^1 + \ldots + e^{n-1}\xi^{n-1} \tag{1.1}$$

где

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad b = \{b_1, \ldots, b_n\}, \qquad e^\alpha = \{e_1{}^\alpha, \ldots, e_n{}^\alpha\} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1)$$

— n-мерные векторы, A — $n \times n$-матрица, коэффициенты которой a_{ij} — постоянные числа, η, ξ^α $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ — скалярные функции.

При заданных начальных условиях $x_0 = \{x_{10}, \ldots, x_{n0}\}$ требуется найти функции η_0, $\xi_0{}^\alpha$ (оптимальное управление) такие, чтобы точка $x(t) = x(x_0, t, \eta_0, \{\xi_0{}^\alpha\})$, движущаяся по траектории системы (1.1), где $\eta = \eta_0$, $\xi^\alpha = \xi_0{}^\alpha$, попадала в начало координат $x = 0$ за наименьшее время $t = T^\circ$ (T° — оптимальное время управления). Предполагается что функции (допустимые функции) $\eta(t)$, $\xi^\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ и коэффициенты системы (1.1) стеснены одним из следующих условий:

Задача I. Коэффициенты $e_\beta{}^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1;\ \beta = 1, \ldots, n)$, $\eta(t)$ — кусочно-гладкая функция, стесненная условием

$$|\eta(t)| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T^\circ \tag{1.2}$$

Задача II. Функции $\eta(t)$, $\xi^\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ непрерывны и удовлетворяют условию

$$\left(\eta^2(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi^\alpha(t)]^2\right) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T^\circ \tag{1.3}$$

Задача III. Функция $\eta(t) = d\zeta(t)$ — дифференциал Стильтьеса функции с ограниченным изменением $\zeta(t)$, стесненной ограничением

$$\int_0^{T^\circ} |d\zeta(t)| \leqslant 1 \tag{1.4}$$

коэффициенты $e_\beta{}^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1;\ \beta = 1, \ldots, n)$.

Задача IV. Коэффициенты $e_\beta^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$; $\beta = 1, \ldots, n$), $\eta(t)$ — непрерывная функция, стесненная условием

$$\left(\int_0^{T^\circ} |\eta(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant 1, \qquad 1 < p < \infty \tag{1.5}$$

Задачи I, II, IV — задачи оптимального регулирования с одной управляющей функцией η, причем условие (1.2) соответствует ограничению управляющего воздействия (силы, силы тока, напряжения и т. д.) в каждый момент t переходного процесса $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$, условие (1.4) — ограничение на импульсы управляющих величин [1], условию (1.5) при $p = 2$ соответствует ограничение энергии (средней мощности) управляющих воздействий; это условие интересно рассмотреть и при других значениях $p \in [1, \infty)$ с точки зрения предельных переходов к задачам I ($p \to \infty$) и III ($p \to 1$).

Задача II — это задача оптимального регулирования с n-управляющими воздействиями, стесненными условием (1.3) в каждый момент t переходного процесса $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$. Задача II при довольно общих условиях допускает гладкие решения $\eta_0(t)$, $\xi_0^\alpha(t)$ в отличие от задачи I, где, как правило, оптимальное управление $\eta_0(t)$ — разрывная функция. Представляет интерес изучить предельный переход от задачи II к задаче I при $e_\beta^\alpha \to 0$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$; $\beta = 1, \ldots, n$), так как после обоснования такого предельного перехода, аппроксимируя задачу I задачей II с малыми e_β^α, можно построить метод приближения к решению задачи I непрерывными оптимальными управлениями $\eta_0(t)$ задачи II.

Метод, примененный ниже для исследования задач I, II, IV, можно использовать и в случае нескольких управляющих воздействий $\eta^\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \ldots, r$), однако в этой статье в задачах I, II, IV мы ограничимся случаем одного управляющего воздействия $\eta(t)$.

Задачи оптимального по быстродействию регулирования рассматривались многими авторами (см., например, [1-4]). В этой работе мы ограничимся задачей, где основная часть системы (1.1) [при $\eta = 0$, $\xi^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$)] является линейной. Задачи I — IV и приводящиеся к ним аналогичные задачи можно рассматривать с единой точки зрения, намеченной в статье [5], если эти задачи привести к одной проблеме функционального анализа (L-проблема в абстрактном пространстве, статья IV [6]), рассматриваемой для каждой из задач I—IV в специально подобранном функциональном пространстве [2].

---

[1] К задаче типа задачи III приводится также встречающаяся в теории регулирования проблема построения оптимальных управляющих воздействий для системы, описываемой уравнением

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \tag{1.6}$$

где допустимые управления ξ^α ($\alpha = 1, \ldots, n$) стеснены условием

$$\int_0^{T^\circ} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} \xi^\alpha(t) \xi^\beta(t)\right) dt \leqslant 1 \tag{1.7}$$

$\left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta\right.$ — определенно положительная квадратичная форма $\left.\right)$.

[2] Класс функций, определенный в формулировках задач I — IV, не совпадает с классами функций, соответствующих подбираемым ниже функциональным пространствам, однако для дальнейшего изложения это несущественно, так как искомые ниже минимумы достигаются на функциях $\eta(t)$ и $\xi^\alpha(t)$ из классов, определенных в формулировках задач I — IV.

При изучении задач I — IV ограничимся случаем, когда корни $\lambda_i \, (i = 1, \ldots, n)$ характеристического уравнения

$$|A - \lambda E|_1^n = 0 \tag{1.8}$$

основной линейной системы

$$dx/dt = Ax \tag{1.9}$$

удовлетворяют условию [1]

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

а векторы

$$b,\ Ab, \ldots, A^{n-1}b \tag{1.11}$$

являются линейно независимыми, т. е.

$$l_1 b + l_2 Ab + \ldots + l_n A^{n-1} b \neq 0 \qquad \text{при } l_1^2 + \ldots + l_n^2 \neq 0 \tag{1.12}$$

Заметим в заключение постановки задачи, что для синтеза систем регулирования важно найти оптимальные управляющие величины η и $\xi^\alpha \, (\alpha = 1, \ldots, n-1)$ не только (и не столько) в функции от времени t, но и в функции от фазовых координат x_i системы. Эти функции координат будем обозначать также символами η и ξ^α [в подробной записи — в виде $\eta(x_1, \ldots, x_n)$, $\xi^\alpha(x_1, \ldots, x_n)$].

