ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

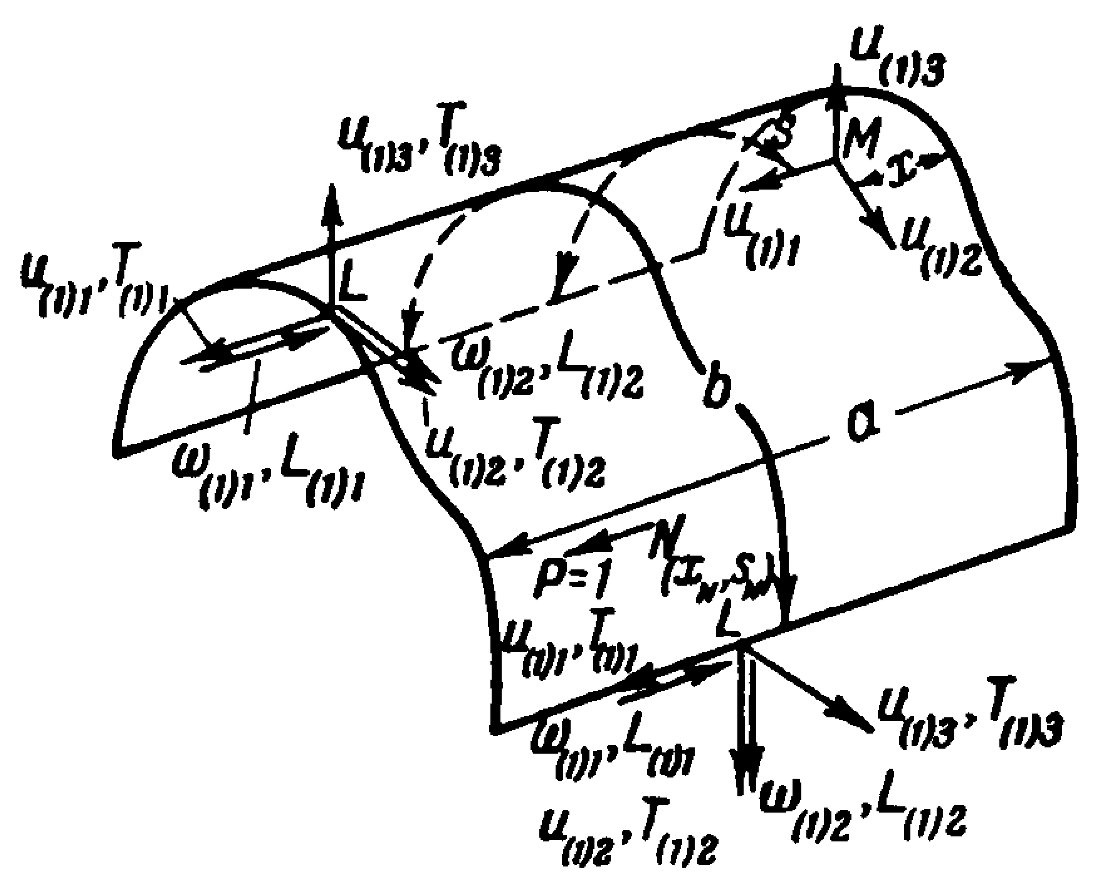
Н. И. Ремизова

(Киев)

