К ДОСТАТОЧНЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассмотрим задачу определения оптимальных траекторий, описанную в статье [1]. В настоящей заметке будем пользоваться терминами и обозначениями из [1]. В цитированной статье в § 4 указаны достаточные условия (теорема 4.1), при выполнении которых траектория $x(x_0, t, \eta_0)$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + q\eta(t) \tag{1}$$

является локально-оптимальной (в смысле [1] определения 4.1) относительно допустимых управляющих функций $\eta(t)$, стесненных условием

$$|\eta(t)| \leqslant 1 \tag{2}$$

Теорема 4.1 [1], помимо условий 1—4, аналогичных тем условиям, которые вытекают из принципа максимума [2], включает некоторые дополнительные ограничения (условие 5) на вторые частные производные $\partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k$. Цель настоящей заметки — показать, что без этих дополнительных ограничений условия 1—4 теоремы 4.1 [1] не являются достаточными для того, чтобы траектория $x(x_0, t, \eta^0)$ была локально-оптимальной, и даже эти условия не являются достаточными для того, чтобы эта траектория была оптимальной относительно малых по модулю вариаций функции $\eta^0(t)$, стесненной условием (2).

Действительно, рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \zeta + \alpha_1(\xi, \zeta), \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -\xi + \alpha_2(\xi, \zeta) + \eta \tag{3}$$

где α_1, α_2 — некоторые нелинейные, достаточно гладкие функции, явный вид которых будет указан ниже. Наряду с нелинейной системой (3) рассмотрим вспомогательную линейную систему уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \zeta, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -\xi + \eta \tag{4}$$

Как известно [3], оптимальная траектория линейной системы (4) при ограничениях (2), соединяющая точку $\xi = -3$, $\zeta = 0$ с точкой $\xi = 0$, $\zeta = 0$, имеет вид, изображенный на фиг. 1, где AB — дуга окружности с центром в точке (1,0), BC — дуга окружности с центром в точке (—1,0), CO — дуга окружности с центром в точке (1,0). Соответствующая оптимальная управляющая функция $\eta^0(t)$ имеет вид:

$$\eta^0(t) = -\operatorname{sign}[\sin(t - \psi_0)]$$

Обозначим через $\rho(\xi, \zeta)$ расстояние от точки (ξ, ζ) до точки $(\xi = -1, \zeta = 0)$, через $\varphi(\xi, \zeta)$ — угол между осью $\zeta = 0$ и лучом, проведенным из точки $(\xi = -1, \zeta = 0)$ в точку (ξ, ζ), через $\psi(\xi, \zeta)$ — угол между осью $\zeta = 0$ и лучом, проведенным из точки $(\xi = 1, \zeta = 0)$ в точку (ξ, ζ).

Определим теперь функции $\alpha_1(\xi, \zeta)$, $\alpha_2(\xi, \zeta)$ следующим образом:

$$\alpha_1 \equiv 0, \quad \alpha_2 \equiv 0$$

всюду вне области G, ограниченной лучами $\varphi_1 = {}^1\!/_4\pi$, $\varphi_2 = {}^3\!/_4\pi$ (область G на фиг. 1 заштрихована), в области G функции α_1 и α_2 определены формулами

