

К ТЕОРИИ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Д. Д. Ивлев

(Москва)

Теории разрушения твердых тел посвящено большое количество работ, среди которых отметим некоторые [1—12]. Ниже приводятся некоторые соображения о построении теории разрушения твердых тел. Построение носит формальный характер и ограничивается рассмотрением простейших феноменологических свойств твердого тела. Работа является развитием идей А. А. Гвоздева [1].

Под разрушением твердого тела будем понимать его распадение на части при нагружении. Характер напряженного состояния должен обеспечить как статическую, так и кинематическую возможность разрушения. Изучение этих сторон разрушения составляет предмет его простейшей теории.

Следуя представлениям Л. Прандтля [2], рассмотрим жестко разрушающееся тело. Очевидно, определение понятия жестко разрушающегося тела является одним из самых упрощающих предположений, позволяющих освободиться от таких свойств, как упругость, вязкость, пластичность, ползучесть и т. п., проявляемых твердым телом при нагружении. Именно модель жестко разрушающегося тела позволяет выделить простейшие свойства разрушения в их «чистом» виде.

Если исключить влияние температуры, скорости нагружения, то разрушение жестко разрушающегося тела произойдет при достижении некоторой комбинации напряжений своего предельного значения

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c \quad (c = \text{const}) \quad (1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Следует отметить, что и при этих предположениях процесс разрушения может сопровождаться выделением или поглощением тепла, количество которого должно быть учтено в общем энергетическом балансе состояния, однако в простейшем случае будем предполагать, что всеми тепловыми эффектами можно пренебречь.

Выражение (1) назовем условием разрушения. Наибольшая возможная простота условия разрушения в значительной мере достигается предположениями об однородных свойствах тела, его изотропности в любой момент нагружения.

Первое предположение в простейшем случае предполагает независимость условия разрушения от параметров, характеризующих изменение свойств материала в исходном состоянии.

Второе предположение устанавливает совпадение свойств материала по любому направлению.

Условие разрушения интерпретируется в пространстве главных напряжений некоторой поверхностью, которую назовем поверхностью условия разрушения. Очевидные свойства поверхности разрушения состоят в следующем: она не проходит через начало координат, и любой луч, проведенный из начала координат пересекает ее не более одного раза.

Итак, при построении простейшей теории разрушения сделаны следующие предположения:

- 1) отсутствие проявления в теле свойств упругости, вязкости, пластичности, ползучести и т. п. (схема жестко разрушающегося тела);
- 2) отсутствие влияния на разрушение тепловых эффектов (идеальный характер разрушения);
- 3) однородность свойств тела;
- 4) изотропные свойства тела;
- 5) пренебрежимость влиянием скорости нагружения и т. п.

Очевидно, что смягчение любого из предположений 1—5 приводит к обобщениям рассматриваемой теории разрушения.

Выскажем предположения, которые явятся основой последующих рассуждений. Во-первых, предположим, что поверхность разрушения является невогнутой. Это предположение может быть рассмотрено, следуя Д. Драккеру [13] и Р. Хиллзу [14].

Второе предположение заключается в следующем: в определенном круге механических свойств из возможных условий разрушения истинным является то, которое соответствует минимальным усилиям разрушения. Усилие разрушения будем интерпретировать величиной длины вектора σ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), где компоненты $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ удовлетворяют уравнению (1).

Рассмотрим кривую, лежащую в пересечении поверхности условия разрушения с плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$ (фиг. 1).

Очевидно, что возможные невогнутые кривые при заданной величине отрезков $OA_1 = OA_2 = OA_3$ лежат между треугольниками $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. При заданной величине отрезков OA_i и OC_i ($i = 1, 2, 3$) шестиугольник $A_1C_1A_2C_2A_3C_3$ определит очевидно, кривую, соответствующую возможной поверхности разрушения, требующую минимальных усилий разрушения. Таким образом, искомой [поверхности] условия разрушения является некоторая невогнутая криволинейная пирамида.

Известно [15], что напряженное состояние, отвечающее ребру такой пирамиды, является статически определяемым, а уравнения, определяющие напряженное состояние, принадлежат, вообще говоря, к гиперболическому типу.

