К УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

Чжан Сы-Ин

(Москва — Шэньян)

В работах [1-4] [1] рассматривалось движение симметричного гироскопа, центр тяжести которого находится на оси собственного вращения, и были найдены разными методами достаточные условия устойчивости движения в двух случаях: (1) когда ось внешнего кольца вертикальна [1-3] (в [3] была доказана необходимость); (2) когда она горизонтальна [4].

В настоящей заметке на основании теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости движения доказана необходимость условия устойчивости в случае (2).

Выберем: X_1, Y_1, Z_1 — неподвижная система координат (Z_1 вертикальна), x, y, z — подвижная (z совпадает с осью собственного вращения).

Обозначим: J — моменты инерции внешнего кольца относительно неподвижной оси Z_1; A', B', C' — моменты инерции внутреннего кольца относительно осей x, y, z; $A = B, C$ — моменты инерции гироскопа относительно осей x, y, z; ζ — расстояние центра тяжести гироскопа от начала подвижной системы координат; θ — угол нутации гироскопа; ψ — угол поворота внешнего кольца вокруг оси Z_1, φ — угол собственного вращения гироскопа вокруг оси z; $\dot\theta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$ — соответствующие угловые скорости.

В случае (2) живая сила системы будет

$$T = \frac{1}{2} J\dot\psi^2 + \frac{1}{2}(A'\dot\theta^2 + B'\dot\psi^2 \sin^2\theta + C'\dot\psi^2\cos^2\theta) +$$
$$+ \frac{1}{2}[A\dot\theta^2 + A\dot\psi^2\sin^2\theta + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2]$$

Силовая функция системы $U = -mg\zeta\sin\theta\sin\psi$. Обозначим обобщенные координаты гироскопа через q_1, q_2, q_3, причем

$$\psi = q_1, \quad \theta = q_2, \quad \varphi = q_3$$

и обобщенные импульсы гироскопа через p_1, p_2, p_3; тогда функция Гамильтона системы запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\frac{(p_1 - p_3\cos\theta)^2}{(J + B'\sin^2\theta + C'\cos^2\theta + A\sin^2\theta)} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{(A + A')} + \frac{1}{2}\frac{p_3^2}{C} + mg\zeta\sin\theta\sin\psi$$

Канонические уравнения движения гироскопа

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

имеют первые интегралы

$$p_3 = \text{const}, \qquad H = \text{const}$$

Изучаемое невозмущенное движение гироскопа соответствует следующему частному решению канонических уравнений:

$$q_{10} = \frac{1}{2}\pi, \quad q_{20} = \frac{1}{2}\pi, \quad q_{30} = \dot q_{30}t; \qquad p_{10} = 0, \quad p_{20} = 0, \quad p_{30} = cr_0$$

где $\dot q_3 + \dot q_1\cos\theta = r_0$ — постоянная. Чтобы составить уравнения возмущенного движения, введем следующие обозначения:

$$q_i = q_{i0} + \xi_i, \qquad p_i = p_{i0} + \eta_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где ξ_i, η_i — отклонения.

Уравнения возмущенного движения имеют интеграл $H - H_0 = \text{const}$, где H и H_0 обозначают функцию Гамильтона, в которой положено соответственно

$$q_i = q_{i0} + \xi_i, \quad p_i = p_{i0} + \eta_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad q_i = q_{i0}, \quad p_i = p_{i0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

[1] См. также: Скимель В. Н. Некоторые задачи об устойчивости движения твердого тела. Автореферат диссертации. Казань, 1955.

Разложив $H - H_0$ в строку Тейлора, получим

$$H - H_0 = \frac{1}{2(J + B' + A)}(\eta_1 + p_{30}\xi_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta_2^2}{(A + A')} - \frac{1}{2}mg\zeta(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \ldots$$

Введем новые обозначения

$$\frac{1}{J + B' + A} = a, \qquad \frac{1}{A + A'} = b, \qquad mg\zeta = e, \qquad p_{30} = p$$

Тогда уравнения в вариациях Пуанкаре будут

$$\frac{d\xi_1}{dt} = a(\eta_1 + p\xi_2), \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = b\eta_2, \qquad \frac{d\xi_3}{dt} = 0$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = e\xi_1, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = (e - ap^2)\xi_2 - ap\eta_1, \qquad \frac{d\eta_3}{dt} = 0$$

Согласно этим уравнениям интеграл $H - H_0$ можно переписать в виде

$$H - H_0 = \frac{1}{2a}\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2b}\dot{\xi}_2^2 - \frac{e}{2}\xi_1^2 - \frac{e}{2}\xi_2^2 + \ldots$$

который не будет знакоопределенный, если $\zeta > 0$. Но видно, что в этом случае степень неустойчивости по Пуанкаре равняется двум. Следовательно, в силу теоремы Кельвина гироскопическая стабилизация возможна.

Уравнения в вариациях Пуанкаре имеют первый интеграл Н. Г. Четаева [5]

$$\Gamma = 2\left(\frac{e}{a}\dot{\xi}_1\xi_2 - \frac{e}{b}\xi_1\dot{\xi}_2\right) - pe(\xi_1^2 + \xi_2^2) +$$
$$+ \frac{e(a - b)}{2abp}\left(\frac{1}{a}\dot{\xi}_1^2 - \frac{1}{b}\dot{\xi}_2^2 + e\xi_2^2 - e\xi_1^2\right) = \text{const}$$

Функция Ляпунова $p(H - H_0) - \Gamma$ будет положительно определенной, если выполняется условие

$$(abp^2 - eb - ea)^2 - 4e^2ab > 0$$

или

$$c^2r_0^2 > mg\zeta\left[(J + 2A + A' + B) \pm 2\sqrt{(J + B' + A)(A + A')}\right]$$

Если интеграл $\Gamma = \text{const}$ можно продолжить на уравнения возмущенного уравнения, то это неравенство будет достаточным условием устойчивости [4].

Докажем теперь необходимость этого условия. Рассмотрим функцию

$$V = e\xi_1\xi_2 - b\eta_1\eta_2$$

Производная этой функции в силу уравнений возмущенного движения будет

$$\frac{dV}{dt} = e\dot{\xi}_1\xi_2 + e\xi_1\dot{\xi}_2 - b\dot{\eta}_1\eta_2 - b\eta_1\dot{\eta}_2 = aep\xi_2^2 + (abp^2 - be + ae)\xi_2\eta_1 + abp\eta_1^2 + \ldots$$

Легко видеть, что если выполняется неравенство

$$4e^2ab - (abp^2 - eb - ea)^2 > 0$$

то dV/dt будет положительно определенной, V может принять положительное значение; согласно теореме Четаева о неустойчивости движения вытекает, что невозмущенное движение неустойчиво. Тем самым необходимость доказана.

В работе В. Н. Скимеля (см. сноску на стр. 604) указана необходимость этого условия исследованием корней характеристического уравнения, отвечающего системе уравнений возмущенного движения.

Поступила 30 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
2. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе, I. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе, II. ПММ, т. XXII, вып. 4, 1958.
5. Четаев Н. Г. О некоторых задачах об устойчивости в механике. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1955.
7. Румянцев В. В. К устойчивости переменных вращений твердого тела около неподвижной точки. ПММ, т. XXI, вып. 3, 1957.