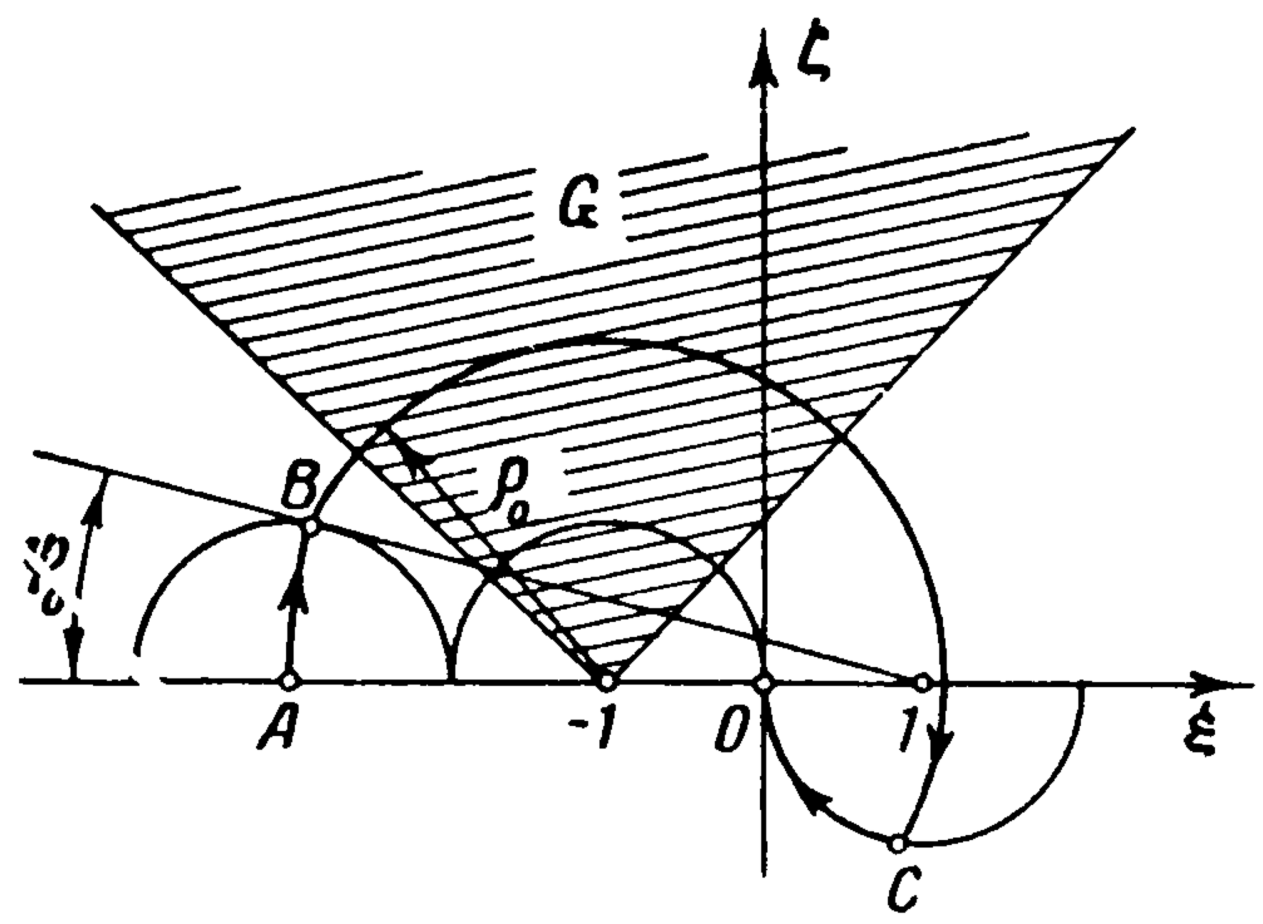
$$\alpha_1(\xi, \zeta) = \omega\zeta\rho^4(\rho - \rho_0)^2 \exp[(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)]^{-1}$$
$$\alpha_2(\xi, \zeta) = -\omega(\xi + 1)(\rho - \rho_0)^2 \rho^4 \exp[(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)]^{-1} \tag{5}$$

Здесь $\omega = \text{const} > 0$, значение ρ_0 указано на фиг. 1.

В области G при $\eta = -1$, очевидно, траекториями системы (3), как и траекториями линейной системы (4), являются окружности с центром в точке с координатами $\xi = -1$, $\zeta = 0$.

Поскольку в окрестности кривой $ABCO$, функции α_1 и α_2 имеют второй порядок малости и поскольку в условия 1—4 теоремы 4.1 из [1] входят лишь первые производные $\partial f_i/\partial x_j$, постольку траектория $ABCO$, являющаяся оптимальной для линейной системы (3), удовлетворяет, как нетрудно проверить, условиям 1—4. (Заметим, что эта траектория удовлетворяет также условиям принципа максимума [2].)

Теперь непосредственными вычислениями можно проверить, что при достаточно больших значениях $\omega > 0$ возможно подобрать допустимую функцию $\eta(t)$, удовлетворяющую условиям (2), и такую, что соответствующая траектория $\xi(\xi_0, \zeta_0, t, \eta)$, $\zeta(\xi_0, \zeta_0, t, \eta)$ системы (3) будет соединять точки ($\xi_0 = -3$, $\zeta_0 = 0$) и ($\xi = 0$, $\zeta = 0$) и будет иметь меньшую временную длину, чем траектория $ABCO$.



Фиг. 1

При этом траектория $\xi(\xi_0, \zeta_0\, t, \eta)$, $\zeta(\xi_0, \zeta_0, t, \eta)$ может проходить в произвольной близости кривой $ABCO$ и, больше того, вариации $\delta\eta$ функции $\eta^0(t)$, т. е. величины $\delta\eta = \eta(t) - \eta^0(t)$, могут быть произвольно малыми по модулю. Мы не будем приводить здесь подробно всех таких вычислений, а установим справедливость нашего утверждения, исходя из простых наглядных соображений.