§ 2. В этом параграфе описывается сведение задач I — IV к L-проблеме (статья IV, [6]) в стандартных функциональных пространствах [2].

Пусть $F(t)$ — матрица фундаментальной системы решений для уравнений (1.9). Коэффициенты матрицы будем обозначать символами $\{F(t)\}_{ij}$, а коэффициенты обратной матрицы $F^{-1}(t)$ — символами $f_{ij}(t)$. Решения $x(x_0, t, \eta, \{\xi^\alpha\})$ неоднородной системы (1.1) следует вычислять по формуле Коши [7]

$$x(x_0, t, \eta, \{\xi^\alpha\}) = F(t)\, x_0 + \int_0^t F(t) F^{-1}(\tau) \left[b\eta(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{n} e^\alpha \xi^\alpha(\tau) \right] d\tau \tag{2.1}$$

По условиям задач I — IV при

$$t = T^\circ, \qquad \eta = \eta_0, \qquad \xi^\alpha = \xi_0^\alpha \tag{2.2}$$

должно выполняться равенство $x(x_0, T^\circ, \eta_0, \{\xi_0^\alpha\}) = 0$, т. е. после подстановки (2.2) в (2.1) и умножения этого равенства на $F^{-1}(T^\circ)$ получим равенство

$$-x_0 = \int_0^{T^\circ} F^{-1}(\tau) \left[b\eta(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} e^\alpha \xi^\alpha(\tau) \right] d\tau \tag{2.3}$$

Таким образом, оптимальным временем регулирования для каждой из задач I — IV будет наименьшее из чисел T°, удовлетворяющих условиям

$$-x_{i0} = \int_0^T \left\{ h_i(\tau)\, \eta(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} g_i^\alpha(\tau)\, \xi^\alpha(\tau) \right\} d\tau \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

---

[1] Условие (1.10) обеспечивает возможность оптимального управления в точку $x = 0$ при всех сколь угодно больших начальных условиях x_{i0}. При невыполнении этого условия рассуждения, приведенные в статье, сохраняют силу для некоторой (вообще говоря, конечной) области пространства $\{x_{i0}\}$.

[2] § 2 имеет целью дать описание задач, часть которых рассматривалась ранее, с единой точки зрения.

где функции $h_i(\tau)$ и $g_i^\alpha(\tau)$ определены формулами

$$h_i(\tau) = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(\tau)\, b_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

$$g_i^\alpha(\tau) = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(\tau)\, e_k^\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n-1) \tag{2.6}$$

а функции $\eta(t)$ и $\xi^\alpha(t)$ стеснены одним из условий (1.2) — (1.5), соответствующих задачам I — IV.

Если рассматривать функции $h_i(t)$ и $g_i^\alpha(t)\,(0 \leqslant t \leqslant T)$, как элементы следующих функциональных пространств[1] (L, C, L_q) [14] [(B I) — (B IV) соответственно для задач I — IV]:

1) пространство (B I), элементы h—функции $h(t)\,(0 \leqslant t \leqslant T)$ с нормой

$$\|h\| = \int_0^T |h(\tau)|\, d\tau \tag{2.7}$$

2) пространство (B II), элементы $\{h, g\}$—вектор-функции $h(t)$, $g^\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$ с нормой

$$\|\{h\ g\}\| = \int_0^T \left\{h^2(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [g^\alpha(\tau)]^2\right\}^{1/2} d\tau \tag{2.8}$$

3) пространство (B III), элементы h—функции $h(t)\,(0 \leqslant t \leqslant T)$ с нормой

$$\|h\| = \sup |h(t)| \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.9}$$

4) пространство (B IV), элементы h—функции $h(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ с нормой

$$\|h\| = \left(\int_0^T |h(\tau)|^q\, d\tau\right)^{1/q} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{2.10}$$

а функции $\eta(t)$ и $\xi^\alpha(t)$ рассматривать как элементы сопряженных пространств (M, C*, L_p):

1*) Пространство (B* I), элементы η—функции $\eta(t)$ с нормой

$$\|\eta\| = \sup |\eta(t)| \quad \text{при } t \in [0, T] \setminus E \tag{2.11}$$

2*) Пространство (B* II), элементы $\{\eta, \xi\}$ вектор-функции $\eta(t)$, $\xi^\alpha(t)\,(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ с нормой

$$\|\{\eta, \xi\}\| = \sup \left[\eta^2(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi^\alpha(t)]^2\right]^{1/2} \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.12}$$

3*) пространство (B* III), элементы η—«функции» $\eta = d\zeta$ с нормой

$$\|\eta(t)\| = \int_0^T |\eta(t)|\, dt \tag{2.13}$$

4*) пространство (B* IV), элементы η—функции $\eta(t)$ с нормой

$$\|\eta(t)\| = \left(\int_0^T |\eta(t)|^p\, dt\right) \tag{2.14}$$

то функции $\eta(t)$, $\xi^\alpha(t)$ будут определять линейные функционалы φ на

[1] См. сноску 2 на стр. 626.

