Замечание. Теорема 1 остается справедливой и в том случае, если первые части системы (1) зависят от времени.

Теоремы 2, 3 в этом случае заведомо справедливы, если правые части системы (1) ограничены, а под знакоопределенной функцией в области определения понимать знакоопределенную функцию в смысле Н. Г. Четаева [3].

Поступила 23 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Одна теорема о неустойчивости. Докл. АН СССР, № 9, 1934.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1955.
4. Малкин И. Г. Некоторые вопросы общей теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. КАИ, № 7, Казань, 1939.
5. Moiseiev N. Über Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnüng. Mathematische reitschrift, Berlin, 1937.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

И. В. Ливартовский

(Москва)

Устойчивость периодического решения системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \tag{0.1}$$

с разрывными периодическими $[f(z, t+\tau) \equiv f(z, t)]$ правыми частями [z и f n-мерные векторы-столбцы с координатами z_i и f_i $(i = 1, \ldots, n)$] исследована М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером в [1]. Установив, что следует понимать под линейным приближением в этом «разрывном» случае, авторы доказали теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова.

В настоящей статье исследуется устойчивость любого (периодического и непериодического) решения системы (0.1) с разрывными непериодическими правыми частями. При этом используется условие разрывов решения линейного приближения, введенное в работе [1] для периодических систем. Устанавливаются два критерия устойчивости, являющиеся обобщениями соответствующих теорем К. П. Персидского [2] и О. Перрона [3], доказанных авторами для непрерывных систем.

§ 1. **Условия, налагаемые на правые части дифференциальных уравнений**. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \tag{1.1}$$

где вещественная вектор-функция $f(z, t)$ задана в $n+1$-мерном пространстве zt внутри криволинейного цилиндра C, осью которого является интегральная кривая $z=z^\circ(t)$ системы (1.1). Пусть бесконечная последовательность поверхностей [1] $F_\alpha(z, t)=0$ рассекает цилиндр C на области H_α, пересекая кривую $z = z^\circ(t)$ при $t = t_\alpha$ в точках M_α. При этом существует такая положительная постоянная T, что $t_{\alpha+1} - t_\alpha \geqslant T > 0$.

Плоскости $t = t_\alpha$ рассекают области H_α на угловые области, заключенные между этими плоскостями и соответствующими поверхностями $F_\alpha = 0$, и на центральные области, содержащие отрезки интегральной кривой $z = z^\circ(t)$. Относительно функции f и поверхностей $F_\alpha = 0$ делаются следующие предположения.

1. Функция f непрерывна в каждой области H_α (включая границы $F_\alpha = 0$ и $F_{\alpha+1} = 0$), а при переходе через поверхности $F_\alpha = 0$ может испытывать только разрывы 1-го рода, величины которых ξ_α в точках M_α ограничены в своей совокупности.

2. Выполняются условия, обеспечивающие в каждой области H_α единственность решения системы (1.1) при заданных начальных условиях и непрерывную зависи-

---

[1] Здесь и всюду далее индекс α пробегает значения $1, 2, \ldots, \infty$.

мость его от начальных условий, а также условия беспрепятственного продолжения интегральных кривых из любой области H_α в смежную $H_{\alpha+1}$.

3. В каждой центральной области

$$f(z, t) - f[z^\circ(t), t] = \mathrm{P}(t)[z - z^\circ(t)] + \mathrm{R}(z, t) \tag{1.2}$$

где $\mathrm{P}(t)$ — непрерывная в каждом интервале[1] $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ и ограниченная при $t \geqslant 0$ матрица, $R(z, t)$ — нелинейный остаток, удовлетворяющий неравенству

$$|\mathrm{R}(z, t)| < a|z - z^\circ(t)| \qquad (t \geqslant 0,\ a = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем $|z| = (z_1^2 + \ldots + z_n^2)^{1/2}$.

4. Имеющее место в любой угловой области, расположенной под плоскостью $t = t_\alpha$ и над этой плоскостью, предельное соотношение

$$f(z, t) - f[z^\circ(t), t] \to \xi_\alpha, \quad \text{и } f(z, t) - f[z^\circ(t), t] \to -\xi_\alpha \quad \text{при } (z, t) \to M_\alpha$$

выполняется равномерно относительно α.