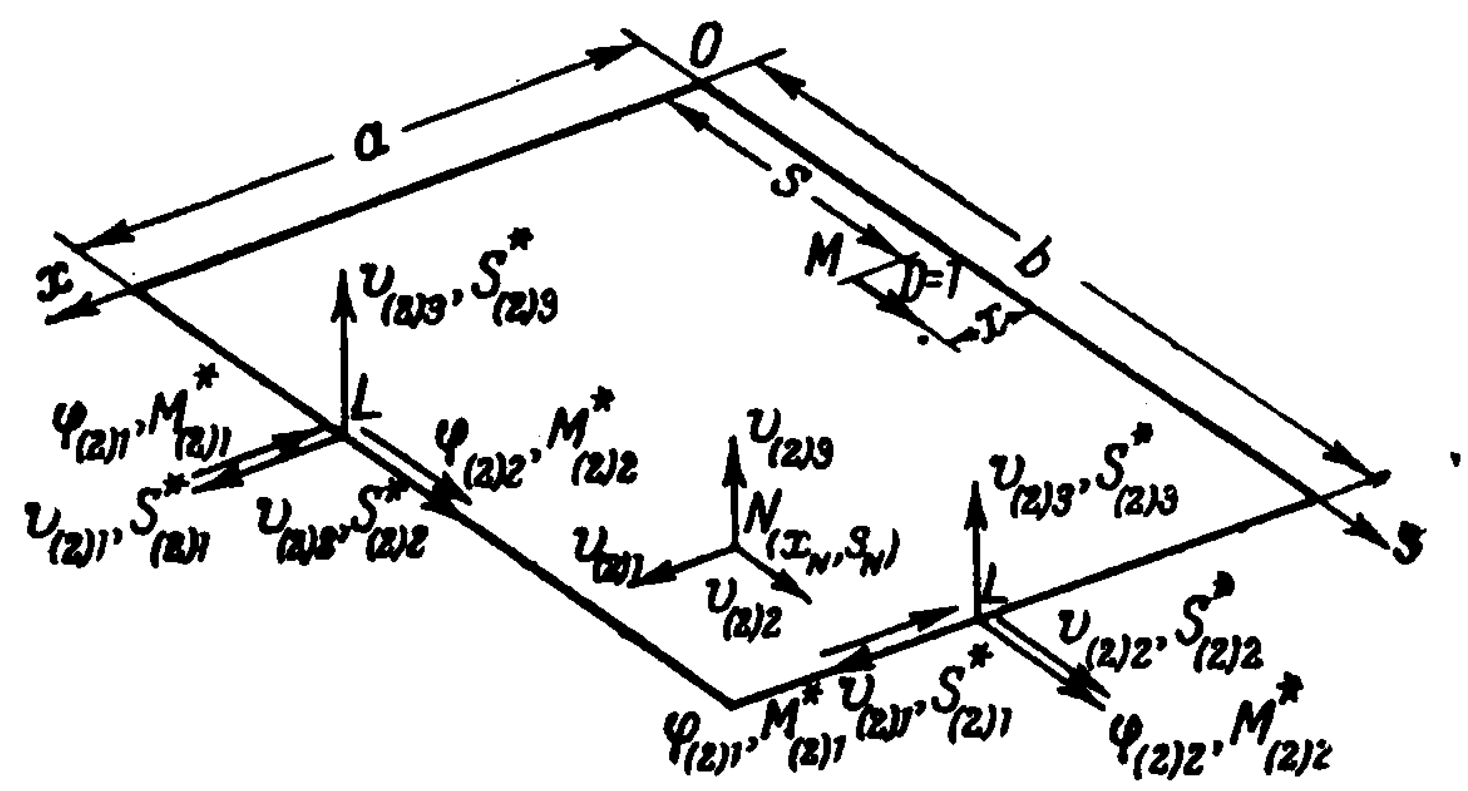
В исследованиях Н. А. Кильчевского [1-3] по теории оболочек разработан общий метод решения статической задачи теории оболочек, основанный на приведении этой задачи к решению некоторой системы интегральных уравнений.

Ниже излагаются результаты развития этого метода применительно к цилиндрическим оболочкам.

Система интегро-дифференциальных уравнений равновесия цилиндрической оболочки составляется на основании теоремы о взаимности работ (теорема Бетти) [4].



Фиг. 1



Фиг. 2

Согласно этой теореме, как известно, рассматриваются две системы сил и перемещений. Одна система — заданные силы и искомые перемещения, вторая — вспомогательные силы и вспомогательные перемещения.

Цилиндрическую оболочку рассматриваем как сплошную трехмерную среду. За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки, положение точек на которой определяем координатами x, s, т. е. расстоянием вдоль образующей и длиной дуги направляющей (фиг. 1). Расстояние по нормам от точки $M(x, s)$ срединной поверхности до рассматриваемой точки принимаем за третью координату z; изменяется она в пределах от $z = -{}^1/_2 h$ до $z = +{}^1/_2 h$ (h — постоянная толщина оболочки).

Допустим, что в точке $N(x_N, s_N)$ срединной поверхности оболочки приложена единичная сосредоточенная сила вдоль направления $\mathbf{e}_j$ местного координатного базиса. Проекцию линейного перемещения, вызванного ею в произвольной точке $M(x, s)$, на направление $\mathbf{e}_\alpha$ обозначим $u_{(j)\alpha}(M; N)$. (Здесь и в дальнейшем индекс в скобках определяет направление силы.) Углы поворота нормали к срединной поверхности в точке M вокруг $\mathbf{e}_\gamma$ обозначим $\omega_{(j)\gamma}(M; N)$. Усилия и моменты в произвольной точке $L(x_L, s_L)$ граничного контура обозначим $T_{(j)\alpha}(L; N)$; $L_{(j)\gamma}(L; N)$. Здесь индексы α, j принимают значения 1, 2, 3, а индекс $\gamma = 1,2$. Рассмотренную систему нагрузок и перемещений принимаем за основную.