элементах (В I) — (В IV), т. е.

$$\varphi[h] = \int_0^T h(\tau)\eta(\tau)\,d\tau \quad (\mathrm{I,\ IV}), \qquad \varphi[h] = \int_0^T h(\tau)\,d\zeta(\tau) \quad (\mathrm{III}) \tag{2.15}$$

в пространствах (В I), (В III), (В IV) и

$$\varphi[\{h, g\}] = \int_0^T \Big(h(\tau)\eta(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} g^\alpha(\tau)\xi^\alpha(\tau)\Big)\,d\tau \tag{2.16}$$

в пространстве (В II). Нормы функционалов φ определены соответственно формулами (2.11) — (2.14). Тогда каждая из задач I — IV сводится к проблеме: найти наименьшее число T и линейный функционал φ в соответствующем функциональном пространстве такие, что

$$\varphi[h_\beta] = -x_{\beta 0} \qquad \Big(h_\beta = \sum_{\gamma=1}^n f_{\beta\gamma}(\tau)\,b_\gamma,\ \beta = 1, \ldots, n\Big) \tag{2.17}$$

$$\|\varphi\| \leqslant 1 \tag{2.18}$$

для задач I, III, IV и

$$\varphi[\{h_\beta, g_\beta\}] = -x_{\beta 0} \qquad (\beta = 1, \ldots, n) \tag{2.19}$$

$$h_\beta = \sum_{\gamma=1}^n f_{\beta\gamma}(\tau)\,b_\gamma, \qquad g_\beta{}^\alpha = \sum_{\gamma=1}^n f_{\beta\gamma}(\tau)\,e_\gamma{}^\alpha \tag{2.20}$$

для задачи II.

Задачи (2.17), (2.18) [или (2.18) — (2.20)] имеют решение при данном T тогда и только тогда, когда [6]

$$\min\|(l\cdot h)\| = \lambda(T) \geqslant 1, \qquad (x_0\cdot l) = -1 \tag{2.21}$$

или соответственно

$$\min\|(l\cdot\{h, g\})\| = \lambda(T) \geqslant 1, \qquad (x_0\cdot l) = -1 \tag{2.22}$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$(l\cdot h) = \sum_{\beta=1}^n l_\beta h_\beta(\tau), \quad (l\cdot x_0) = \sum_{\beta=1}^n l_\beta x_{\beta 0} \tag{2.23}$$

$(l\cdot\{h, g\})$ — вектор-функция, элемент пространства (В II) с компонентами

$$\sum_{\beta=1}^n l_\beta h_\beta(\tau), \quad \sum_{\beta=1}^n l_\beta g_\beta{}^1(\tau), \ldots, \quad \sum_{\beta=1}^n l_\beta g_\beta{}^{n-1}(\tau) \tag{2.24}$$

При наших ограничениях величина $\lambda(T)$ есть монотонно возрастающая функция аргумента T, удовлетворяющая условию [1]

$$\lim_{T\to\infty} \lambda(T) = \infty \tag{2.25}$$

$$\lim_{T\to 0} \lambda(T) = 0 \ (\mathrm{I,\ II,\ IV}) \tag{2.26}$$

Следовательно, при каждом $x = x_0$ задача имеет решение, для которого оптимальное время управления T° вычисляется из уравнения

$$\min\|(l\cdot h)\| = \lambda(T) = 1, \qquad (x_0\cdot l) = -1 \tag{2.27}$$

---

[1] При условиях (1.12) равенство

$$\|(l\cdot h)\| = 0 \ \text{при} \ \Sigma l_\beta{}^2 \neq 0$$

возможно лишь при отдельных изолированных значениях $t \in [0, T]$ (см. [8,9]), а (2.25) есть очевидное следствие (1.10).

или соответственно

$$\min \|(l\cdot\{h, g\})\| = \lambda(T) = 1, \qquad (x_0\cdot l) = -1 \tag{2.28}$$

Согласно результатам из книги [6] функционал φ (или, что то же самое, оптимальные управляющие функции $\eta(t)$ (или $\eta(t)$, $\xi^\alpha(t)$)) определяется из того условия, что элемент

$$h = \sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ h_\beta(t)$$

или

$$(l^\circ\cdot\{h, g\}) = \left\{\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ h_\beta(t), \ \sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta{}^1(t), \ldots, \sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta{}^{n-1}(t)\right\}$$

где $l^\circ = \{l_\beta{}^\circ\}$ — решение задач (2.21), (2.22), является для соответствующего функционала экстремальным, т. е. таким, что выполняется равенство

$$\|\varphi\|\|(l^\circ\cdot h)\| = |\varphi[(l^\circ\cdot h)]|$$

или соответственно

$$\|\varphi\|\|(l^\circ\{h, g\})\| = |\varphi[(l^\circ\cdot\{h, g\})]|$$

Из этих общих результатов для задач I — IV получаем следующие выводы.

1. Оптимальное управление для задачи I имеет вид:

$$\eta_0(t) = \operatorname{sign}\Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ h_\beta(t)\Big) \tag{2.29}$$

где числа $l_\beta{}^\circ$ $(\beta = 1, \ldots, n)$ — решения задачи

$$\min \int_0^{T^\circ} \Big|\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta h_\beta(\tau)\Big| d\tau = 1, \qquad \sum_{\beta=1}^{n} l_\beta x_\beta = -1 \tag{2.30}$$

2. Оптимальное управление для задачи II имеет вид:

$$\eta_0(t) = \frac{\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ h_\beta(t)}{\left[\Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ h_\beta(t)\Big)^2 + \Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta{}^1(t)\Big)^2 + \ldots + \Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta{}^{n-1}(t)\Big)^2\right]^{1/2}}$$

$$\xi_0{}^\alpha(t) = \frac{\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta^\alpha(t)}{\left[\Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ h_\beta(t)\Big)^2 + \Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta{}^1(t)\Big)^2 + \ldots + \Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta{}^\circ g_\beta{}^{n-1}(t)\Big)^2\right]^{1/2}} \tag{2.31}$$

$$(\alpha = 1, \ldots, n-1)$$

где числа $l_\beta{}^\circ$ $(\beta = 1, \ldots, n)$ являются решениями задачи (2.32)

$$\min \int_0^{T^\circ} \left[\Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta h_\beta(\tau)\Big)^2 + \Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta g_\beta{}^1(\tau)\Big)^2 + \ldots + \Big(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta g_\beta{}^{n-1}(t)\Big)^2\right]^{1/2} d\tau = 1$$

$$\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta x_{\beta 0} = -1$$

3. Оптимальное управление для задачи III имеет вид:

$$\eta_0(t) = \sum_{\gamma=1}^{r} \mu_\gamma \delta(t - t_\gamma), \qquad \sum_{\gamma=1}^{n} |\mu_\gamma| = 1 \tag{2.33}$$

