# О ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

**Л. М. Качанов**

(Ленинград)

1. В решении задач теории упругости получили широкое распространение вариационные методы, опирающиеся на принцип минимума потенциальной энергии системы и принцип Кастильяно. В теории пластичности также имеются аналогичные минимальные принципы; здесь однако, функционалы неквадратичные, вследствие чего применение вариационных методов связано с большими трудностями. Ниже указывается способ, позволяющий успешно применять вариационные методы решения в задачах теории пластичности и теории установившейся ползучести. Заметим, что аналогичный способ может быть использован при разыскании минимума и в других нелинейных проблемах.

Пусть тело следует уравнениям теории упруго-пластических деформаций

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2} g_2(T) D_\sigma, \qquad \varepsilon = 3k\sigma \tag{1}$$

где $D_\varepsilon$, $D_\sigma$ — девиаторы деформации и напряжения, $\varepsilon$ — относительное изменение объема, $\sigma$ — среднее давление, $k$ — коэффициент упругого объемного сжатия. Интенсивность касательных напряжений $T$ связана с интенсивностью деформаций сдвига $\Gamma$ зависимостью

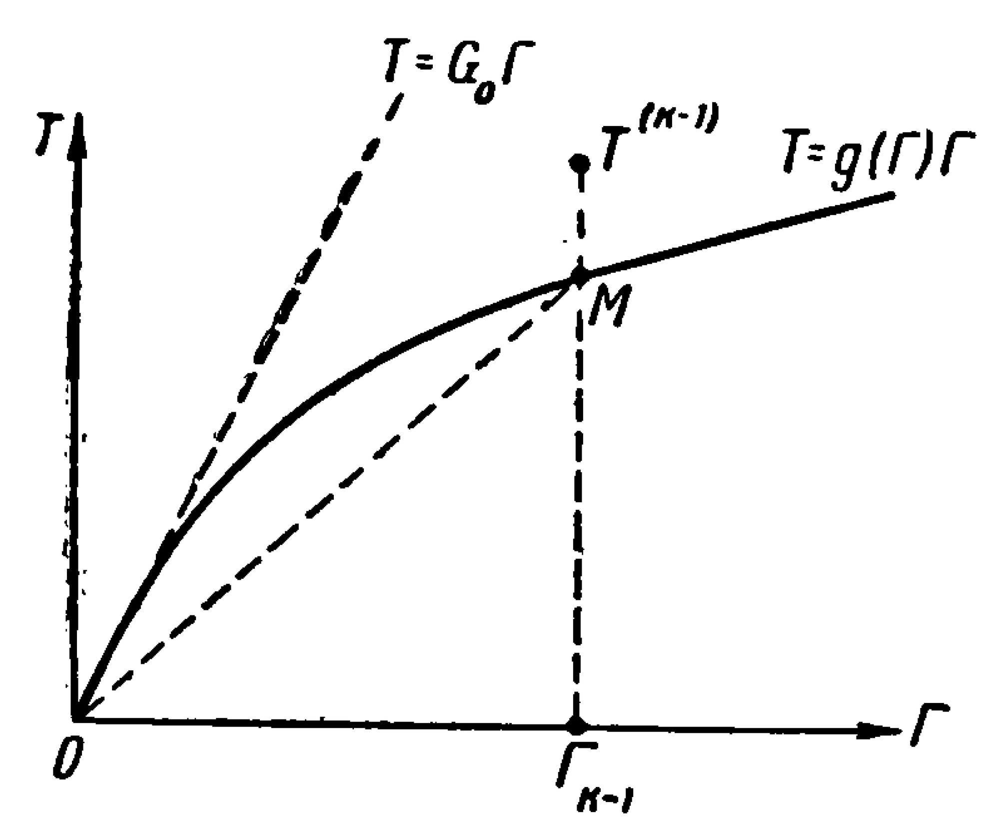
$$T = g_1(\Gamma)\Gamma, \qquad \text{или} \qquad \Gamma = g_2(T)T \tag{2}$$

причем

$$0 < g_1(\Gamma) \leqslant G_0, \quad g_1'(\Gamma) < 0, \qquad g_2(T) \geqslant \frac{1}{G_0}, \quad g_2'(T) > 0 \tag{3}$$

где $G_0$ — модуль сдвига. Функция $g_1(\Gamma)$ равна тангенсу угла наклона секущей $OM$ (фигура 1), а $g_2(T)$ — котангенсу того же угла.

Примем для простоты, что объемные силы отсутствуют. Пусть на части поверхности тела $S_F$ задана нагрузка $\mathbf{F}_n$, а на остальной части $S_u$ — перемещение $\mathbf{u}$.




2. Как известно [1], истинное перемещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ сообщает минимум потенциальной энергии системы

$$Э \equiv \int\limits_V \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \int g_1(\Gamma)\Gamma d\Gamma\right] dV - \int\limits_{S_F} \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{u} \; dS = \min \tag{4}$$

где $V$ — объем тела (при $g_1(\Gamma) = \mathrm{const} = G_0$ имеем случай упругого тела). Непосредственное разыскание минимума по методу Ритца связано с большими трудностями. При однородных условиях на $S_u$ легко определяется лишь грубое приближение в форме $\mathbf{u} = c\mathbf{u}_*$, где $c$ — произвольный параметр, а $\mathbf{u}_*$ — подходящее перемещение (за $\mathbf{u}_*$ обычно принимают решение соответствующей упругой задачи [1]).