Пусть теперь в точке $M(x, s)$ прямоугольной пластины, на которую развертывается цилиндрическая оболочка (фиг. 2), приложена единичная сосредоточенная сила вдоль направления $\mathbf{e}_\alpha$. Линейные и угловые перемещения, вызванные ею в произвольной точке $N(x_N, s_N)$ пластины, обозначим $v_{(\alpha)\beta}(N; M)$, $\varphi_{(\alpha)\gamma}(N; M)$; а усилия и моменты на контуре обозначим $S^*_{(\alpha)\beta}(L; M)$, $M^*_{(\alpha)\gamma}(L; M)$ $(\beta = 1, 2, 3)$.

Сообщим перемещения $v_{(\alpha)\beta}$ точкам срединной поверхности оболочки.

В оболочке эти перемещения будут вызваны, кроме единичной сосредоточенной силы, некоторой распределенной нагрузкой ограничивающих и контурных поверхностей. В теории тонких оболочек эта нагрузка заменяется следующими силовыми воздействиями:

а) нагрузкой $K_{(\alpha)\beta}(Q; M)$ и моментами $G_{(\alpha)\gamma}(Q; M)$, приложенными к точкам срединной поверхности;

б) вспомогательными усилиями $S_{(\alpha)\beta}(L;\ M)$ и моментами $M_{(\alpha)\gamma}(L;\ M)$, приложенными к граничному контуру срединной поверхности оболочки. Усилия $S_{(\alpha)\beta}$ и моменты $M_{(\alpha)\beta}$ отличаются от соответствующих величин в пластине членами, обращающимися в нуль вместе с кривизной оболочки. Перемещения $v_{(\alpha)\beta}$ и вызывающие их в оболочке силовые воздействия принимаем за вспомогательную систему.

Теорема о взаимности работ, примененная к основной и вспомогательной системам сил и перемещений, позволяет написать следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_{(j)\alpha}(M;\ N) = v_{(\alpha)j}(N;\ M) - \int_0^a\int_0^b H_{(\alpha)\beta}(Q;\ M)\, u_{(j)\beta}(Q;\ N)\, dx_Q\, ds_Q + A_{(j)\alpha}(M;\ N)$$

$$(\alpha,\ \beta,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

Здесь введены обозначения

$$H_{(\alpha)1} = K_{(\alpha)1}, \qquad H_{(\alpha)2} = K_{(\alpha)2} + kG_{(\alpha)1}$$

$$H_{(\alpha)3} = K_{(\alpha)3} + \frac{\partial}{\partial x} G_{(\alpha)2} + \frac{\partial}{\partial s} G_{(\alpha)1}$$

$$\begin{aligned} A_{(j)\alpha}(M;\ N) = \int_0^a [&T_{(j)\beta}(L;\ N)\, v_{(\alpha)\beta}(L;\ M) + L_{(j)\gamma}(L;\ N)\, \varphi_{(\alpha)j}(L;\ M) - \\ &- G_{(\alpha)1}(L;\ M)\, u_{(j)3}(L;\ N) - S_{(\alpha)\beta}(L;\ M)\, u_{(j)\beta}(L;\ N) - \\ &- M_{(\alpha)\gamma}(L;\ M)\, \omega_{(j)\gamma}(L;\ N)]_{s_L=0}^{s_L=b}\, dx_L + \int_0^b [T_{(j)\beta}(L;\ N)\, v_{(\alpha)\beta}(L;\ M) + \\ &+ L_{(j)\gamma}(L;\ N)\, \varphi_{(\alpha)\gamma}(L;\ M) - G_{(\alpha)2}(L;\ M)\, u_{(j)3}(L;\ N) - \\ &- S_{(\alpha)\beta}(L;\ M)\, u_{(j)\beta}(L;\ N) - M_{(\alpha)\gamma}(L;\ M)\, \omega_{(j)\gamma}(L;\ N)]_{x_L=0}^{x_L=a}\, ds_L \end{aligned}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ j = 1,\ 2,\ 3;\ \gamma = 1,\ 2)$$

Здесь $k = k(s)$ — главная кривизна срединной поверхности оболочки.

Уравнения (1) образуют основную систему интегро-дифференциальных уравнений равновесия теории цилиндрических оболочек.