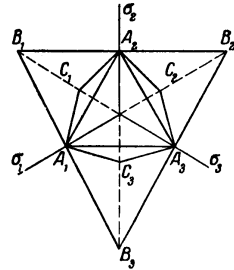
В этом можно убедиться следующим образом. Достаточно рассмотреть случай, когда

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = f(\sigma_1) \quad (2)$$

Используя соотношения

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \dots \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2, \dots$$



Фиг. 1

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ — компоненты напряжения, а l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) — направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию направлений осей декартовой системы координат и направлений главных напряжений, из (3) и (2) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 + [f(\sigma_1) - \sigma_1] n_1^2, & \tau_{xy} &= [f(\sigma_1) - \sigma_1] n_1 n_2 \\ \sigma_y &= \sigma_1 + [f(\sigma_1) - \sigma_1] n_2^2, & \tau_{yz} &= [f(\sigma_1) - \sigma_1] n_2 n_3 \\ \sigma_z &= \sigma_1 + [f(\sigma_1) - \sigma_1] n_3^2, & \tau_{zx} &= [f(\sigma_1) - \sigma_1] n_3 n_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Величину σ_1 можно выразить через $\sigma = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ из соотношения

$$2\sigma_1 + f(\sigma_1) = 3\sigma \quad (5)$$

Будем полагать $\sigma_1 = g(\sigma)$. Из (4) получим искомое условие разрушения:

$$\begin{aligned} [\sigma_x - g(\sigma)] [\sigma_y - g(\sigma)] - \tau_{xy}^2 &= 0 \\ [\sigma_y - g(\sigma)] [\sigma_z - g(\sigma)] - \tau_{yz}^2 &= 0 \\ [\sigma_z - g(\sigma)] [\sigma_x - g(\sigma)] - \tau_{zx}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения (4) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \dots \quad (7)$$

и принимая во внимание, что

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (8)$$

получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных, характеристический определитель которой равен

$$\Phi \left[\left(2 + \frac{d\Phi}{d\sigma_1} \right) \Phi^2 - (\text{grad } \psi)^2 \right] = 0 \quad (9)$$

$$\Phi = \frac{\partial \psi}{\partial x} n_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_3, \quad \Phi(\sigma_1) = f(\sigma_1) - \sigma_1$$

где $\psi(x, y, z)$ — уравнение характеристической поверхности системы.

Из условия (10) следует, что существуют два семейства характеристических поверхностей, одно из которых ортогонально к направлению третьего главного напряжения, а второе пересекает его под углом θ , причём

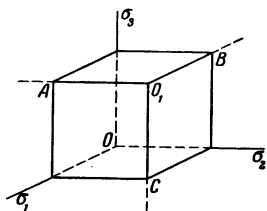
$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2 + d\varphi/d\sigma_1}} \quad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что

$$d\varphi/d\sigma_1 \geq -1 \quad (11)$$

Итак, если напряжённое состояние, предшествующее разрушению, соответствует ребру пирамиды, то граничные условия (они, естественно, формулируются в напряжениях) позволяют определить область, в каждой точке которой реализуется условие разрушения (1). Разрушение произойдет именно в этой области, которую назовем областью разрушения.

Рассмотрим некоторые частные случаи условия разрушения. Прежде всего предположим, что пирамида, интерпретирующая условие разрушения, пересекает ось



Фиг. 2

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$. В противном случае разрушение происходило бы при равномерном сжимающем усилии. Если предположить, что вершина пирамиды удаляется в бесконечность, то пирамида выродится в цилиндр, образующие которого параллельны прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. В простейшем случае, когда пределы разрушения [при растяжении и сжатии совпадают, условие разрушения представляет равенство максимального касательного [напряжения некоторой постоянной

$$|\sigma_i - \sigma_j| = c \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

Другой предельный случай будет иметь место при стремлении вершины [пирамиды к началу координат. Если величина предела разрушения при растяжении известна и равна постоянной d , то пирамида вырождается в плоскость

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = d \quad (13)$$

Один из наиболее интересных случаев представляет условие разрушения

$$\sigma_1 \leq d, \quad \sigma_2 \leq d, \quad \sigma_3 \leq d, \quad d = \text{const} \quad (14)$$

Условие (14) интерпретируется в пространстве главных напряжений трехгранной пирамидой, составленной из трех четвертей плоскости, сходящейся под прямыми углами (O_1ABC на фиг. 2). Предположим, что напряжённое состояние отвечает ребру пирамиды

$$\sigma_1 = \sigma_2 = d, \quad \sigma_3 < d \quad (15)$$

В этом случае из (3) и (15) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d + qn_1^2, & \tau_{xy} &= qn_1n_2 \\ \sigma_y &= d + qn_2^2, & \tau_{yz} &= qn_2n_3 \\ \sigma_z &= d + qn_3^2, & \tau_{zx} &= qn_3n_1 \end{aligned} \quad (16)$$

где $q = 3(\sigma - d)$.

