ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Е. Н. Березкин
(Москва)

В работе рассматривается одна задача, имеющая отношение к исследованию устойчивости невозмущенного движения самолета с автопилотом. Характеристическое уравнение первого приближения изучаемой системы имеет два нулевых корня с одной группой решений. Общие методы решения подобных задач изучены А. М. Ляпуновым [1] и Г. В. Каменковым [2]. В конкретных случаях возникают серьезные затруднения при построении функции Ляпунова, позволяющей определить область допустимых возмущений.

1. Рассмотрим уравнение возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt}=y \qquad \frac{dy}{dt}=(b_1-b_2y)\,z^2, \qquad \frac{dz}{dt}=-ax-by-ez$$
$$(a>0,\ b>0,\ c>0,\ b_1>0,\ b_2>0) \tag{1.1}$$

При помощи линейной подстановки

$$x_1=x, \qquad y_1=y, \qquad z_1=\alpha x+\beta y+\gamma z, \qquad \alpha=ac, \qquad \beta=bc-a, \qquad \gamma=c^2 \tag{1.2}$$

система преобразуется к каноническому виду:

$$\frac{dx_1}{dt}=y, \tag{1.3}$$
$$\frac{dy_1}{dt}=a_1x_1^2+(a_2x_1+a_3x_1^2)\,y_1+(a_4+a_5x_1)\,y_1^2+a_6y_1^3+a_7z_1^2+a_8x_1z_1+$$
$$+(a_9z_1+a_{10}z_1^2+a_{11}x_1z_1)\,y_1+a_{12}z_1y_1^2$$
$$\frac{dz_1}{dt}=-cz_1+m\,[a_1x_1^2+(a_2x_1+a_3x_1^2)\,y_1+(a_4+a_5x_1)\,y_1^2+a_6y_1^3+a_7z_1^2+a_8x_1z_1+$$
$$+(a_9z_1+a_{10}z_1^2+a_{11}x_1z_1)\,y_1+a_{12}z_1y_1^2]$$

где коэффициенты a_i и m являются известными функциями от величин a, b, c, b_1, b_2.

Очевидно, что задача об устойчивости по отношению к новым переменным эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к старым переменным. Докажем, что в рассматриваемом случае невозмущенное движение $x_1=y_1=z_1=0$ неустойчиво. С этой целью предварительно преобразуем систему (1.3) с помощью подстановки

$$x_1=\xi, \qquad y_1=\frac{\eta}{1+Az_1}+B\xi z_1+Dz_1^2$$
$$A=\frac{a_9c+a_8}{c^2}, \qquad B=-\frac{a_8}{c}, \qquad D=-\frac{a_7}{2c} \tag{1.4}$$

В этом случае

$$\xi=x_1, \qquad \eta=(y_1-Bx_1z_1-Dz_1^2)\,(1+Az_1) \tag{1.5}$$

При $z=0$ подстановка получает вид $x_1=\xi$, $y_1=\eta$. С другой стороны, члены подстановки, содержащие z, имеют общую степень не ниже второй. Указанным преобразованием порядок отдельных членов правых частей дифференциальных уравнений не может быть понижен. В этом легко убедиться, продифференцировав подстановку (1.5) по времени t. Будем иметь

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{dy_1}{dt}-Bz_1\frac{dx_1}{dt}-Bx_1\frac{dz_1}{dt}+Az_1\frac{dy_1}{dt}+Ay_1\frac{dz_1}{dt}-2Dz_1\frac{dz_1}{dt}-ABz_1^2\frac{dx_1}{dt}-$$
$$-2ABx_1z_1\frac{dz_1}{dt}-3ADz_1^2\frac{dz_1}{dt} \tag{1.6}$$

Выпишем совокупность членов второго порядка правой части этого уравнения. В старых переменных будем иметь:

$$a_1x_1^2+a_2x_1y_1+a_4y_1^2+a_7z_1^2+a_8x_1z_1+a_9y_1z_1-By_1z_1+Bcx_1z_1-Acy_1z_1+2Dcz_1^2. \tag{1.7}$$