Определяя девять функций $u_{(j)\alpha}(M;\ N)$, мы строим тензор Грина, позволяющий найти перемещения, вызванные действием произвольной нагрузки.

Из системы (1) видно, что искомые перемещения представляют сумму двух слагаемых. Первое слагаемое является соответствующим перемещением точки срединной плоскости пластины. Второе слагаемое, содержащее интеграл по срединной поверхности оболочки и ее граничному контуру, выражает общее влияние на перемещения точек срединной поверхности оболочки ее кривизны и различия в условиях на контуре пластины и оболочки. Следовательно, лучшим вариантом вспомогательной системы является тот, который строится на основе решения задачи о действии единичной сосредоточенной силы на пластину, имеющую те же граничные условия, что и оболочка. В худшем случае, если решение соответствующей задачи для пластины затруднительно, вспомогательные перемещения представляются в виде суммы

$$v_{(\alpha)\beta} = V_{(\alpha)\beta} + v'_{(\alpha)\beta} \tag{2}$$

где $V_{(\alpha)\beta}$ — функции, которые имеют особенность, соответствующую действию единичной сосредоточенной силы на пластину, и определяются решением известных задач: плоской теории упругости [4] и теории изгиба [5] пластин; $v'_{(\alpha)\beta}$ — произвольные функции, регулярные на срединной поверхности оболочки. Функции $v'_{(\alpha)\beta}$ определяют перемещения точек срединной поверхности оболочки, вызванные некоторыми несосредоточенными силами, и могут не быть решениями однородных уравнений задач, указанных выше; вводятся они для удовлетворения краевых условий оболочки. Из последующего будет ясно, что перемещения $v'_{(\alpha)\beta}$ изменяют структуру уравнений (1).

Ядра $H_{(\alpha)\beta}$ системы уравнений (1) определяем посредством дифференциальных уравнений равновесия элемента срединной поверхности цилиндрической оболочки.

В общем виде эти уравнения имеют вид

$$R_i^\circ (v_{(\alpha)\beta}) + R_i^k (v_{(\alpha)\beta}) + H_{(\alpha)i} = 0 \qquad (\alpha, \beta, i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

Здесь R_i°, R_i^k — однородные линейные операторы относительно перемещений $v_{(\alpha)\beta}$, причем первый из них является пластиночным, второй — обращающимся в нуль вместе с кривизной оболочки, $H_{(\alpha)i}$ — компоненты внешней нагрузки.

Если вспомогательные перемещения удовлетворяют соответствующим краевым условиям пластины, то ядра уравнений (1) определяются оператором $R_i^k (v_{(\alpha)\beta})$. Если же перемещения выбрать в виде (2), то ядра $H_{(\alpha)i}$ будут определяться суммой

$$H_{(\alpha)i} = -R_i^\circ (v'_{(\alpha)\beta}) - R_i^k (v_{(\alpha)\beta})$$

Применим полученные здесь результаты к решению задачи о действии нормальной сосредоточенной силы P на круговую цилиндрическую оболочку с шарнирно-подвижным опиранием краев.

Определение в замкнутой форме трех компонент перемещения точки срединной поверхности оболочки оказалось возможным при наличии вспомогательных перемещений в форме двойных тригонометрических рядов.

Перемещения, вызванные нормальной единичной сосредоточенной силой в пластине с шарнирно-подвижным опиранием, имеют вид [5]

$$v_{(3)1} = v_{(3)2} = 0$$

$$v_{(3)3}(N;\, M) = \alpha_3 \sum_{mn} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi s}{b} \sin\frac{m\pi x_N}{a} \sin\frac{n\pi s_N}{b} \tag{4}$$

Здесь

$$\alpha_3 = \frac{4a^2\lambda}{\pi^4 D}, \qquad C_{mn} = (m^2 + \lambda^2 n^2)^{-2}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad \lambda = \frac{a}{b}$$

(E — модуль упругости 1-го рода, ν — коэффициент Пуассона).

Остановимся на решении плоской задачи теории упругости в двойных тригонометрических рядах.