Ищем решение $\mathbf{u}$ задачи (4) последовательными приближениями в форме

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0^* + \sum_{s=1} c_{ks}\mathbf{u}_s^* \qquad (k_1 = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

[1] О ненадежности этого приема можно судить по примеру изгиба консольной балки силой, приложенной на конце $z = l$. При степенном законе $\varepsilon_z = B\sigma_z^m$ $(m \geqslant 1)$ отношение прогиба $u_1(l)$ под силой по приближенному решению в указанной форме к точному значению прогиба $u(l)$ равно

$$\frac{u_1(l)}{u(l)} = \frac{m+2}{3}\left(\frac{2m+1}{3m}\right)^m$$

Причиной расхождения, возрастающего вместе с $m$, является значительное нарушение условий равновесия.

где $\mathbf{u}_0^*$ удовлетворяет заданным условиям на $S_u$, $\mathbf{u}_s^*$ обращаются в нуль на $S_u$ а $c_{ks}$ — произвольные постоянные. В нулевом приближении ($k=0$) полагаем $g_1(\Gamma) = \text{const} = G_0$; найдя $\mathbf{u}_0$, вычисляем соответствующие значения $\Gamma_0$. По $\Gamma_0$ определяем секущий модуль $g_1(\Gamma_0)$; внося его в (4), ищем первое приближение $\mathbf{u}_1$ из условия минимальности квадратичного функционала:

$$Э_1 \equiv \int\limits_V \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + g_1(\Gamma_0)\frac{\Gamma^2}{2}\right] dV - \int\limits_{S_F} \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{u}\, dS = \min$$

и т. д. Наличие переменного «модуля» $g_1(\Gamma_{k-1})$ в $k$-ом приближении лишь несколько усложняет вычисление квадратур, само же $k$-е приближение имеет тот же вид, что и для упругого тела.

3. Истинные напряжения $\sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ сообщают минимум дополнительной работе тела [1]

$$R \equiv \int\limits_V \left[\frac{3}{2} k\sigma^2 + \int g_2(T)\, T dT\right] dV = \min \tag{6}$$

при условии, что

$$\int\limits_S \delta\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{u}\, dS = 0$$

Строим последовательные приближения в форме

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \overset{\bullet}{\sigma}_{ij} + \sum_{s=1} c_{ks}\sigma_{ijs}^* \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

где $\overset{\bullet}{\sigma}_{ij}$ — частное решение уравнений равновесия, удовлетворяющее заданным условиям на $S_F$, $\sigma_{ijs}$ — частные решения уравнений равновесия, удовлетворяющие нулевым граничным условиям на $S_F$, а $c_{ks}$ — произвольные постоянные. Полагая $g_2(T) = G_0^{-1}$, находим нулевое приближение $\sigma_{ij}^{(0)}$, соответствующее упругой задаче, и вычисляем $T^{(0)}$. Полагаем $G_1 = g_1(T^{(0)}/G_0)$ и определяем первое приближение $\sigma_{ij}^{(1)}$ из условия минимума квадратичного функционала:

$$R_1 \equiv \int\limits_V \left[\frac{3}{2} k\sigma^2 + \frac{1}{G_1}\frac{T^2}{2}\right] dV = \min$$

и т. д. Для $k$-го приближения $G_k = g_1(T^{(k-1)}/G_{k-1})$. Заметим, что вычисление переменного «модуля» $G_k$ по соответствующей интенсивности деформаций $\Gamma_{k-1}$ (а не по интенсивности $T^{(k-1)}$) существенно улучшает сходимость.

4. Решения задач теории упругости, найденные вариационными методами, нетрудно распространить на соответствующие задачи теории пластичности с упрочнением. При этом в (5), (7) целесообразно удерживать число членов, обеспечивающее необходимую точность решения упругой задачи. Квадратуры удобно находить численно; при определении секущего «модуля» $G_k$ можно исходить непосредственно из опытной кривой $T - \Gamma$. Сохранение той же формы решения в каждом приближении (изменяются лишь коэффициенты $c_{ks}$) значительно упрощает вычисления и в отличие от других методов последовательных приближений (см. [2]) исключает громоздкость результатов.

Упруго-пластические задачи решаются теми же способами. Заметим, наконец, что решение задачи минимума на каждой ступени приближения может строиться и другими приемами (например, по методу Л. В. Канторовича — приведением к обыкновенным дифференциальным уравнениям).

Пользуюсь случаем выразить признательность С. Г. Михлину за обсуждение и интерес к работе.

Поступила 1 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
2. Биргер И. А. Некоторые общие методы решений задач теории пластичности. Прикл. матем. и механ., т. XV, вып. 6, 1951.