Предположим сначала, что в правую часть системы (3) вместо функции $\eta(t)$ подставлена функция вида

$$\eta_1(t) = \eta^0(t) + \varepsilon\mu\delta(t - \psi_0) + \varepsilon\gamma\delta(t - \psi_0 - \pi)$$

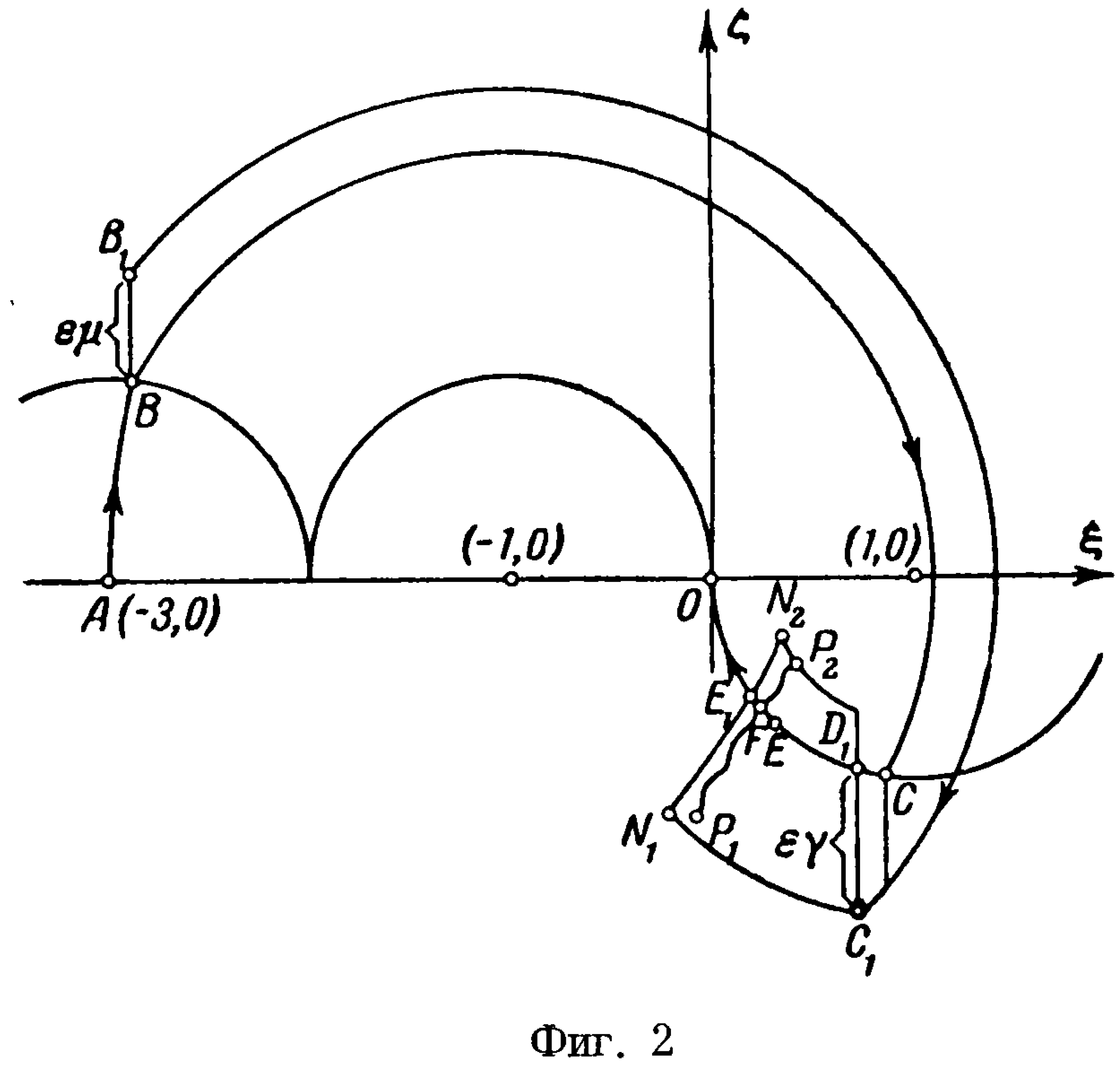
где знак $\delta(t)$ означает δ-функцию, μ, γ — некоторые достаточно малые положительные постоянные, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая наперед заданная постоянная.