Искомые перемещения, вызванные единичной сосредоточенной силой, направленной вдоль α-й координатной линии, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 v_{(\alpha)1}}{\partial x_N^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v_{(\alpha)2}}{\partial x_N \partial s_N} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v_{(\alpha)1}}{\partial s_N^2} = q\delta_{(\alpha)1} \\ \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v_{(\alpha)2}}{\partial x_N^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v_{(\alpha)1}}{\partial x_N \partial s_N} + \frac{\partial^2 v_{(\alpha)2}}{\partial s_N^2} = q\delta_{(\alpha)2} \qquad (\alpha = 1, 2) \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь

$$\delta_{(\alpha)k} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = k, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq k, \end{cases} \qquad q = \begin{cases} -(1-\nu^2)/Eh & \text{при } N = M \\ 0 & \text{при } N \neq M \end{cases}$$

Определяя решение системы (5) в форме двойных тригонометрических рядов, имеем

$$\begin{gathered} v_{(1)1}(N;\, M) = \alpha_1 \sum_{mn} a_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi s}{b} \cos\frac{m\pi x_N}{a} \sin\frac{n\pi s_N}{b} \\ v_{(1)2}(N;\, M) = \alpha_2 \sum_{mn} b_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi s}{b} \sin\frac{m\pi x_N}{a} \cos\frac{n\pi s_N}{b} \\ v_{(2)1}(N;\, M) = v_{(1)2}(M;\, N) \\ v_{(2)2}(N;\, M) = \alpha_1 \sum_{mn} a^\circ_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi s}{b} \sin\frac{m\pi x_N}{a} \cos\frac{n\pi s_N}{b} \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4(1-\nu^2)\lambda}{\pi^2 Eh}, \qquad \alpha_2 = -\frac{4(1+\nu)^2\lambda^2}{\pi^2 Eh}$$

$$a_{mn} = \frac{m^2 + 2/(1-\nu)^{\lambda^2 n^2}}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}, \qquad b_{mn} = \frac{mn}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}$$

$$a^{\circ}_{mn} = \frac{1}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}\left(\lambda^2 n^2 + \frac{2}{1-\nu} m^2\right)$$

Если вспомогательные перемещения выбрать в виде (4) и (6), то для задачи, сформулированной выше, система интегро-дифференциальных уравнений (1) примет вид [6]

$$\begin{aligned} u_1(M;N) &= -\int_0^a\int_0^b H_{(1)3}(Q;M)\,u_3(Q;N)\,dx_Q\,ds_Q \\ u_2(M;N) &= -\int_0^a\int_0^b H_{(2)3}(Q;M)\,u_3(Q;N)\,dx_Q\,ds_Q \\ u_3(M;N) &= v_{(3)3}(N;M) - \int_0^a\int_0^b [H_{(3)1}(Q;M)\,u_1(Q;N) + \\ &+ H_{(3)2}(Q;M)\,u_2(Q;N) + H_{(3)3}(Q;M)\,u_3(Q;N)]\,dx_Q\,ds_Q \end{aligned} \tag{7}$$

Ядра $H_{(\alpha)\beta}$ системы (7) определены на основании дифференциальных уравнений равновесия общей технической моментной теории тонких оболочек В. З. Власова [7]. Имеем

$$H_{(1)3}(Q;M) = \beta_1 \sum_{mn} A_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b}\sin\frac{m\pi x_Q}{a}\sin\frac{n\pi s_Q}{b}$$

$$H_{(2)3}(Q;M) = \beta_2 \sum_{mn} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi s}{b}\sin\frac{m\pi x_Q}{a}\sin\frac{n\pi s_Q}{b} \tag{8}$$

$$H_{(3)1}(Q;M) = \gamma_1 \sum_{mn} \alpha_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b}\cos\frac{m\pi x_Q}{a}\sin\frac{n\pi s_Q}{b}$$

$$H_{(3)2}(Q;M) = \gamma_2 \sum_{mn} \beta_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b}\sin\frac{m\pi x_Q}{a}\cos\frac{n\pi s_Q}{b}$$

$$H_{(3)3}(Q;M) = \gamma_3 \sum_{mn} \gamma_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b}\sin\frac{m\pi x_Q}{a}\sin\frac{n\pi s_Q}{b} \tag{9}$$

где

$$\beta_1 = \frac{4k\lambda}{\pi a}, \qquad A_{mn} = \frac{m(\lambda^2 n^2 - \nu m^2)}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{4k\lambda^2}{\pi a}, \qquad B_{mn} = \frac{n\{m^2[\nu(1+\nu)-2]/(1-\nu) - \lambda^2 n^2\}}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}$$

$$\gamma_1 = -\frac{48a\lambda\nu k}{\pi^3 h^2}, \qquad \gamma_2 = -\frac{48a\lambda^2 k}{\pi^3 h^2}, \qquad \gamma_3 = \frac{48a^2 k^2\lambda}{\pi^4 h^2},$$

$$\alpha_{mn} = \frac{m}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}, \qquad \beta_{mn} = \frac{n}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}, \qquad \gamma_{mn} = \frac{1}{(m^2+\lambda^2 n^2)^2}$$