где символ $\delta(t)$ обозначает импульсную δ-функцию, t_γ — моменты времени, в которые функция $|\Sigma l_\beta^\circ h_\beta(t)|$ достигает наибольшего значения на отрезке $[0, T^\circ]$, числа l_β° — решения задачи (2.34)

$$\min\left(\max\left|\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta h_\beta(t)\right| \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T^\circ\right) = 1 \qquad \left(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta x_{\beta 0} = -1\right)$$

4. Оптимальное управление для задачи IV имеет вид:

$$\eta_0(t) = \operatorname{sign}\left(\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta h_\beta(t)\right)\left|\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta h_\beta(\tau)\right|^{q-1} \tag{2.35}$$

где числа l_β^0 — решения задачи

$$\min \int_0^{T^\circ} \left|\sum_{\beta=1}^{n} l_\beta h_\beta(\tau)\right|^q d\tau = 1 \qquad \left(\sum_{\beta=1}^{n} x_{\beta 0} l_\beta = -1\right) \tag{2.36}$$

§ 3. Рассмотрение задач I — IV с общей точки зрения, описанной в § 2, позволяет изучить предельные переходы в решениях этих задач при переходе от одного типа задач к другому. Наиболее распространенной является задача I, поэтому интересно изучить предельные переходы к этой задаче, имеющей разрывные решения, от других «гладких» задач. В этой статье мы изучим подробно задачу II и предельный переход от задачи II к задаче I. Этот переход представляет, в частности, интерес по той причине, что решение задачи II можно свести к решению некоторого обыкновенного дифференциального уравнения, а также по той причине, что задача II допускает гладкую функцию Ляпунова, как это будет показано ниже.

Будем предполагать, что матрица коэффициентов

$$\begin{Vmatrix} b_1 & e_1^1 & \dots & e_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & e_n^1 & \dots & e_n^{n-1} \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

является неособой.

В этом параграфе мы установим, что оптимальное время управления T° для задачи II является непрерывно дифференцируемой функцией координат x_{i0} начальной точки x_0.

Рассмотрим здесь систему уравнений несколько более общего вида, чем (1.1), а именно—уравнения

$$dx/dt = \vartheta A x + b\eta + e^1\xi^1 + \dots + e^{n-1}\xi^{n-1} \tag{3.2}$$

где ϑ — некоторый параметр, принимающий неотрицательные значения. Оптимальное время управления T° и оптимальные управления η_0, ξ_0^α для задач I — II в силу системы (3.2) будем обозначать символами

$$T_{\mathrm{I}}^\circ(x_1, \dots, x_n, \vartheta), \quad T_{\mathrm{II}}^\circ(x_1, \dots, x_n, \vartheta), \quad \eta_{0\mathrm{I}}(x_1, \dots, x_n, \vartheta)$$
$$\eta_{0\mathrm{II}}(x_1, \dots, x_n, \vartheta), \quad \xi_0^\alpha(x_1, \dots, x_n, \vartheta)$$

(или, короче, $T_{\mathrm{I}}^\circ(x, \vartheta)$, $T_{\mathrm{II}}^\circ(x, \vartheta)$ и т. д.), индексы I и II там, где это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Теорема 3.1. Пусть матрица коэффициентов (3.1) является неособой, т. е. определитель

$$\begin{vmatrix} b_1 & e_1^1 & \ldots & e_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & e_n^1 & \ldots & e_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.3}$$

и выполняется условие (1.10). Тогда оптимальное время управления T° для задачи II — функция $T^\circ(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$ координат x_β начальной точки и параметра ϑ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам при всех $x \neq 0$, $\vartheta \geqslant 0$.

Доказательство. В соответствии с результатами § 2 оптимальное время управления $T^\circ(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$ задачи II для системы (3.2) определяется из уравнения

$$\min \int_0^T \left[\left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta \sum_{\gamma=1}^n f_{\beta\gamma}(t, \vartheta) b_\gamma \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta \sum_{\gamma=1}^n f_{\beta\gamma}(t, \vartheta) e_\gamma^\alpha \right)^2 \right]^{1/2} dt = 1$$

$$\text{при} \sum_{\beta=1}^n l_\beta x_\beta = -1 \tag{3.4}$$

где символами $f_{\beta\gamma}(t, \vartheta)$ обозначены элементы матрицы $F^{-1}(t, \vartheta)$, обратной к фундаментальной матрице $F(t, \vartheta)$ решений системы

$$dx / dt = \vartheta A x \tag{3.5}$$

Обозначим левую часть равенства (3.4) символом $\lambda(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta)$. Заметим прежде всего, что при фиксированных значениях $x_1, \ldots, x_n, \vartheta$ вследствие неособенности матриц $F^{-1}(t, \vartheta)$ и (3.1) величина λ является монотонно возрастающей функцией T. Существование и единственность решения уравнения (3.4) были установлены выше в § 2, исходя из общих результатов, относящихся к L-проблеме, поэтому здесь следует доказать лишь дифференцируемость функции T°. Для этого в силу известных теорем о неявных функциях достаточно проверить, что функция $\lambda(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков по $x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta$, причем выполняется условие

$$\partial\lambda / \partial T \neq 0 \tag{3.6}$$

Покажем сначала, что величины l_β°, которые дают минимум интегралу (3.4), являются непрерывно дифференцируемыми произвольное число раз функциями $x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta$.

Тот факт, что минимум (3.4) при каждом фиксированном T действительно достигается при некоторых значениях $l_\beta = l_\beta^\circ$, т. е. факт существования чисел l_β°, решающих задачу, доказан в общем случае L-проблемы в книге [6].

Так как при $\Sigma l_\beta^2 \neq 0$ подкоренное выражение в (3.4) не может обращаться в нуль, то при $\Sigma x_\beta^2 \neq 0$ min в (3.4) можно искать по известным правилам вариационного исчисления.