5. Поверхности $F_\alpha = 0$ — непрерывные, а в точках M_α — гладкие. По одну сторону поверхности $F_\alpha = 0$ имеют место $F_\alpha > 0$, а по другую $F_\alpha < 0$. Внутри цилиндра C поверхности $F_\alpha = 0$ не пересекаются друг с другом.

6. Вдоль интегральной кривой $z = z^\circ(t)$

$$\left(\frac{dF_\alpha}{dt}\right)^- \neq 0, \qquad \frac{(dF_\alpha / dt)_{M_\alpha}^+}{(dF_\alpha / dt)_{M_\alpha}^-} \geqslant \Gamma > 0 \quad (\Gamma = \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = \left(\frac{dF_\alpha}{\partial z} f + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\right)_{z=z^\circ(t)}$$

при этом $dF_\alpha / \partial z$ — вектор-градиент (строка), а индексы плюс и минус относятся соответственно к значениям при $t = t_\alpha + 0$ и $t = t_\alpha - 0$.

Согласно (1.4) уравнения частей поверхности $\Phi_\alpha(x, t) \equiv F_\alpha(z^\circ + x, t) = 0$, расположенных под плоскостью $t = t_\alpha$ и над этой плоскостью, могут быть записаны соответственно в виде $[x = z - z^\circ(t)]$

$$t_\alpha - t = h_\alpha^- x + 0(|x|), \qquad t - t_\alpha = h_\alpha^+ x + 0(|x|) \tag{1.5}$$

где вектор-строка

$$h_\alpha^\pm = \left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \Big/ \left(\frac{dF_\alpha}{dt}\right)^\pm\right]_{M_\alpha}$$

7. Величины h_α^- ограничены в своей совокупности. Соотношение в (1.10)

$$\frac{0(|x|)}{|x|} \to 0 \quad \text{при } |x| \to 0 \tag{1.6}$$

выполняется равномерно относительно α.

§ 2. **Линейное приближение и его преобразование.** Линейное приближение системы (1.1) определим как совокупность: 1) системы линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{P}(t)\, x \tag{2.1}$$

которым удовлетворяет решение $x = x(t)$ внутри каждого интервала $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$, и 2) условий разрывов при $t = t_\alpha$ интегральных кривых $x = x(t)$, определяемых формулами

$$x_\alpha^+ = S_\alpha x_\alpha^- \tag{2.2}$$

где матрица

$$\mathrm{S}_\alpha = \|(\mathrm{S}_\alpha)_{ik}\|_1^n, \qquad (\mathrm{S}_\alpha)_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{\alpha i} h_{\alpha k}^-$$

δ_{ik} — символ Кронекера, $h_{\alpha k}^-$ и $\xi_{\alpha i}$ — соответствующие координаты векторов h_α^- и ξ_α. Матрицы S_α являются ограниченными в своей совокупности.

---

[1] Говоря об интервалах $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$, будем иметь в виду и интервал $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Для доказательства критерия устойчивости по линейному приближению понадобится следующая лемма.

Лемма. Для всякой системы линейного приближения (2.1) + (2.2) можно построить разрывное при $t = t_\alpha$ преобразование Ляпунова [1]

$$x = \mathrm{L}(t)\, y \tag{2.3}$$

приводящее ее к системе с непрерывной и ограниченной при $t \geqslant 0$ матрицей коэффициентов $\mathrm{A}(t)$ и непрерывными решениями

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{A}(t)\, y, \qquad y_\alpha^+ = y_\alpha^- \tag{2.4}$$

Доказательство. Зададим значения $\mathrm{L}(t)$ и $d\mathrm{L}/dt$ при $t = t_\alpha \pm 0$ формулами

$$\mathrm{L}_\alpha^- = E, \qquad (d\mathrm{L}/dt)_\alpha^- = 0 \qquad (E = \| \delta_{ik} \|_1^n) \tag{2.5}$$

$$\mathrm{L}_\alpha^+ = \mathrm{S}_\alpha \qquad (d\mathrm{L}/dt)_\alpha^+ = \mathrm{P}_\alpha^+ \mathrm{S}_\alpha - \mathrm{S}_\alpha \mathrm{P}_\alpha^- \tag{2.6}$$

Соотношения (2.6) обеспечивают непрерывность матрицы $A(t)$ и решения $y = y(t)$ системы (2.4) при $t = t_\alpha$.