Так как вне области G при $t \neq \psi_0$, $t \neq \psi_0 + \pi$ имеем $d\varphi/dt = -1$, а в области G в окрестности кривой $ABCO$ имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} \leqslant -1$$

$$\frac{d\varphi}{dt} < -1 - \beta\omega(\rho - \rho_0)^2$$

$$\left(\frac{1}{3}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi\right) \qquad (6)$$



Фиг. 2

где β — положительная постоянная, то траектория системы (3), соответствующая такой функции $\eta_1(t)$ при специальном подборе μ и γ ($\mu \approx \gamma$), проходящая через точку $\xi_0 = -3$, $\zeta_0 = 0$ при $t = 0$, будет иметь вид $AB_1C_1D_1O$, изображенный на фиг. 2.

Эта траектория будет приходить в некоторую точку E_1 (фиг. 2) в момент $t = T_1$, где T_1 — меньше, чем время $t = T$ прихода в точку E_1 движущейся точки траектории $ABCO$. Вследствие (6) имеем, очевидно, неравенство

$$T_1 - T \leqslant -\omega\nu_1\mu^2\varepsilon^2 \qquad (\nu_1 > 0 - \mathrm{const}) \qquad (7)$$

Если через E обозначить точку, в которую приходит траектория $ABCO$ при $t = T_1$, то имеем также неравенство

$$\xi_E - \xi_{E_1} \geqslant \nu\omega\mu^2\varepsilon^2 \qquad (\nu > 0 - \mathrm{const}) \tag{8}$$

Будем временно считать число μ фиксированным, а число γ будем менять в пределах

$$0 < \gamma < 2\mu \tag{9}$$

Тогда концы траекторий системы (3), выходящих при $t = 0$ из точки $\xi_0 = -3$, $\zeta_0 = 0$ и соответствующие моменту времени $t = T_1$, заполняют отрезок N_1N_2 некоторой кривой (фиг. 2).

Рассмотрим теперь функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, определенные формулами

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \psi_0 \\ \dfrac{1}{\mu} & \text{при } \psi_0 < t \leqslant \psi_0 + \mu \\ 0 & \text{при } \psi_0 + \mu < t \end{cases}$$

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \psi_0 + \pi - \mu \\ \dfrac{1}{\mu} & \text{при } \psi_0 + \pi - \mu < t \leqslant \psi_0 + \pi \\ 0 & \text{при } \psi_0 + \pi < t \end{cases} \tag{10}$$

Построим траектории системы (3), выходящие из точки $\xi_0 = -3$, $\zeta_0 = 0$ при $t = 0$ и соответствующие управляющей функции

$$\eta(t) = \eta^0(t) + \varepsilon\mu\lambda_1(t) + \varepsilon\gamma\lambda_2(t)$$

Очевидно, функции $\eta(t)$ при каждом $\varepsilon \ll 1$ являются допустимыми управляющими функциями, удовлетворяющими условиям (2). Концы траекторий $\xi(\xi_0, \zeta_0, t, \eta)$, $\zeta(\xi_0, \zeta_0, t, \eta)$, соответствующие моменту $t = T_1$ при $0 < \gamma < 2\mu$ и при каждых фиксированных значениях $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$, заполняют некоторую непрерывную кривую P_1P_2, расстояние точек которой от соответствующих точек отрезка N_1N_2 будет иметь второй порядок малости по μ и будет удовлетворять неравенству (при малых)

$$\begin{aligned} |\xi(\xi_0, \zeta_0, t, \eta) - \xi(\xi_0, \zeta_0, t, \eta_1)| &\leqslant \Delta\varepsilon^2\mu^2 \\ |\zeta(\xi_0, \zeta_0, t, \eta) - \zeta(\xi_0, \zeta_0, t, \eta_1)| &\leqslant \Delta\varepsilon^2\mu^2 \end{aligned} \qquad (\Delta = \mathrm{const}) \tag{11}$$

где постоянная Δ не зависит от ω.

Теперь из неравенства (8) заключаем, что при выборе числа ω, достаточно большим при всех $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ достаточно малых, кривая P_1P_2 будет пересекать дугу CO в точке F левее точки E, а это и будет означать, что соответствующая траектория $ABFO$ системы (3) приходит в точку $\xi = 0$, $\zeta = 0$ за время, меньшее чем точка, движущаяся по траектории $\xi(\xi_0, \zeta_0, t, \eta^0)$, $\zeta(\xi_0, \zeta_0, t, \eta^0)$, соответствующей управлению $\eta_0(t)$.

Наше утверждение доказано.

Поступила 16 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем, ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
2. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов ДАН СССР, т. 110, вып. 1, 1956.
3. Цян Сюе-сень, Техническая кибернетика. Изд-во иностр. лит., М., стр. 225—253, 1956.