Из (16) получим искомые условия разрушения:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - d)(\sigma_y - d) - \tau_{xy}^2 &= 0 \\ (\sigma_y - d)(\sigma_z - d) - \tau_{yz}^2 &= 0 \\ (\sigma_z - d)(\sigma_x - d) - \tau_{zx}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая $n_i = \cos \varphi_i$ и подставляя выражения (16) в уравнения равновесия (7), получим

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi_1 \frac{\partial q}{\partial x} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial q}{\partial y} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \frac{\partial q}{\partial z} - q \sin 2\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - q \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \\ - q \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - q \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - q \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Присоединяя к трем уравнениям (18) уравнение (8), найдем, что характеристический определитель системы равен

$$\Phi = 0 \quad (19)$$

Следовательно, характеристические поверхности ортогональны к направлениям третьего главного напряжения. Система уравнений является параболической. Очевидно, что рассмотренный случай является предельным случаем общего, когда $df/d\sigma_1 \rightarrow \infty$.

Перейдем к рассмотрению кинематической стороны процесса разрушения. Напомним, что тело и его части согласно принятым гипотезам остаются жесткими (недеформируемыми) во время всего процесса разрушения. Однако разрушение данного жестко разрушающегося тела при данном напряженном состоянии происходит вполне определенным образом.

Предположим, что в каждой точке области разрушения определены скорости разрушения. Поле скоростей разрушения позволяет определить поле скоростей деформации разрушения.

Поле скоростей деформации разрушения следует понимать в том смысле, что в момент, предшествующий разрушению, тело стремится деформироваться вполне определенным образом. Это стремление к деформированию и приводит к разрушению.

Истинное поле скоростей деформации должны характеризовать определенные экстремальные свойства состояния тела перед разрушением. Естественно поэтому рассматривать условие разрушения в качестве «разрушающего потенциала».

$$\epsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (20)$$

Именно определение (20) позволяет сформулировать теоремы, устанавливающие экстремальные свойства состояния перед разрушением [18—17].

Именно обобщение определения (20) позволяет установить предпочтительный характер выполнения напряженных состояний, соответствующих ребрам поверхности разрушения, как обеспечивающих наибольшую свободу разрушения [18—19].

Определим соотношения, определяющие поле скоростей деформации разрушения в случае (6). Следуя [18], получим

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & \frac{1}{3} \lambda_1 g' (\sigma_y + \sigma_z - 2g) + \lambda_2 \left[\frac{1}{3} g' (\sigma_z + \sigma_x - 2g) - \right. \\ & \left. - (\sigma_z - g) \right] + \lambda_3 \left[\frac{1}{3} g' (\sigma_x + \sigma_y - 2g) - (\sigma_y - g) \right], \dots \end{aligned} \quad (21)$$

$$[\epsilon_{xy} = \lambda_3 \tau_{xy}, \quad \epsilon_{yz} = \lambda_1 \tau_{yz}, \quad \epsilon_{zx} = \lambda_2 \tau_{zx} \quad (g' = dg/d\sigma)]$$

Из (21) найдем

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_{xy} \frac{1/3g' (\sigma_x + \sigma_y - 2g) - (\sigma_y - g)}{\tau_{xy}} - \epsilon_{yz} \frac{1/3g' (\sigma_y + \sigma_z - 2g)}{\tau_{yz}} - \\ - \epsilon_{zx} \frac{1/3g' (\sigma_z + \sigma_x - 2g) - (\sigma_z - g)}{\tau_{zx}} = 0, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

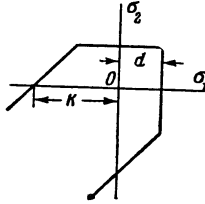
Три соотношения (22) являются уравнениями относительно трех неизвестных компонент скорости разрушения u , v , w . Характеристические многообразия уравнения (22) совпадают с характеристическими многообразиями, определяемыми уравнением (9).

Для случая (17) будем иметь

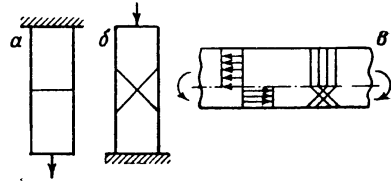
$$\begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_{xy} \frac{\sigma_y - d}{\tau_{xy}} + \epsilon_{xz} \frac{\sigma_z - d}{\tau_{xz}} = 0 \\ \epsilon_{xy} \frac{\sigma_x - d}{\tau_{xy}} + \epsilon_y + \epsilon_{yz} \frac{\sigma_z - d}{\tau_{yz}} = 0 \\ \epsilon_{xz} \frac{\sigma_x - d}{\tau_{xz}} + \epsilon_{yz} \frac{\sigma_y - d}{\tau_{yz}} + \epsilon_z = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Характеристические многообразия системы уравнений (23) определяются из уравнения (19).