Для доказательства леммы достаточно построить матрицу $\mathrm{L}(t)$ по заданным при $t = t_\alpha \pm 0$ значениям (2.5) и (2.6) ее и ее производной так, чтобы в каждом интервале $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ существовали непрерывные матрицы $\mathrm{L}^{-1}(t)$ и dL/dt, ограниченные при $t \geqslant 0$ вместе с $\mathrm{L}(t)$.

Для существования же и ограниченности при $t \geqslant 0$ матрицы $\mathrm{L}^{-1}(t)$ достаточно, чтобы искомая ограниченная матрица $\mathrm{L}(t)$ удовлетворяла соотношению

$$\det \mathrm{L}(t) \geqslant \Gamma > 0 \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.7}$$

Это условие выполняется при $t = t_\alpha + 0$ в силу (1.4), так как из структуры матрицы S_α (см. [1], стр. 662) следует, что

$$\det \mathrm{L}_\alpha^+ = \det \mathrm{S}_\alpha = \frac{(dF_\alpha/dt)_{M_\alpha^+}}{(dF_\alpha/dt)_{M_\alpha^-}}$$

Условие (2.7) выполняется также и для $t = t_\alpha - 0$, если принять в (1.4) $\Gamma < 1$.

Перейдем теперь к определению значений матрицы $\mathrm{L}(t)$ внутри интервалов $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$. Для этого, рассматривая вертикаль s_k матрицы S_α как вектор в n-мерном пространстве, возьмем параллелепипед, построенный из начала координат на векторах $s_1, \ldots, s_n$ (как на ребрах), и будем непрерывно изменять координаты этих векторов, сохраняя постоянными длины их и увеличивая при этом объем параллелепипеда таким образом, чтобы он при $t = t_{\alpha_1} = t_\alpha + {}^1/_4 (t_{\alpha+1} - t_\alpha)$ превратился в прямоугольный.

Текущие значения координат l_{ik} векторов s_k при этом преобразовании примем в качестве элементов матрицы $\mathrm{L}(t) = \| l_{ik}(t) \|_1^n$ в соответствующих интервалах $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha_1}$. Тогда при $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha_1}$

$$\sum_{i=1}^{n} | l_{ik} |^2 \leqslant r^2, \quad \det \mathrm{L}(t) \geqslant \Gamma > 0, \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ 1 < r < \infty,\ \mathrm{r} = \mathrm{const}) \tag{2.8}$$

Сохраняя за текущими значениями координат векторов прежние обозначения $l_{ik}(t)$ и принимая их далее в качестве элементов искомой матрицы $\mathrm{L}(t)$, выполним еще три преобразования:

1) за интервалы времени $t_{\alpha_1} \leqslant t \leqslant t_{\alpha_2} = t_\alpha + {}^1/_2 (t_{\alpha+1} - t_\alpha)$ растяжением ребер до длины r превратим прямоугольные параллелепипеды в кубы;

2) за интервалы времени $t_{\alpha_2} \leqslant t \leqslant t_{\alpha_3} = t_\alpha + {}^3/_4 (t_{\alpha+1} - t_\alpha)$ повернем кубы так, чтобы их ребра стали параллельными осям координат;

3) и, наконец, за последние интервалы времени $t_{\alpha_3} \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ сожмем ребра кубов до единичной длины: этим выполняется условие $\mathrm{L}_\alpha^- = E$.

---

[1] За исключением разрывности при $t = t_\alpha$, свойства матрицы $L(t)$ такие же, как и в классическом случае, т. е. в каждом интервале $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ существуют непрерывные матрицы L^{-1} и dL/dt, которые, так же как и L, ограничены при $t \geqslant 0$.

В перечисленных преобразованиях мы соединяли непрерывными дугами кривых и отрезками прямых пары точек n-мерного пространства таким образом, что все время выполнялись неравенства (2.8).

Из самого процесса построения этих дуг и прямых следует, что они ограничены по длине для всех α. Так как, кроме того, время, за которое эти дуги проходятся, больше ${}^1/_4T > 0$, то прохождение дуг можно выполнить со скоростями, величины которых ограничены одним и тем же постоянным числом для всех α. При этом в каждом интервале начинать и кончать движения по дугам можно с нулевыми скоростями.

