# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Ю. М. Филимонов**

(Нижний Тагил)

В работе предлагается несколько теорем об устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка в смысле А. М. Ляпунова [1]. Как на источники данной работы можно указать работы [2–5].

Введем некоторые понятия. Пусть функции $V_1(x, y) \ldots V_n(x, y)$ определены, непрерывны и однозначны соответственно в областях $G_1, \ldots, G_n$. Взаимное расположение этих областей таково, что две последующие области $G_1, \ldots, G_n, G_1$ содержат некоторую единственную жорданову кривую, проходящую через начало координат (такие кривые будем называть $L$-кривыми). Относительно функций $V_k(x, y)$ $(k = 1, \ldots, n)$ предполагается далее: они положительны в областях определения, за исключением начала координат, где обращаются в нуль; на граничных кривых эти функции изменяются строго монотонно.

В этих условиях существует такая окрестность начала координат, что, исходя из любой точки $A$, расположенной в этой окрестности и на $L$-кривой, можно построить, выбрав определенное направление обхода начала координат, связную кривую, состоящую из кусков, на которых одна из рассматриваемых функций принимает постоянное значение. Построенная таким образом кривая вновь пересечет $L$-кривую в некоторой точке $B$, которая, вообще говоря, не совпадает с точкой $A$. Если предположить, что в рассматриваемой окрестности такое совпадение невозможно, и через $V(A)$, $V(B)$ обозначить значения одной из функций, определенных на исходной $L$-кривой, соответственно в точках $A$ и $B$, то будет иметь место одно из неравенств $V(A) < V(B)$ или $V(A) > V(B)$. Пусть, например, первое. В силу сделанных предположений относительно функций $V_k(x, y)$ $(k = 1, \ldots, n)$ смысл полученного неравенства не изменится, на какой бы $L$-кривой точку $A$ ни брать, если придерживаться одного и того же направления обхода начала координат при построении кривых.

*Определение.* Фиксировав определенное направление, скажем, что совокупность функций $V_k(x, y)$ $(k = 1, \ldots, n)$ обладает положительным или отрицательным вращением в зависимости от того, имеет ли место первое или второе неравенство.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{1}$$

Предполагается, что $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ — функции, непрерывные в некоторой окрестности начала координат, и обращаются в нуль, когда $x = y = 0$.

*Теорема 1.* Если для системы (1) возможно найти две совокупности функций, обладающих противоположным вращением и таких, что производная по времени каждой функции, составленная в силу (1),— функция отрицательная или тождественный нуль в области определения, то нулевое решение системы (1) устойчиво.

*Доказательство.* Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что одна из $L$-кривых совокупностей функций — общая. Исходя из точки $A$, расположенной на этой $L$-кривой, на базе функций, образующих совокупность функций с положительным вращением, построим кривую, о которой шла речь выше. Эта кривая вновь пересечет $L$-кривую в некоторой точке $B$.

Исходя из точки $B$ на базе функций, образующих совокупность с отрицательным вращением, строим аналогичную кривую. Последняя необходимо пересечет первую до того, как вторично пересечет исходную $L$-кривую, так как совокупности функций обладают противоположным вращением.

В результате этого построения получим замкнутую кривую, состоящую из кусков, на которых одна из рассматриваемых функций принимает постоянное значение. Так как диаметр подобной кривой может быть сделан сколь угодно малым (отметим для общего случая, что именно этот факт и только он используется в доказательстве), то для доказательства теоремы достаточно показать, что интегральные кривые с начальными данными из областей, ограниченных такими замкнутыми кривыми, не покидают эти области. Но это следует из того, что любую точку такой замкнутой кривой $(x_0, y_0)$ можно заключить в столь малую круговую окрестность, что для всех функций $V(x, y)$, входящих в состав совокупностей и определенных в этой окрестности, в силу тождества

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt, \qquad V_0 = V(x_0, y_0) \tag{2}$$

и условий теоремы будет $V \leqslant V_0$, пока интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0, y_0)$, остается в указанной окрестности.

*Замечание.* Нетрудно видеть, что особая точка типа «центр» не может быть обнаружена при помощи теоремы 1.

*Теорема 2.* Если для системы (1) возможно найти две совокупности функций, обладающих противоположным вращением и таких, что производная по времени каждой функции, составленная в силу системы (1),— функция, определенно-отрицательная в области определения, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* На основании теоремы 1 названное решение устойчиво. Предположим, что оно неасимтотически устойчиво: в любой как угодно малой окрестности начала координат существует интегральная кривая, полностью расположенная в кольце, не содержащем начала координат. Такая интегральная кривая не может неограниченно долго оставаться в одной из областей определения функций, входящих в состав совокупностей (2).

Следовательно, она какую-нибудь $L$-кривую пересекает бесчисленное число раз. Из множества точек пересечений выделим сходящуюся последовательность $\{P_k\}$. Предел этой последовательности в силу предположения о поведении интегральной кривой отличен от начала координат. Обозначим его через $P$. Рассмотрим круг с центром в точке $P$ столь малого радиуса $\delta$, чтобы внутри его были определены все функции $V$ рассматриваемых совокупностей, которые определены в точке $P$.