Пусть для определенности $x_1 \neq 0$. Тогда, выражая l_1 из условия $l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n = -1$ через остальные числа l_i и подставляя это значение в (3.4), будем иметь

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta) = \min_{l_2, \ldots, l_n} \gamma(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta, l_2, \ldots, l_n) \tag{3.7}$$

где величина γ известным образом выражается через $x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta, l_2, \ldots, l_n$ после подстановки

$$l_1 = \frac{1}{x_1}(-1 - l_2 x_2 - \ldots - l_n x_n) \tag{3.8}$$

в правую часть (3.4). Вследствие громоздкости этого выражения выписывать его здесь не будем.

Числа $l_\beta{}^\circ$ определяются из уравнений

$$\partial\gamma / \partial l_\beta = 0 \qquad (\beta = 2, \ldots, n) \tag{3.9}$$

и уравнения (3.8); эти числа будут являться непрерывно дифференцируемыми функциями x_β, ϑ, T, если не равен нулю соответствующий функциональный определитель, т. е.

$$\left| \frac{\partial^2\gamma}{\partial l_\beta \, \partial l_\alpha} \right|_2^n \neq 0 \tag{3.10}$$

так как интеграл, определяющий величину γ, можно дифференцировать по всем параметрам x_β, T, ϑ, $l_2, \ldots, l_n$ произвольное число раз (существование производных элементов $f_{\alpha\beta}(t, \vartheta)$ [по параметру ϑ следует из известных теорем о дифференцировании решений системы (3.5) по параметру ϑ [11]).

Для доказательства неравенства (3.10) достаточно заметить, что квадратичная форма

$$w(z_2, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha, \beta = 2}^{n} \frac{\partial^2\gamma}{\partial l_\alpha \, \partial l_\beta} z_\alpha z_\beta \tag{3.11}$$

является определенно положительной. На проверке этого последнего обстоятельства, ясного из геометрических соображений, но аналитическое доказательство которого требует громоздких записей, здесь останавливаться не будем. Итак, можно считать установленным, что величины $l_\beta{}^\circ$ суть функции аргументов x_β, T, ϑ, имеющие непрерывные производные всех порядков.

Теперь мы заключаем, что функция $\lambda(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, так как вследствие дифференцируемости чисел $l_\beta{}^\circ$, интеграл, определяющий λ, можно дифференцировать по всем параметрам произвольное число раз.

Покажем, что выполняется неравенство (3.6). Пусть $T = T_0$ — некоторое фиксированное значение T и $l_\beta{}^\circ(T_0)$ $(\beta = 2, \ldots, n)$ — соответствующие этому значению T решения задачи (3.7). Очевидно, при $\Delta T > 0$ имеем

$$\lambda(T_0 - \Delta T) = \min_{l_2, \ldots, l_n} \gamma(x_1, \ldots, x_n, T_0 - \Delta T, \vartheta, l_2, \ldots, l_n) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(x_1, \ldots, x_n, T_0 - \Delta T, \vartheta, l_2{}^\circ(T_0), \ldots, l_n{}^\circ(T_0))$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_{T_0} \geqslant \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\gamma(x_\beta, T_0, \vartheta, l_\alpha{}^\circ(T_0)) - \gamma(x_\beta, T_0 - \Delta T, \vartheta\, l_\alpha^\circ(T_0))}{\Delta T} > 0$$

что и доказывает неравенство (3.6). Теорема доказана.

Примечание. Рассуждения сохраняют силу и в случае, когда e_β^α — функции ϑ.

§ 4. В этом параграфе показывается, что для задачи II оптимальные управляющие величины $\eta_0(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$, $\xi_0^\alpha(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ для системы (3.2) являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, приведем некоторые соображения о приложении метода функций Ляпунова к рассматриваемой задаче.

Рассмотрим снова задачу I или II для системы (1.1).

Предположим, что функция $T^\circ(x_1, \ldots, x_n)$ — оптимальное время управления — известна и является непрерывно дифференцируемой функцией в окрестности точки $x_1, \ldots, x_n$. Тогда, очевидно, если вместо $x_1, \ldots, x_n$ подставить решения $x_\beta(x_0, t, \eta_0, \{\xi_0^\alpha\})$ $(\beta = 1, \ldots, n)$, то для полной производной функции T° по времени t вдоль оптимальной траектории должно выполняться равенство

$$dT^\circ / dt = -1 \tag{4.1}$$

или в подробной записи

$$\frac{dT^\circ}{dt} = \sum_{\mu,\,\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta}\Big(a_{\beta\mu} x_\mu + b_\beta \eta_0(x) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} e_\beta{}^\alpha \xi_0{}^\alpha(x)\Big) = -1$$

причем оптимальные управляющие функции $\eta_0(x)$, $\xi_0^\alpha(x)$ обладают тем свойством, что на множестве допустимых функций величина

$$\sum_{\mu,\,\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta}\Big(a_{\beta\mu} x_\mu + b_\beta \eta(x) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} e_\beta{}^\alpha \xi^\alpha(x)\Big)$$

достигает минимума[1] именно на этих оптимальных управляющих функциях η_0, ξ_0^α. Таким образом, величина $T^\circ(x)$ играет здесь роль функции Ляпунова. Поясним это подробнее. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\eta_0(x) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} e^\alpha \xi_0{}^\alpha(x) \tag{4.2}$$

—оптимальная система, получающаяся из системы (1.1) при $\eta = \eta_0(x)$, $\xi^\alpha = \xi_0{}^\alpha(x)$. Начало координат $x = 0$ будет асимптотически устойчивым решением системы (4.2) относительно любых начальных возмущений x_0 (с той особенностью, что $x(x_0, t, \eta^0, \{\xi_0{}^\alpha\}) \to 0$ при $t \to T^\circ(x_0)$, а не при $t \to \infty$, как обычно в задачах устойчивости, но это здесь несущественно). Функция $v(x) = T^\circ(x)$ удовлетворяет в силу системы (4.2) всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [12]. Таким образом, с этой точки зрения для решения задачи оптимального регулирования достаточно найти функцию $v(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, и такую, что на допустимых управляющих функциях $\eta(x)$, $\xi^\alpha(x)$ выполняется в силу системы (1.1) условие

$$\min(dv / dt) = -1 \tag{4.3}$$

Функцию Ляпунова $v(x)$, которая удовлетворяет этим условиям, будем называть оптимальной функцией Ляпунова. Из теоремы 3.1 следует,

---

[1] Это рассуждение в рассматриваемом здесь случае соответствует общему методу исследования задач оптимального управления, который разрабатывается Ю. М. Репиным на основе методов теории динамического программирования.