Для того чтобы матрица $d\mathrm{L}/dt$ принимала заданные формулами (2.6) значения при $t=t_\alpha+0$ заменим графики функций $l_{ik}=l_{ik}(t)$ $(i, k=1, \ldots, n)$ близкими гладкими кривыми, совпадающими с первоначальными при $t=t_\alpha+0$ и в интервалах $t_\alpha+t/2 \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ таким образом, чтобы для функций, за которыми сохранили прежние обозначения $l_{ik}(t)$, представляющих новые кривые, выполнялись равенства (2.6). Так как величина определителя $\det L(t)$ является непрерывной функцией его элементов, а матрицы $(d\mathrm{L}/dt)_\alpha^+$ ограничены в своей совокупности, то новые кривые могут быть проведены таким образом, чтобы заведомо выполнялись неравенства

$$|l_{ik}(t)| \leqslant 2r, \qquad \det \mathrm{L}(t) \geqslant {}^1/_2\Gamma > 0 \qquad (i, k=1, \ldots, n;\ t \geqslant 0)$$

и чтобы при этом не нарушалась также и ограниченность матрицы $d\mathrm{L}/dt$ при $t \geqslant 0$. Лемма доказана.

Примечание. Обычно для определения преобразования Ляпунова необходимо знание решений соответствующей системы дифференциальных уравнений (см. [4]—[6]). В рассматриваемом же случае для построения преобразования $x=\mathrm{L}(t)\,y$ достаточно лишь задать матрицы S_α и $\mathrm{P}(t_\alpha \pm 0)$.

§ 3. Критерии устойчивости по линейному приближению. *Теорема 1.* Если элементы нормированной при $t=t_0$ фундаментальной матрицы $\|x_{ik}(t, t_0)\|_1^n$ $(x_{ik}(t_0, t_0)=\delta_{ik})$ системы линейного приближения (2.1) + (2.2) при любых $t_0 \geqslant 0$ и $t \geqslant t_0$ удовлетворяют соотношениям

$$|x_{ik}(t, t_0)| < B \exp[-\beta(t-t_0)] \qquad (i, k=1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где B и β — не зависящие от t_0 положительные постоянные, то решение $z=z^\circ(t)$ исходной нелинейной системы (1.1) асимптотически устойчиво, если только постоянная a в неравенстве (1.3) достаточно мала.

Для доказательства теоремы применим к исходной нелинейной системе (1.1), записанной в отклонениях $x=z-z^\circ(t)$, преобразование (2.3). Получим систему

$$\frac{dy}{dt}=q(y, t), \qquad q(y, t)=\mathrm{L}^{-1}\left[f(z^\circ+\mathrm{L}\,y,\ t)-f(z^\circ, t)-\frac{dL}{dt}\,y\right] \tag{3.2}$$

с разрывными при $t=t_\alpha$ решениями так как при этих значениях разрывна матрица $\mathrm{L}(t)$. В пространстве yt поверхности $Q_\alpha(y, t) \equiv \Phi_\alpha(\mathrm{L}y, t)=0$ и плоскости $t=t_\alpha$ так же, как и в пространстве zt, разбивают цилиндр C на угловые и центральные области.

Система линейного приближения (2.1) + (2.2) в переменных y запишется в виде (2.4). Из соотношений (3.1) и ограниченности матриц L и L^{-1} следует, что элементы нормированной при $t=t_0$ фундаментальной матрицы $\|y_{ik}(t, t_0)\|_1^n$ системы (2.4) удовлетворяют для любых $t_0 \geqslant 0$ и $t \geqslant t_0$ неравенствам

$$|y_{ik}(t, t_0)| < B_1 \exp[-\beta(t-t_0)] \qquad (i, k=1, \ldots, n)$$

где B_1 и β — не зависящие от t_0 положительные постоянные. При выполнении последних соотношений, как показал И. Г. Малкин [5], существует определенно-положительная квадратичная форма $V(y, t)$ с непрерывными и ограниченными коэффициентами, удовлетворяющая соотношениям

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) Ay + \frac{\partial V}{\partial t} = -|y|^2 \tag{3.3}$$

$$b_1|y|^2 \leqslant V(y, t) \leqslant b_2|y|^2 \qquad (t \geqslant 0,\ 0 < b_1 < 1 < b_2) \tag{3.4}$$

Проследим за изменением значений $V(y,t)$ вдоль разрывных интегральных кривых $y=y(t)$ системы (3.2).