Преобразование к новым переменным ξ, η оставит члены второго порядка без изменения и внесет дополнительные члены выше второго порядка. При определенных выше значениях A, B и D получим соотношение:

$$(a_7+2Dc)\,z_1^2+(a_8+Bc)\,x_1z_1+(a_9-B-Ac)\,y_1z_1\equiv 0 \tag{1.8}$$

Окончательно преобразованную систему можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\eta}{1+Az_1}+B\xi z_1+Dz_1^2$$
$$\frac{d\eta}{dt}=a_1\xi^2+a_2\xi\eta+a_4\eta^2+f_1(\xi,\eta,z_1) \tag{1.9}$$
$$\frac{dz_1}{dt}=-cz_1+f_2(\xi,\eta,z_1)$$

Здесь функция $f_1(\xi,\eta,z_1)$ не содержит членов ниже третьего порядка относительно переменных ξ,η,z_1; функция $f_2(\xi,\eta,z_1)$ не содержит членов ниже второго порядка относительно тех же переменных.

Рассмотрим функцию

$$V(\xi,\eta,z_1)=\eta+(a_1-a_4)\xi\eta-\frac{1}{2}a_2\xi^2-\frac{a_1}{2c}z_1^2 \tag{1.10}$$

В любой окрестности невозмущенного движения $\xi=\eta=z_1=0$ найдутся как точки, где $V(\xi,\eta,z_1)>0$, так и точки, где $V(\xi,\eta,z_1)<0$. Производная от функции V, взятая в силу системы (1.10), имеет вид:

$$\frac{dV}{dt}=[(a_1-a_4)\eta-a_2\xi]\left[\frac{\eta}{1+Az_1}+B\xi z_1+Dz_1\right]+[1+(a_1-a_4)\xi][a_1\xi^2+a_2\xi\eta+a_4\eta^2+$$
$$+f_1(\xi,\eta,z_1)]+a_1z_1^2-\frac{a_1}{c}z_1f_1(\xi,\eta,z_1)\equiv a_1(\xi^2+\eta^2+z_1^2)+\Phi(\xi,\eta,z_1) \tag{1.11}$$

Здесь $\Phi(\xi,\eta,z_1)$ не содержит членов ниже третьего порядка малости.

Построенная таким образом функция $V(\xi,\eta,z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости движения [3]. Условия теоремы о неустойчивости не выполняются, когда $a_1=0$. Последнее возможно, когда имеется одно из условий 1 $a=0$ или $b_1=0$.

2. Рассмотрим случай $a\equiv 0$, $b_1\neq 0$. Уравнения (1.3) в этом случае имеют вид:

$$\frac{dx}{dt}=y$$
$$\frac{dy}{dt}=a_4y^2+a_6y^3+a_7z^2+a_9yz+a_{10}yz^2+a_{12}y^2z \tag{2.1}$$
$$\frac{dz}{dt}=-cz+m[a_4y^2+a_6y^3+a_7z^2+a_9yz+a_{10}yz^2+a_{12}y^2z]$$

Покажем, что в данном случае невозмущенное движение неустойчиво. С этой целью рассмотрим функцию Четаева:

$$V(x,y,z)=xy-\frac{z^2}{2c} \tag{2.2}$$

Область $V>0$ представляет внутреннюю поверхность конуса. Производная от функции V, взятая в силу системы (2.1), имеет вид:

$$\frac{dV}{dt}=y^2\left[1+a_4x+a_6xy+a_{12}xz-\frac{ma_4}{c}z-\frac{ma_6}{c}yz-\frac{ma_{12}}{c}z^2\right]+$$
$$+z^2\left[1+a_7x+a_{10}xy-\frac{ma_7}{c}z-\frac{ma_9}{c}y-\frac{ma_{10}}{c}yz\right]+a_9xyz \tag{2.3}$$

В достаточно малой окрестности невозмущенного движения знак правой части этого равенства определяется знаком выражения:

$$f(x,y,z)=y^2+z^2+a_9xyz \tag{2.4}$$

Выражение это является квадратичной формой относительно переменных y и z, и будет знакопостоянной положительной функцией для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$|x|<\left|\frac{2}{a_9}\right|=\frac{c^3}{bb_1} \tag{2.5}$$