что для задачи II гладкая оптимальная функция Ляпунова существует. (Для задачи I такой всюду гладкой оптимальной функции Ляпунова $v(x)$ может не существовать.) Следует, однако, подчеркнуть, что эффективное определение такой функции $v(x)$ затруднительно.

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 4.1. Если выполняются условия (1.10) и (3.3), то оптимальные управляющие величины η_0, ξ_0^α для задачи II в силу системы (3.2) являются непрерывно дифференцируемыми произвольное число раз функциями своих аргументов $x_1, \ldots, x_n, \vartheta$ при всех $x \neq 0$, $\vartheta \geqslant 0$ [1].

Доказательство. Справедливость теоремы 4.1 можно установить, опираясь на формулы (2.31), (2.32) и на теорему 3.1 о дифференцируемости величины $T^\circ(x, \vartheta)$, так как, очевидно, для вычисления $\eta_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, $\xi_0^\alpha(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ следует в формулах (2.31) и (2.32) положить $t = 0$. Мы здесь укажем, однако, и другой способ доказательства теоремы 4.1, не опирающийся на формулы (2.31). Приведем это доказательство.

В соответствии с рассуждениями, приведенными выше в этом параграфе, оптимальные управляющие функции $\eta_0(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$, $\xi_0^\alpha(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$ можно также определить из условия

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^\circ = \sum_{\mu,\,\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta}\left(\vartheta\alpha_{\beta\mu}x_\mu + b_\beta\,\eta_0(x, \vartheta) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} e_\beta{}^\alpha\,\xi_0^\alpha(x, \vartheta)\right) =$$

$$= \min \sum_{\mu,\,\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta}\left(\vartheta a_{\beta\mu}x_\mu + b_\beta\,\eta(x, \vartheta) + \sum_{\alpha=1}^{n} e_\beta{}^\alpha\,\xi^\alpha(x, \vartheta)\right) \qquad (4.4)$$

при

$$\eta^2(x, \vartheta) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi^\alpha(x, \vartheta)]^2 \leqslant 1 \qquad (4.5)$$

Но решения задачи (4.4), (4.5), очевидно, имеют вид:

$$\eta_0(x, \vartheta) = -\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta} b_\beta \left[\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial x_\beta} b_\beta\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta} e_\beta{}^\alpha\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (4.6)$$

$$\xi_0^\alpha(x, \vartheta) = -\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta} e_\beta{}^\alpha \left[\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta} b_\beta\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial T^\circ}{\partial x_\beta} e_\beta{}^\alpha\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (4.7)$$

Матрица (3.1) является неособой и вектор-градиент $\{\partial T^\circ / \partial x_\beta\}$ функции Ляпунова $v(x) = T^\circ(x, \vartheta)$ не равен нулю, поэтому из формул (4.6), (4.7) вследствие дифференцируемости функции $T^\circ(x, \vartheta)$ (теорема 3.1) заключаем о непрерывной дифференцируемости оптимальных управляющих функций $\eta_0(x, \vartheta)$ и $\xi_0^\alpha(x, \vartheta)$ по всем их аргументам произвольное число раз. Теорема доказана.

Примечание. Уравнение (3.4) и равенства (4.6), (4.7) позволяют решить задачу оптимального регулирования путем сведения ее к обычным вариационным задачам. Однако возникающие здесь вычислительные трудности весьма велики, и это затрудняет эффективное определение оптимальной функции Ляпунова $v = T^\circ(x_1, \ldots, x_n)$, а следовательно, и функций $\eta_0(x)$, $\xi_0^\alpha(x)$.

[1] См. примечание в конце § 3.

Для приближенного построения оптимальной системы для задачи II можно воспользоваться следующим приемом. Пусть $v_0(x)$ — определенно положительная функция Ляпунова для системы (1.9), имеющая знакоотрицательную производную в силу этой системы. Если выполняются условия (1.10), то такая функция $v_0(x)$ существует и может быть выбрана в виде определенно положительной квадратичной формы.

Вычислим производную dv_0/dt в силу системы (1.1) и выберем функции $\eta_1(x)$, $\xi_1^\alpha(x)$ из условия

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta}\left(b_\beta \eta_1(x) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} e_\beta^\alpha \xi_1^\alpha(x)\right) = \min \tag{4.8}$$

$$\eta_1^2(x) + \sum_{\alpha=1}^{n} [\xi_1^\alpha(x)]^2 = 1 \tag{4.9}$$

т. е.

$$\eta_1(x) = -\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} b_\beta \left[\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} b_\beta\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} e_\beta^\alpha\right)^2\right]^{-1/2} \tag{4.10}$$

$$\xi_1^\alpha(x) = -\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} b_\beta \left[\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} b_\beta\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} e_\beta^\alpha\right)^2\right]^{-1/2} \tag{4.11}$$

После подстановки $\eta = \eta_1$, $\xi^\alpha = \xi_1^\alpha$ (4.10), (4.11) в уравнения (1.1) получим асимптотически устойчивую в целом систему. Для этой системы существует функция Ляпунова $v_1(x)$, удовлетворяющая условию

$$dv_1(x)/dt = -1 \tag{4.12}$$

Существование функции $v_1(x)$ может быть доказано приемами обращения теорем Ляпунова [13]. (Тот факт, что здесь $x(t) \to 0$ при $t \to T^\circ$, а не при $t \to \infty$, не играет решающей роли в рассматриваемой здесь задаче о существовании $v_1(x)$.) Теоремы существования функций Ляпунова не дают эффективных приемов построения этих функций; предположим, однако, что нам удалось построить гладкую функцию, производная которой в силу системы (1.1) удовлетворяет условию

$$dv_1/dt \approx -1 \tag{4.13}$$

Вычислим снова производную функцию $v_1(x)$ в силу системы (1.1), где $\eta = \eta_2$, $\xi^\alpha = \xi_2^\alpha$, и определим эти функции η_2, ξ_2^α из условия

$$dv_1/dt = \min \tag{4.14}$$

при

$$\eta_2^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi_2^\alpha]^2 = 1 \tag{4.15}$$