1. *В центральной области.* В силу (1.2), (1.3) и (3.2) имеем

$$q(y,t)=A(t)\,y+R^*(y,t),\qquad R^*(y,t)=L^{-1}R(Ly+z^\circ,t),\qquad |R^*|<a_1|y|$$

где $a_1=am$, $m>0$ — конечная величина в силу ограниченности L и L^{-1}. Обозначив через V' полную производную V по t, составленную в силу уравнений (3.2), получим согласно (3.3) и (3.4)

$$\frac{V'}{V}=-\frac{1}{V}|y|^2+\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y}R^*\leqslant-\frac{1}{b_2}+\frac{a_2}{b_1}$$

где $a_2=a_1\sup|\partial V/\partial y|\,|y|^{-1}$ при $t\geqslant 0$. Так как коэффициенты формы V ограничены, то a_2 является конечной величиной. Полагая постоянную a в (1.3) настолько малой, что $a_2b_2<b_1$, получим

$$\frac{V'}{V}\leqslant-\mu^2\qquad\left(\mu^2=\frac{1}{b_2}-\frac{a_2}{b_1}\right)\tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что значения V в моменты времени t и t^* $(t^*<t)$, когда точка интегральной кривой находится в одной центральной области, удовлетворяют соотношению

$$V\leqslant V^*\exp\left[-\mu^2(t-t^*)\right]\tag{3.6}$$

2. *В угловой области.* Применяя схему оценок, аналогичную приведенной в работе [1], и учитывая свойства формы V, а также условия 4, 6 и 7 (§ 1) получим, что значения V в моменты t и t^{**}, когда точка интегральной кривой находится в одной и той же угловой области, удовлетворяют при достаточно малых y неравенству

$$V<NV^{**}\quad(N>1)\tag{3.7}$$

где N — не зависит от α.

Кроме того, если интегральная кривая проходит от точки y_1, t_1 на поверхности разрыва $Q_\alpha=0$ до точки y_α, t_α на плоскости $t=t_\alpha$, то при достаточно малых y

$$\exp(-\theta)<\frac{V(y_\alpha^+,t_\alpha)}{V(y_1,t_1)}<\exp\theta\tag{3.8}$$

где θ — сколь угодно малое положительное число.

Пусть теперь задано $\varepsilon>0$ столь малое, что при $|y|^2\leqslant\varepsilon$ выполняются неравенства (3.6), (3.7), (3.8) и время Δt пребывания в любой угловой области (внутри цилиндра $|y|^2=\varepsilon$) меньше $(1/2\mu^2)\,T(\mu^2-\nu^2)$, где $0<\nu<\mu$. Тогда плоскости $t=t_\alpha^*={}^1/_2(t_{\alpha+1}+t_\alpha)$ внутри цилиндра $|y|^2=\varepsilon$ не пересекают угловых областей.

Выберем $\delta=\varepsilon b_1/N$, $\theta<{}^1/_2(\mu^2-\nu^2)\,T$ и начальную точку (y_0,t_1^*) интегральной кривой так, чтобы $b_2|y_0|^2<\delta$. В силу (3.4)

$$V_1=V_{t=t_1^*}\leqslant b_2|y_0|^2<\delta=\frac{\varepsilon b_1}{N}$$

Из неравенств (3.6) и (3.7) следует, что в интервале $t_1^*\leqslant t\leqslant t_2^*$ коэффициент возрастания функции $V(y,t)$ не превосходит N, поэтому во всем этом интервале $V(y,t)<\varepsilon b_1$, и согласно (3.4) будет $|y|^2<\varepsilon$.

Пользуясь неравенствами (3.6) и (3.8) и соотношениями $t_{\alpha+1}-t_\alpha\geqslant T$, получим

$$V_2=V_{t=t_2^*}\leqslant V_1\exp\left[-\mu^2(T-\Delta t)+\theta\right]<V_1\exp(-\nu^2T)$$

т. е. $V_2<V_1<\delta$. Поэтому можно повторить приведенные выше рассуждения для интервала $t_2^*\leqslant t\leqslant t_3^*$ и т. д.