В результате разрушения тело распадается на ряд жестких частей. Поэтому, строго говоря, возможно лишь то разрушение, при котором скорости разрушения обеспечивают перемещения частей тела относительно друг друга как жестких целых. Поэтому в жестко разрушающихся телах поверхность разрушения будет состоять из кусков характеристических поверхностей (вдоль характеристических поверхностей



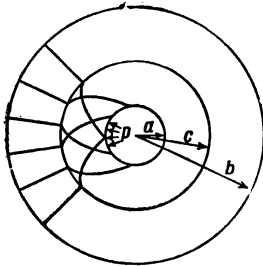
Фиг. 3



Фиг. 4

действие усилий разрушения и стремление к деформированию максимальны), соединенных так, что часть тела, образуемая при разрушении, получает возможность двигаться как твердое тело.

В реальных телах при нагружении проявляются такие свойства, как упругость, пластичность и т. п., поэтому части тела обладают большей свободой взаимных перемещений и разрушение сопровождается появлением трещин, распространяющихся вдоль характеристических поверхностей.



Фиг. 5

Если поверхность условия разрушения представляет собой рассмотренную выше шестигранную криволинейную пирамиду, то разрушение будем называть разрушением путем сдвига, а разрушение при условии (15) — путем отрыва. Очевидно, что при таком определении разрушение путем отрыва является частным случаем разрушения путем сдвига.

Обратимся к примерам. Рассмотрим случай плоского деформированного состояния. Условие разрушения запишем в виде

$$\sigma_1 \leq d, \quad \sigma_2 \leq d, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \leq k \quad (24)$$

На фиг. 3 показана ломаная, интерпретирующая условие разрушения. Отметим, что $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Условия (24) переищем в виде

$$(\sigma_x - d)(\sigma_y - d) - \tau_{xy}^2 = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = k^2 \quad (25)$$

Напряженное состояние при условиях (25) исследовано в теории идеально-пластического плоско-напряженного состояния [29].

В случае одноосного растяжения при $d < k$ будем иметь отрыв (фиг. 4, а), в случае одноосного сжатия — сдвиг (фиг. 4, б). В случае чистого изгиба при $d < k$ положение нейтральной линии определяется из условия минимальности разрушающего изгибающего момента M . Получим

$$M = \frac{1}{2} \left[k(H - h)^2 - h^2 d \right] \quad \left(h = \frac{kH}{k + d} \right) \quad (26)$$

где H — толщина бруса, h — величина расстояния от нейтральной линии до верхней стороны бруса (фиг. 4, в). В верхней части бруса разрушение произойдет в результате отрыва, в нижней — в результате сдвига.

Рассмотрим равновесие толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления p (фиг. 5). Обозначим через a и b соответственно внутренний и внешний радиусы трубы. Следует различать две зоны состояния трубы, разделен-

ные окружностью радиуса c . Перейдем к безразмерным величинам

$$\rho = r/a, \quad \delta = c/a, \quad \beta = b/a$$

где r — текущий радиус.

Используя уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (27)$$

из условия $\sigma_\rho - \sigma_\theta = -k$ во внутренней зоне получим

$$\sigma_\rho = k \ln \rho + C_1, \quad \sigma_\theta = k + k \ln \rho + C_1, \quad \tau_{\rho\theta} = 0, \quad C_1 = \text{const} \quad (28)$$

Во внешней зоне

$$\sigma_\rho = \frac{C_2}{\rho} + d, \quad \sigma_\theta = d, \quad \tau_{\rho\theta} = 0, \quad C_2 = \text{const} \quad (29)$$

Сопрягая решения (28), (29), учитывая, что $\sigma_\rho = -p$ при $\rho = 1$ и $\sigma_\rho = 0$ при $\rho = \beta$, получим

$$C_1 = -p, \quad \beta d = \delta k = -C_2 \quad (30)$$

Так как $\delta \leq \beta$, то для того, чтобы в трубе действительно существовали две зоны, необходимо выполнение неравенства $d < k$.

Искомая величина давления разрушения определится из выражения

$$p = k - d - \ln \frac{\beta d}{k} \quad (31)$$

Во внутренней зоне будет иметь место разрушение путем сдвига, во внешней — путем отрыва.