Функция $f(xyz)$ при данных значениях x может обращаться в нуль только на прямой $y=z=0$, которая лежит на поверхности конуса:

$$xy-\frac{z^2}{2c}=0 \tag{2.6}$$

Таким образом, построенная функция удовлетворяет условиям теоремы Четаева о неустойчивости движения [4], чем и доказывается наше утверждение. Нетрудно заметить, что функция V будет удовлетворять условиям теоремы Четаева и в том случае, когда $a \equiv b_1 \equiv 0$. В последнем случае правая часть равенства (2.3) будет иметь вид:

$$y^2\left[1 + a_6 xy + a_{12}xz - \frac{ma_6}{c} yz - \frac{ma_{12}}{c} z^2\right] + z^2\left[1 + a_{10}xy - \frac{ma_{10}}{c} yz\right] \qquad (2.7)$$

и будет представлять знакопостоянную положительную функцию для любых достаточно малых значений переменных x, y, z, обращающуюся в нуль, в окрестности невозмущенного движения, на поверхности конуса (2.6). Таким образом, и в этом последнем случае невозмущенное движение $x = y = z = 0$ будет неустойчиво.

3. Рассмотрим теперь случай, когда $b_1 = 0$, $a \neq 0$. Уравнения (1.3) в этом случае получат вид:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + a_4yz^2 + a_5xyz + a_6y^2z \qquad (3.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -cz + m\left[a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + a_4yz^2 + a_5xyz + a_6y^2z\right]$$

где коэффициенты a_i, m будут зависеть от заданных величин a, b, c, b_1, b_2.

Трудности, связанные с построением функции Ляпунова непосредственно для системы (3.1), устраняются после дополнительных преобразований уравнений с помощью подстановок:

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1 + \frac{ma_1x_1^2}{c + a_1x^2} y_1 + \frac{m}{c}\left(a_2 - 2\frac{a_1}{c}\right)x_1y_1^2 +$$
$$+ \frac{m}{c}\left(a_3 - \frac{a_2}{c} + 2\frac{a_1}{c^2}\right)y_1^3 \equiv z_1 + U(x_1y_1) \qquad (3.2)$$

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - \frac{ma_1x^2}{c + a_1x^2} y - \frac{m}{c}\left(a_2 - 2\frac{a_1}{c}\right)xy^2 -$$
$$- \frac{m}{c}\left(a_3 - \frac{a_2}{c} + 2\frac{a_1}{c^2}\right)y^3 \equiv z - U(xy)$$

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha y_2z_2}}{2\alpha z_2}, \quad z_1 = z_2, \quad \alpha = \frac{a_6}{c} \qquad (3.3)$$

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 + \alpha y_1^2z, \quad z_2 = z_1$$

В результате преобразования (3.2) система уравнений (3.1) получит новый вид. При этом первое уравнение системы не изменится, а во втором добавятся члены пятого порядка. Существенно изменится только третье уравнение.

В силу тождества

$$ma_1x_1^2y_1 + ma_2x_1y_1^2 + ma_3y_1^3 - \frac{2ma_1c}{(c + a_1x_1^2)^2} xy^2 - \frac{m}{c}\left(a_2 - 2\frac{a_1}{c}\right)y_1^3 - \frac{ma_1^2x_1^4y_1}{c + a_1x_1^2} -$$
$$- \frac{ma_1cx_1^2y_1}{c + a_1x_1^2} - m\left(a_2 - 2\frac{a_1}{c}\right)x_1y_1^2 - m\left(a_3 - \frac{a_2}{c} + 2\frac{a_1}{c^2}\right)y_1^3 = 2ma_1^2\frac{2c + a_1x_1^2}{c(c + a_1x_1^2)^2}x^3y^2 \qquad (3.4)$$

система уравнений (3.1) преобразуется к виду:

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1x_1^2y_1 + a_2x_1y_1^2 + a_3y_1^3 + a_5x_1y_1z_1 + a_6z_1y_1^2 + f(x_1y_1z_1) \qquad (3.5)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -cz_1 + f_2(x_1y_1z_1)$$