Следовательно, любая интегральная кривая нелинейной системы (3.2), начавшаяся при $t=t^*$ внутри цилиндра $|y|^2=\delta/b_2$, будет все время находиться внутри цилиндра $|y|^2=\varepsilon$ и

$$V_\alpha=V_{t=t_\alpha^*}\leqslant V_1\exp\left[-(\alpha-1)\,\nu^2T\right]$$

Поэтому в каждом интервале $t_\alpha^*\leqslant t\leqslant t^*_{\alpha+1}$

$$b_1|y|^2\leqslant V\leqslant NV_\alpha\leqslant Nb_2|y_0|^2\exp\left[-(\alpha-1)\,\nu^2T\right.$$

и $y\to 0$ при $t\to\infty$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если для произвольной, ограниченной при $t \geqslant 0$ и кусочно-непрерывной вектор-функции $\omega(t)$ с разрывами лишь при $t = t_\alpha$: $\omega_\alpha^+ = S_\alpha \omega_\alpha^-$ любое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x + \omega(t) \tag{3.9}$$

удовлетворяющее этим уравнениям внутри каждого интервала $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ и испытывающие разрывы при $t = t_\alpha$, для которых $x_\alpha^+ = S_\alpha x_\alpha^-$ ограничено при $t \geqslant 0$, то решение $z = z^\circ(t)$ нелинейной системы (1.1) асимптотически устойчиво, если только постоянная a в неравенстве (1.3) достаточно мала.

Для доказательства теоремы применим к системе (3.9) преобразование (2.3), а затем к полученной системе применим преобразование О. Перрона [6] $y = L_1 u$ (L_1 — непрерывная матрица Ляпунова), приводящее ее к виду

$$\frac{du}{dt} = G(t)\,u + \omega^*(t) \qquad (\omega^* = L_1^{-1} L^{-1} \omega) \tag{3.10}$$

где $G(t) = \| g_{ik} \|_1^n$ — ограниченная и непрерывная при $t \geqslant 0$ треугольная матрица, т. е. $g_{ik}(t) \equiv 0$, для $k > i$.

Из ограниченности всех решений системы (3.9) следует ограниченность любого решения системы (3.10) при произвольной непрерывной ограниченной $\omega^*(t)$ $(t \geqslant 0)$, что в свою очередь влечет согласно О. Перрону [3] ограниченность всех $2n$ функций:

$$\exp \int_{t_0}^{t} g_{ii}(\tau)\,d\tau, \qquad \exp\left[\int_{t_0}^{t} g_{ii}(\tau)\,d\tau\right] \int_{t_0}^{t} \exp\left[-\int_{t_0}^{\tau} g_{ii}(t)\,dt\right] d\tau \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

При ограниченности же функций (3.11), как показал И. Г. Малкин [7], существует определенно-положительная функция, допускающая бесконечно малый высший предел, полная производная которой по времени, составленная в силу системы

$$\frac{du}{dt} = G(t)\,u \tag{3.12}$$

есть функция определенно-отрицательная.

Но тогда по теореме К. П. Персидского [2] элементы нормированной при $t = t_0$ фундаментальной матрицы $U(t, t_0) = \| u_{ik}(t, t_0) \|_1^n$ системы (3.12) удовлетворяют при любых $t_0 \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$ соотношениям

$$| u_{ik}(t, t_0) | < B_1 \exp[-\beta (t - t_0)] \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{3.13}$$

где B_1 и β — положительные постоянные, не зависящие от t_0.

Если $X(t, t_0) = \| x_{ik}(t, t_0) \|_1^n$ нормированная при $t = t_0$ фундаментальная матрица системы (3.9) при $\omega(t) \equiv 0$, то из (3.13) получаем для любых $t_0 > 0$, $t \geqslant t_0$

$$| x_{ik}(t, t_0) | \leqslant B \exp[-\beta (t - t_0)] \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

где B и β — положительные постоянные, не зависящие от t_0.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 выполняются также условия теоремы 1. Этим теорема 2 доказана.

Поступила 10. VI 1958

Московский
физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, т. XXI, вып. 5, 1957.
2. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. Физ.-мат. об-ва при Казанском гос. университете, т. VIII, 1936—1937.
3. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Zs., Bd. 32, 1930.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1946.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
6. Perron O. Über ein Matrixtransformation. Math. Zs., Bd. 32, 1930.
7. Малкин И. Г. Об устойчивости по первому приближению. Сб. научн. тр. Казан. авиац. ин-та, № 3, 1935.