Рассмотрим растягиваемый образец с круговыми выточками (фиг. 6). При $d < k$ разрушение произойдет путем отрыва. При $d > k$ появляются зоны разрушения путем сдвига, напряжения в которых определяются по формулам (28), причем $\sigma_\rho = 0$ при $\rho = 1$. Будем иметь

$$\sigma_\rho = k \ln \rho, \quad \sigma_\theta = k + k \ln \rho, \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (32)$$

Вдоль линии отрыва имеют место соотношения (29). Сопрягая решения, получим

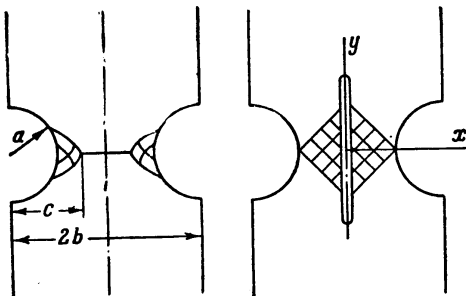
$$C_2 = -k\delta, \quad \delta = \exp \frac{d-k}{k} \quad (1 \leq \delta \leq \beta) \quad (33)$$

Величина δ определяет размеры чашечки, образуемой при разрушении. При $d \geq k + k \ln \beta$ разрушение произойдет исключительно путем сдвига.

Если в образце сделать вертикальную щель, то характер напряженного состояния резко отличается от рассматриваемого, при $d > k$ разрушение произойдет путем сдвига, как показано на фиг. 7.

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего очевидно сходство подхода к изучению проблемы разрушения с подходом к построению теории пластичности, изложенной в работе [21].

Однако [22] «еще Сен-Венаном было отмечено, что пластические деформации и разрушение—это два в корне отличных явления, поэтому он резко отличал процесс пластической деформации от процесса разрушения». Сходство подходов к этим проблемам указывает не на частное сходство процессов пластичности и разрушения, но на возможное единство подхода к проблемам изучения свойств твердого тела, проявляемых при достижении нагрузкой некоторой комбинации значений. Это обстоятельство бы-



Фиг. 6

Фиг. 7

ло проиллюстрировано В. Прагером [23,24] на примерах изучения свойств идеально затвердевающего и ограничено сжимаемого тел.

Отметим, что такие понятия как разрывные решения, статически и кинематически возможные поля напряжений и скоростей, а также экстремальные теоремы могут быть перенесены без затруднений из теории пластичности в теорию разрушения.

Поступила 25 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Стройиздат, М., 1949.
2. Prandtl L. Über die Eindringung-festigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit im Schneiden, ZAMM, Bd. I, H. I, 1928.
3. Mohr O. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin, 1914.
4. Griffith A. The Problem of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans., 221, 1921.
5. Иоффе А. Ф. и Левитская М. Н., Механизм остаточной деформации и разрушение. Сообщ. о научн.-техн. работах в Республике, Госхимтехиздат, в. 12, 13, 1924.
6. Давиденков Н. Н. Динамические испытания металлов, ОНТИ, 1936.
7. Одинг И. А. Прочность металлов, ОНТИ, 1937.
8. Nádai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, Toronto, London, 1950.
9. Ужик Г.] В. Сопротивление металлу и прочность отрыву, АН СССР, 1950.
10. Фейнберг С. М. Принцип предельной напряженности, ПММ, т. XII, в. 1, 1948.
11. Ишлинский А. Ю. О разрушении не вполне упругих материалов, Ученые записки МГУ, в. 117, 1946.
12. Филоненко-Бородич М. М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением сжатию и растяжению, Инж. сб., т. 19, 1954.
13. Drucker D., A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. First U. S. Nat. C. Appl. Mech., ASME, 1951.
14. Hill R. On the problem of uniqueness in the theory of a rigidplastic solid I—IV, Mech. Ph. Solids, № 4, 1956, № 1, 1957.
15. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучей среды, ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.
16. Hill R. Mathematical theory of plasticity, Oxford, 1950.
17. Prager W. a. Hodge F., Theory of perfectly plastic solids, New York, London, 1951.
18. Koiter W. Stress-strain relation uniqueness for elastic - plastic materials with a singular yield surface, Quart. J. Appl. Math., II, 3, 1953.
19. Prager W. On the use of singular yield conditions and associated flow rules, J. Appl. Mech., 20, 3, 1953.
20. Соколовский В. В. Теория пластичности, АН СССР, 1946.
21. Ивлев Д. Д. К построению теории идеальной пластичности, ПММ, т. XXII, в. 6, 1958.
22. Hensy H. Zur Theorie plastischer Deformationen und die hierdurch im Materialnervorgerufenen Nachspannungen, ZAMM, Bd. 4, H. 4, 1924.
23. Prager W. On ideal locking materials, Trans. Soc. Reology, I, 1957.
24. Prager W. Elastic Solids of Limited Compressibility, Actes IX. c. Int. de Mec. Appl., t. V, Bruxelles, 1957.