причем функции $f_1(x_1y_1z_1)$ и $f_2(x_1y_1z_1)$ могут быть представлены в виде:

$$f_1(x_1y_1z_1) = z_1^2\varphi_1(x_1y_1z_1) + x_1^2y_1^2\varphi_2(x_1y_1z_1) + x_1y_1^3\varphi_3(x_1y_1z_1) + y_1^4\varphi_4(x_1y_1z_1)$$

$$f_2(x_1y_1z_1) = z_1\varphi_5(x_1y_1z_1) + x_1^2y_1^2\varphi_6(x_1y_1z_1) + y_1^4\varphi_7(x_1y_1z_1) \qquad (3.6)$$

$$\varphi_k(0,\ 0,\ 0) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 7)$$

Нетрудно заметить, что подстановка (3.2) не понижает порядка членов правых частей системы (3.5). После преобразования (3.3) система получает вид

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{-1+\sqrt{1+4ay_2z_2}}{2az_2}=y_2-\frac{a_6}{c}y_2^2z_2+2\frac{a_6^2}{c^2}y_2^3z_2^2+\cdots,\ a=\frac{a_6}{c}$$

$$\frac{dy_2}{dt}=a_1x_1^2y_1+a_2x_1y_1^2+a_3y_1^3+a_5x_1y_1z_1+f_1(x_1y_1z_1)+2\ \frac{a_6}{c}[a_1x_1y_1^2z_1+a_2x_1y_1^3z_1+$$

$$+a_3y_1^4z_1+a_5x_1y_1^2z_1^2+a_6z_1^2y_1^3+y_1z_1f_1(x,y,z)]+\frac{a_6}{c}y_1^2f_2(x_1y_1z_1)$$

$$\frac{dz_2}{dt}=-cz_1+f_2(x_1y_1z_1)$$

Окончательно преобразованную систему можно записать, отбрасывая индексы, в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y+\Phi_1(yz)\\ \frac{dy}{dt}&=a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3+a_5xyz+\Phi_2(xyz)\\ \frac{dz}{dt}&=-cz+\Phi_3(xyz)\end{aligned}\tag{3.8}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_1(y,z)=\frac{-1+\sqrt{1+4ayz}}{2az}-y=-\frac{a^6}{c}zy^2+2\frac{a_6^2}{c^2}z^2y^3+\dots\\ \Phi_2(xyz)=z^2F_1(xyz)+x^2y^2F_2(xyz)+y^4F_3(xyz)+xy^3F_4(xyz)\\ \Phi_3(xyz)=zF_5(xyz)+x^2y^2F_6(xyz)+y^4F_7(xyz)\\ F_k(0,0,0)=0\qquad(k=1,\dots,7).\end{gathered}\tag{3.9}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(xyz)=\left\{y\left[\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\right]-\int_0^x a_1x^2\left[\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\right]dx-a_3y^2\int_0^x\left[\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\right]dx\right\}^2+$$
$$+y^2[\exp(-a_2x^2)]-y^3\left[\exp\left(-\frac{3}{2}a_3x^2\right)\right]\int_0^x(1+2a_3[\exp(-a_2x^2)])\left[\exp\left(\frac{3}{2}a_3x^2\right)\right]dx+\frac{z^2}{2c}\tag{3.10}$$

В окрестности невозмущенного движения при достаточно малых значениях переменных x и y знак этой функции определяется знаком полинома:

$$\left(y-\frac{a_1x^3}{3}-a_3xy^2\right)^2+y^2+\frac{z^2}{2c}.\tag{3.11}$$

Который может обращаться в нуль только тогда, когда одновременно

$$x=y=z=0.\tag{3.12}$$

Отсюда следует, что функция $V(x, y, z)$ является знакоопределенной положительной функцией переменных x, y, z. Полная производная от функции V по t, взятая в силу системы (3.8), имеет вид:

$$\frac{dv}{dt}=y^2\left\{2a_1x^2\exp(-a_2x^2)+4a_1a_3x_2\int_0^x\left[\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\right]dx\int_0^x a_1x^2\left[\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\right]dx\right\}+$$

$$+y^3\left[4a_1a_3x^2\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx-3a_1x^2\exp\left(-\frac{3}{2}a_3x^2\right)\times\right.$$

$$\times\int_0^x[1+2a_3\exp(-a_2x^2)]\exp\left(\frac{3}{2}a_3x^2\right)dx+4a_2a_3x\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx\int_0^x a_1x^2\times$$

$$\left.\times\text{epx}\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx\right]+y^4\left[-1-4a_2a_3x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx+\right.$$