и т. д. Если бы на каждом k-м шаге удавалось построить эффективно гладкую функцию Ляпунова $v_k(x)$, которая хорошо аппроксимировала бы условие

$$dv_k/dt = -1 \tag{4.16}$$

в силу системы уравнений, построенной на предыдущем шаге, то после нескольких шагов получилась бы система уравнений, обладающая хорошими свойствами оптимальности.

К сожалению, сейчас нельзя указать такого общего эффективного приема построения гладкой функции $v_k(x)$, удовлетворяющей в силу известной системы уравнений условию (4.16) (или хорошо аппроксимирующей это условие). Одним из приемов такой аппроксимации может явиться отыскание функции $v_k(x)$ в виде разложения по некоторым функциям (например, тригонометрическим многочленам) с аппроксимацией условия (4.16) в среднем. Однако и этот прием приводит к громоздким вычислениям.

§ 5. В этом параграфе изучается предельный переход решений задачи II к решениям задачи I при $e_\beta^\alpha \to 0$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$; $\beta = 1, \ldots, n$).

Теорема 5.1. Если выполняются условия (1.10), (1.12) и (3.3), то при всех x оптимальное время управления $T_{II}^\circ(x_1, \ldots, x_n)$ задачи II сходится к оптимальному времени управления $T_I^\circ(x_1, \ldots, x_n)$ задачи I при $e_\beta^\alpha \to 0$, т. е.

$$\lim T_{II}^\circ(x_1, \ldots, x_n) = T_I^\circ(x_1, \ldots, x_n), \qquad \sum_{\alpha,\beta} [e_\beta^\alpha]^2 \to 0 \tag{5.1}$$

Доказательство. Согласно результатам, приведенным в § 2, оптимальное время $T_I(x_1, \ldots, x_n)$ вычисляется из уравнения (2.30), а оптимальное время $T_{II}(x_1, \ldots, x_n)$ из уравнения (2.32).

Из этих уравнений следует

$$T_{II}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant T_I(x_1, \ldots, x_n) \tag{5.2}$$

С другой стороны, очевидно, что при $t = T^* = T_I^\circ - \Delta T$ (где $\Delta T > 0$) имеем

$$\min \int_0^{T^*} \left| \sum_{\beta=1}^n l_\beta h_\beta(\tau) \right| d\tau < 1 \qquad \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta x_\beta = -1\right) \tag{5.3}$$

и

$$\lim \min \int_0^{T^*} \left[\left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta h_\beta(\tau)\right)^2 + \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta g_\beta^1(\tau)\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta g_\beta^{n-1}(\tau)\right)^2\right]^{1/2} d\tau =$$

$$= \min \int_0^{T^*} \left| \sum_{\beta=1}^n l_\beta h_\beta(\tau) \right| d\tau \quad \text{при } e_\beta^\alpha \to 0 \qquad \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta x_\beta = -1\right)$$

т. е. при достаточно малых значениях e_β^α имеем неравенство

$$\min \int_0^{T^*} \left[\left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta h_\beta(\tau)\right)^2 + \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta g_\beta^1(\tau)\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta g_\beta^{n-1}(\tau)\right)^2\right]^{1/2} d\tau < 1$$

$$\left(\sum_{\beta=1}^n l_\beta x_\beta = -1\right)$$

Из последнего неравенства и из неравенства (5.2) заключаем, что при достаточно малых значениях e_β^α выполняется неравенство

$$T_I^\circ - \Delta T \leqslant T_{II}^\circ \leqslant T_I^\circ$$

которое и доказывает теорему.

Примечание. Используя условие (5.1), можно было бы проверить, что при $e_\beta^\alpha \to 0$ имеет место не только сходимость оптимального времени $T_{II}^\circ \to T_I^\circ$, но и сходимость оптимальных управляющих функций $\eta_{0II} \to \eta_{0I}$ по мере.

Теорема 5.1 обосновывает следующий прием определения оптимального управления для задачи I: строим вспомогательную систему (1.1) с достаточно малыми числами e_β^α, решаем задачу II для этой системы и полагаем $\eta_{0I} = \eta_{0II}$. Как будет показано в следующем параграфе, такой прием оправдывается тем, что для задачи II может быть указан регулярный прием решения.

§ 6. В этом параграфе выводится дифференциальное уравнение, которое позволяет определить оптимальное управление $T^\circ(x_1, \ldots, x_n)$ и оптимальные управляющие функции для задачи II [1].

Рассмотрим снова наряду с системой (1.1) систему (3.2), переходящую в систему (1.1) при $\vartheta = 1$. Как показано в § 3, оптимальное время управления $T^\circ(x_1, \ldots, x_n, \vartheta)$ есть непрерывно дифференцируемая функция параметра ϑ. В обозначениях § 3 оптимальное время T° определяется из уравнения

$$\min_{l_2, \ldots, l_n} \gamma(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta, l_2, \ldots, l_n) = \gamma(x_1, \ldots, x_n, T, \vartheta, l_2^\circ, \ldots, l_n^\circ) = 1, \tag{6.1}$$