Так как эти функции непрерывны, то вдоль последовательности $\{P_k\}$ каждая из них должна иметь определенный предел. Но, обозначив через $V_k$ значения функций в точке $P_k$, $V_\delta$ — значения функций в точке, через которую интегральная кривая покидает упомянутый круг в момент, непосредственно следующий за моментом пересечения интегральной кривой $L$-кривой в точке $P_k$, для достаточно больших значений $k$ в силу условий теоремы будет

$$|V_\delta - V_k| \geqslant \frac{\delta' m}{M}$$

Здесь $\delta'$ — некоторое положительное число, меньшее $\delta$ и не зависящее от $k$; $m$ — наименьшие наименьших значений функций $|dV/dt|$, а $M$ — наибольшее значение $\sqrt{X^2+Y^2}$ в том же круге [$X$, $Y$ — правые части системы (1)].

Далее из условия, что производные по времени, составленные в силу системы (1), от функций, составляющих совокупности,— функции, знакоопределенные в областях определения, заключаем: через каждую точку, расположенную в достаточно малой окрестности начала координат, проходит замкнутая кривая, о которой шла речь в доказательстве теоремы 1.

Отсюда и на основании полученного неравенства выводим, что по крайней мере для двух функций, определенных в указанной окрестности точки $P$, имеет место неравенство

$$|V_{k+1} - V_k| \geqslant h$$

где $h$ — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $k$. А это противоречит тому, что все числовые последовательности $\{V_k\}$ должны иметь определенные пределы. Имея в виду кольца, которые можно образовать из упомянутых выше замкнутых кривых, приходим к доказательству теоремы.

*Теорема 3.* Если для системы (1) возможно найти две совокупности функций, обладающих противоположным вращением и таких, что производная во времени каждой функции, составленная в силу системы (1),— функция определенно-положительная в области определения, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

*Замечание.* Теорема 1 остается справедливой и в том случае, если первые части системы (1) зависят от времени.

Теоремы 2, 3 в этом случае заведомо справедливы, если правые части системы (1) ограничены, а под знакоопределенной функцией в области определения понимать знакоопределенную функцию в смысле Н. Г. Четаева [3].

Поступила 23 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Одна теорема о неустойчивости. Докл. АН СССР, № 9, 1934.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1955.
4. Малкин И. Г. Некоторые вопросы общей теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. КАИ, № 7, Казань, 1939.
5. Moiseiev N. Über Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnüng. Mathematische reitschrift, Berlin, 1937.

---

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

**И. В. Ливартовский**

(Москва)

Устойчивость периодического решения системы уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \tag{0.1}$$

с разрывными периодическими $[f(z, t+\tau) \equiv f(z, t)]$ правыми частями $[z$ и $f$ $n$-мерные векторы-столбцы с координатами $z_i$ и $f_i\,(i = 1, \ldots, n)]$ исследована М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером в [1]. Установив, что следует понимать под линейным приближением в этом «разрывном» случае, авторы доказали теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова.

В настоящей статье исследуется устойчивость любого (периодического и непериодического) решения системы (0.1) с разрывными непериодическими правыми частями. При этом используется условие разрывов решения линейного приближения, введенное в работе [1] для периодических систем. Устанавливаются два критерия устойчивости, являющиеся обобщениями соответствующих теорем К. П. Персидского [2] и О. Перрона [3], доказанных авторами для непрерывных систем.

§ 1. **Условия, налагаемые на правые части дифференциальных уравнений.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \tag{1.1}$$

где вещественная вектор-функция $f(z, t)$ задана в $n+1$-мерном пространстве $zt$ внутри криволинейного цилиндра $C$, осью которого является интегральная кривая $z = z^\circ(t)$ системы (1.1). Пусть бесконечная последовательность поверхностей [1] $F_\alpha(z, t) = 0$ рассекает цилиндр $C$ на области $H_\alpha$, пересекая кривую $z = z^\circ(t)$ при $t = t_\alpha$ в точках $M_\alpha$. При этом существует такая положительная постоянная $T$, что $t_{\alpha+1} - t_\alpha \geqslant T > 0$.

Плоскости $t = t_\alpha$ рассекают области $H_\alpha$ на угловые области, заключенные между этими плоскостями и соответствующими поверхностями $F_\alpha = 0$, и на центральные области, содержащие отрезки интегральной кривой $z = z^\circ(t)$. Относительно функции $f$ и поверхностей $F_\alpha = 0$ делаются следующие предположения.

1. Функция $f$ непрерывна в каждой области $H_\alpha$ (включая границы $F_\alpha = 0$ и $F_{\alpha+1} = 0$), а при переходе через поверхности $F_\alpha = 0$ может испытывать только разрывы 1-го рода, величины которых $\xi_\alpha$ в точках $M_\alpha$ ограничены в своей совокупности.

2. Выполняются условия, обеспечивающие в каждой области $H_\alpha$ единственность решения системы (1.1) при заданных начальных условиях и непрерывную зависи-

---

[1] Здесь и всюду далее индекс $\alpha$ пробегает значения $1, 2, \ldots, \infty$.