$$+3(a_3-a_2)x\exp\left(-\frac{3}{2}a_3x^2\right)\int_0^x[1+2a_3\exp(-a_2x^2)]\exp\left(\frac{3}{2}a_3x^2\right)dx+$$

$$+4a_1a_3^2\left(\int_0^x\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)dx\right)^2+4a_3^2\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx\int_0^x a_1x^2\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx\Bigg]+$$

$$+y^5\left[-4a_3^2\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx+4a_2a_3^2x\left(\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx\right)^2-\right.$$

$$\left.-3a_3\exp\left(-\frac{3}{2}a_3x^2\right)\int_0^x[1+2a_3\exp(-a_2x^2)]\exp\left(\frac{3}{2}a_3x^2\right)dx\right]+$$

$$+y^64a_3^3\left(\int_0^x\exp\left(-\frac{a_2x^2}{2}\right)dx\right)^2-z^2+\frac{\partial V}{\partial x}\Phi_1(x,y,z)+\frac{\partial V}{\partial y}\Phi_2(x,y,z)+$$

$$+\frac{z}{c}\Phi_3(x,y,z)+\frac{\partial V}{\partial y}a_5xyz \qquad (3.13)$$

Для достаточно малых значений переменных x и y, эту производную можно записать в виде

$$\frac{dV}{dt}=2a_1x^2y^2[1+\gamma_1(xyz)]-y^4[1+\gamma_2(xyz)]-z^2[1+\gamma_3(xyz)]+\frac{\partial V}{\partial y}a_5xyz \qquad (3.14)$$

Здесь $\gamma_1(x,y,z)$, $\gamma_2(x,y,z)$, $\gamma_3(x,y,z)$ непрерывные, в окрестности невозмущенного движения функции переменных x,y,z, уничтожающиеся в точке $x=y=z=0$. В некоторой окрестности S_1 невозмущенного движения, где выполняются условия:

$$|\gamma_1(x,y,z)|<\delta, \quad |\gamma_2(x,y,z)|<\delta, \quad |\gamma_3(x,y,z)|<\delta, \quad \delta=\text{const}<1 \qquad (3.15)$$

будем иметь:

$$-2a_1x^2y^2[1+\gamma_1(x,y,z)]+y^4[1+\gamma_2(x,y,z)]+z^2[1+\gamma_3(x,y,z)]-\frac{\partial V}{\partial y}a_5xyz\geqslant$$

$$\geqslant(1-\delta)[-2a_1x^2y^2+y^4+z^2]-\frac{\partial V}{\partial y}a_5xyz\geqslant(1-\delta)[-2a_1x^2y^2+y^4+z^2-k|xyz|] \qquad (3.16)$$

где k есть максимальное значение $|a_5\partial V/\partial y|$ в некоторой окрестности S_2 невозмущенного движения. Функция

$$f(x,y,z)=-2a_1x^2y^2+z^2-k|xyz| \qquad (3.17)$$

является знакоопределенной положительной квадратичной формой относительно переменных $u=xy$, z при всех значениях k, отвечающих условию

$$k^2<-8a_1 \qquad (3.18)$$

Функция $f(xyz)$ уничтожается при $x=z=0$, $y\neq0$ или при $y=z=0$, $x\neq0$ и, следовательно, является знакопостоянной положительной функцией в смысле Ляпунова. Подберем теперь S_2 так, чтобы для k выполнялось условие (3.18). Пусть некоторая окрестность (S) невозмущенного движения целиком заключается как в S_1, так и в S_2. Тогда в окрестности (S) производная dv/dt будет представлять знакопостоянную отрицательную функцию переменных x, y, z, обращающуюся в нуль на прямой $y=z=0$. Мы доказали, таким образом, что построенная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения.

Можно показать, что асимптотическая устойчивость в рассматриваемом случае не имеет места. Мы убедимся в этом, рассматривая решение системы (3.8)

$$x\equiv x_0=\text{const}, \qquad y\equiv z\equiv0 \qquad (3.19)$$

Поступила 29 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Мат. сб. т. 17, вып. 2, стр. 253—333, 1893.
2. Каменков Г. В. Об устойчивости движения Казан. авиац. ин-т, № 9, 1939.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Гостехтеоретиздат, 1950.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения М., Гостехиздат, 1955.