где числа $l_2^\circ(x, \vartheta), \ldots, l_n^\circ(x, \vartheta)$, определяющие минимум в равенстве (6.1), — также непрерывно дифференцируемые функции параметра ϑ. Воспользуемся этим обстоятельством для вывода системы дифференциальных уравнений, интегрирование которой позволяет определить величины $T^\circ(x, \vartheta)$, $l_\beta^\circ(x, \vartheta)$. В дальнейшем для краткости письма аргументы x_β, которые предполагаются фиксированными, будем опускать. Подставляя в равенство (6.1) решения $l_\beta^\circ(\vartheta)$, получим уравнение для определения неявной функции $T^\circ(\vartheta)$:

$$\gamma(T, \vartheta, l_2^\circ(\vartheta), \ldots, l_n^\circ(\vartheta)) = 1 \tag{6.2}$$

Согласно известной формуле для производной неявной функции $dT^\circ / d\vartheta$ можно записать равенство

$$\frac{dT^\circ}{d\vartheta} = -\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta} + \sum_{\beta=2}^{n} \frac{\partial\gamma}{\partial l_\beta^\circ} \frac{dl_\beta^\circ}{d\vartheta}\right) \Big/ \frac{\partial\gamma}{\partial T} \tag{6.3}$$

Величины l_β° определяют минимум величины γ, поэтому при $l = l_\beta^\circ$ выполняются равенства (3.9), т. е. $\partial\gamma / \partial l_\beta^\circ = 0$ $(\beta = 2, \ldots, n)$. Следовательно, функция $T^\circ(\vartheta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{d\vartheta} = -\frac{\partial\gamma / \partial\vartheta}{\partial\gamma / \partial T} \tag{6.4}$$

Подставляя $T = T^\circ(\vartheta)$ в равенство

$$\gamma(T, \vartheta, l_2^\circ, \ldots, l_n^\circ) = \min \gamma(T, \vartheta, l_2, \ldots, l_n) \tag{6.5}$$

получим $(n-1)$ уравнений для определения неявных функций l_β°:

$$\Delta_\beta = \frac{\partial\gamma(T^\circ(\vartheta), \vartheta, l_2^\circ, \ldots, l_n^\circ)}{\partial l_\beta^\circ} = 0 \quad (\beta = 2, \ldots, n) \tag{6.6}$$

и поэтому согласно известным формулам дифференцирования неявных функций [10] заключаем, что функции $l_\beta^\circ(\vartheta)$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dl_\beta^\circ(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{D(\Delta_2, \ldots, \Delta_n) / D(l_2^\circ, \ldots, \vartheta_\beta, \ldots, l_n^\circ)}{D(\Delta_2, \ldots, \Delta_n) / D(l_2^\circ, \ldots, l_n^\circ)} \quad (\beta = 2, \ldots, n) \tag{6.7}$$

При вычислении функциональных определителей $D(l_2^\circ, \ldots, \vartheta_\beta, \ldots, l_n^\circ)$ в числителе равенства (6.7) следует при вычислении производной Δ_α по ϑ учитывать, что в Δ_α величина $T^\circ(\vartheta)$ предполагается известной

[1] В этом параграфе в соответствии с примечанием из § 3 можно также предполагать, что e_β^α — функции ϑ, причем $e_\beta^\alpha \to 0$ при $\vartheta \to 1$.

функцией ϑ, т. е. с учетом равенства (6.4) в β-м столбце этих определителей следует писать величины

$$\frac{\partial\Delta_\alpha}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\Delta_\alpha}{\partial T^\circ}\frac{dT^\circ}{d\vartheta}=\frac{\partial\Delta_\alpha}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\Delta_\alpha}{\partial T^\circ}\frac{\partial\gamma/\partial\vartheta}{\partial\gamma/\partial T^\circ}\qquad(\alpha=2,\ldots,n)\tag{6.8}$$

Следовательно, функции $T^\circ(\vartheta)$ и $l_\beta{}^\circ(\vartheta)$ $(\beta=2,\ldots,n)$ при фиксированных начальных условиях x_β удовлетворяют системе (6.4), (6.7).

Система уравнений (6.4), (6.7) позволяет наметить следующий путь решения задачи II (а также задачи I при замене ее вспомогательной приближенной задачей II)[1] (см. сноску на стр. 638): определяем решения $T^\circ(0)$ и $l_\beta{}^\circ(0)$ $(\beta=2,\ldots,n)$ при $\vartheta=0$ и интегрируем систему уравнений (6.4), (6.7) при $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$, решения $T^\circ(1)$, $l_\beta{}^\circ(1)$ $(\beta=2,\ldots,n)$ определяют оптимальное время управления T° и оптимальные уравляющие функции η_0, $\xi_0{}^\alpha$ [по формулам (2.31)]. Решения $T^\circ(0)$ и $l_\beta{}^\circ(0)$ определяются весьма просто из условий (2.31) и (2.32), так как при $\vartheta=0$ фундаментальная матрица решений $F(t)$ системы (3.2) есть единичная матрица. Уравнения (6.4), (6.7) имеют сложные правые части и не интегрируются в элементарной форме, однако эти уравнения можно интегрировать одним из известных численных методов. Решение уравнений (6.4), (6.7) требует громоздких вычислений, однако этот путь решения позволяет обойти одну из главных трудностей решения задач оптимального регулирования, связанную с необходимостью решать краевые задачи.

Для получения величин T° и η_0, $\xi_0{}^\alpha$ в виде функций координат для целей синтеза системы можно аппроксимировать $T^\circ(x,\vartheta)$, $l_\beta{}^\circ(x,\vartheta)$ в интересующей области системой ортогональных функций, где коэффициенты разложения — функции параметра ϑ, и вывести из системы (6.4), (6.7) дифференциальные уравнения для этих коэффициентов.

Поступила 6 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Цянь Сюе-Сень. Техническая кибернетика. Изд-во иностр. лит., М., 225—253. 1956.
2. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, № 6, 1953.
3. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, т. 110, вып. 1, 1956.
4. Лернер А. Я. О предельном быстродействии систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, т. XV, № 6, 1954.
5. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 11, 1957.
6. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья IV, стр. 171. ГОНТИ — НТВУ, 1938.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
8. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, т. 116, вып. 1, 1957.
9. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1959.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Гостехиздат, 1946.
11. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1946.
12. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
13. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1952.
14. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, М.— Л., 1951.