Исключая u_1 и u_2 из третьего уравнения на основании двух первых, систему интегральных уравнений (7) можно привести к одному интегральному уравнению

$$u_3(M;N) = Pv_{(3)3}(M;N) - \int_0^a\int_0^b F_{(3)3}(Q;M)\,u_3(Q;N)\,dx_Q\,ds_Q \tag{10}$$

где

$$F_{(3)\,3}(Q;\,M) = H_{(3)\,3}(Q;\,M) - \int_0^a\int_0^b H_{(3)\,\beta}(P;\,M)\,H_{(\beta)\,3}(Q;\,P)\,dx_p\,ds_p \quad (\beta = 1,\,2)$$

Решение уравнения (10) ищем в виде

$$u_3(M;\,N) = \sum_{mn}\left[Pa_3C_{mn}\sin\frac{m\pi x_N}{a}\sin\frac{n\pi s_N}{b} + L_{mn}(N)\right]\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi s}{b} \qquad (11)$$

где $L_{mn}(N)$ — неизвестные коэффициенты.

Подставляя (11) в (10) и используя свойство ортогональности тригонометрических функций в рассматриваемом интервале, получим уравнение для определения $L_{mn}(N)$.

Окончательно имеем

$$u_3(M;\,N) = \frac{Pa^2}{D}\left[u_0(M;\,N) - u_k(M;\,N)\right] \qquad (12)$$

где

$$u_0 = \frac{4\lambda}{\pi^4}\sum_{mn}\frac{1}{(m^2+\lambda^2n^2)^2}\sin\frac{m\pi x_N}{a}\sin\frac{n\pi s_N}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b}$$

$$u_k = \frac{4\lambda\mu}{\pi^4}\sum_{mn}\frac{m^4}{(m^2+\lambda^2n^2)^2\left[(m^2+\lambda^2n^2)^4+\mu m^4\right]}\sin\frac{m\pi x_N}{a}\sin\frac{n\pi s_N}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b}$$

$$\mu = \frac{12\,(1-\nu^2)}{\pi^4}\,\frac{a^4}{R^2h^2}$$

Подставляя в первые два уравнения системы (7) $H_{(1)\,3}$, $H_{(2)\,3}$ и u_3, определенные соотношениями (8) и (12), и выполняя квадратуры, получим

$$u_1(M;\,N) = \delta\sum_{mn}K_{mn}\sin\frac{m\pi x_N}{a}\sin\frac{n\pi s_N}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi s}{b} \qquad (13)$$

$$u_2(M;\,N) = \delta\sum_{mn}N_{mn}\sin\frac{m\pi x_N}{a}\sin\frac{n\pi s_N}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi s}{b} \qquad (14)$$

где

$$\delta = \frac{4P\lambda\mu R}{\pi Eha}, \qquad K_{mn} = \frac{m\,(\nu m^2 - \lambda^2n^2)}{\Delta_{mn}}, \qquad N_{mn} = \frac{n\left[m^2(2+\nu)+\lambda^2n^2\right]}{\Delta_{mn}}$$

$$\Delta_{mn} = (m^2 + \lambda^2 n^2)^4 + \mu m^4$$

Полученное здесь решение полностью совпадает с результатами, приведенными в работе В. З. Власова [7] для этой же задачи.

Следовательно, если исходить из одинаковых предположений при составлени дифференциальных и интегральных уравнений, описывающих равновесие одной и той же оболочки, то результаты решения совпадают.

Поступила 27 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Кильчевский Н. А. Основные уравнения теории оболочек и некоторые методы их интегрирования. Сб. Тр. Ин-та матем. АН УССР, № 6, 1940.
2. Кильчевский Н. А. Некоторые методы интегрирования уравнений равновесия упругих оболочек. ПММ, т. IV, вып. 2, 1940.
3. Кильчевский Н. А. Приближенные методы определения перемещений в цилиндрических оболочках. Сб. Тр. Ин-та матем. АН УССР, № 8, 1946.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
5. Шиманский Ю. А., Изгиб пластин. ОНТИ, 1934.
6. Ремизова Н. И. Расчет цилиндрических оболочек на прочность методом интегральных уравнений. ПММ, т. IV, вып. 3, 1958.
7. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.