НАХОЖДЕНИЕ ФОРМЫ ТЕЛА ПО ЗАДАННОМУ ИМПУЛЬСИВНОМУ ДАВЛЕНИЮ ПРИ УДАРЕ

В. С. Рогожин

(Ростов-на-Дону)

Пусть требуется определить контур части тела, соприкасающейся с несжимаемой жидкостью под влиянием удара по заданному импульсивному давлению. Будем рассматривать плоскую задачу для жидкости бесконечной глубины. Ось абсцисс совместим с поверхностью жидкости, а ось ординат направим вертикально вниз. Точки пересечения искомого контура с осью абсцисс пусть будут $x = \pm 1$. Как известно, в рассматриваемом случае потенциал скоростей φ связан с импульсивным давлением p_t соотношением $\rho\varphi = -p_t$, где ρ — плотность жидкости. Поэтому задание импульсивного давления вдоль искомого контура L равносильно заданию потенциала φ.

Пусть проекции поступательной скорости на координатные оси будут u_0 и v_0, а угловая скорость—ω_0, тогда функция тока ψ вдоль L будет принимать значение [1]

$$\psi_L = u_0 y - v_0 x - \frac{1}{2}\omega_0 (x^2 + y^2) \tag{1}$$

При формулировке обратной задачи будем считать, что u_0, v_0 и ω_0 заданы.

Способ задания φ на L будем выбирать в зависимости от характера движения тела в момент времени, непосредственно следующий за ударом.

Первый случай. Пусть $\omega_0 = 0$, $u_0 = 0$. Будем считать, что в этом случае φ задается как функция x в виде

$$\varphi_L = v_0 \Omega(x), \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (\Omega(\pm 1) = 0) \tag{2}$$

Из (1) следует, что $\psi_L = -v_0 x$. Таким образом, области B_z, занятой потоком в плоскости w, отвечает область B_w, ограниченная вертикальным отрезком $\varphi = 0$, $|\psi| \leqslant v_0$, соответствующим свободной поверхности жидкости, и кривой L_w, отвечающей искомому контуру, параметрическое уравнение которой $\varphi = v_0\Omega(x)$, $\psi = -v_0 x$. Построим функцию $w = w(\zeta)$, отображающую нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$ на область B_w, так, чтобы точки $\zeta = \pm 1$ перешли в $w = \pm i v_0$, а $\zeta = \infty$ в $w = 0$. Теперь легко определить функцию $\Phi(\zeta) = z[w(\zeta)]$, аналитическую в нижней полуплоскости и отображающую ее на искомую область B_z. В самом деле, для $\Phi(\zeta)$ имеем следующие контурные условия:

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi) = -\frac{\psi}{v_0} \quad (-1 < \xi < 1), \qquad \operatorname{Im}\Phi(\xi) = 0 \qquad (\xi < -1,\ \xi > 1) \tag{3}$$

Функция ψ может быть выражена через ξ из равенства $\varphi + i\psi = w(\zeta)$.

Используя формулу Келдыша — Седова и учитывая, что $\Phi(\zeta) = O(\zeta)$ при $\zeta \to \pm\infty$, получим

$$z = \Phi(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{v_0 \sqrt{\tau^2 - 1}(\tau - \zeta)} + C\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{4}$$

Здесь c — произвольная вещественная постоянная.

Пример. Если $\varphi_L = -v_0\sqrt{1 - x^2}$, то искомые контуры образуют семейство эллипсов с общей полуосью $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$ и с переменной другой полуосью. В это семейство войдет окружность радиуса единица, а также пластинка.

Второй случай. Пусть $\omega_0 = 0$, но $u_0 \neq 0$. Предположим, что $u_0^2 + v_0^2 = 1$. Введем новую систему координат, положив

$$x^* = v_0 x - u_0 y, \qquad y^* = u_0 x + v_0 y$$

Потенциал φ зададим на неизвестном контуре L в функции x^*:

$$\varphi_L = \Omega(x^*) \tag{5}$$

Для ψ_L в этом случае имеем условие $\psi_L = -x^*$. Повторяя рассуждения, приведенные в первом случае, получим для функции $z^* = x^* + iy^* = \Phi(\zeta)$, отображающей $\operatorname{Im}\zeta < 0$ на область, занятую потоком, следующее краевое условие:

$$x^* = -\psi(\xi)\,(-1 < \xi < 1), \qquad x^* u_0 - y^* v_0 = 0 \qquad (\xi < -1,\ \xi > 1)$$

Полученная краевая задача является частным случаем краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами [2]:

$$\operatorname{Re}\{[a(\xi) + ib(\xi)]\,\Phi(\xi)\} = g(\xi) \tag{6}$$

где

$$g(\xi) = -\psi(\xi), \qquad a(\xi) = 1, \qquad b(\xi) = 0 \qquad (-1 < \xi < 1)$$

$$a(\xi) = u_0, \qquad b(\xi) = v_0, \qquad g(\xi) = 0 \qquad (\xi < -1,\ \xi > 1)$$

Эта краевая задача, как известно, сводится к задаче линейного сопряжения

$$\Phi^+(\xi) = G(\xi)\,\Phi^-(\xi) + h(\xi) \tag{7}$$

$$h(\xi) = \frac{2g}{a + ib} = \begin{cases} -2\psi(\xi) & (-1 < \xi < 1) \\ 0 & (\xi < -1,\ \xi > 1) \end{cases}$$

$$G(\xi) = -\frac{a + ib}{a - ib} = \begin{cases} -1 & (-1 < \xi < 1) \\ -e^{2i\alpha} & (\xi < -1,\ \xi > 1) \end{cases} \qquad (\alpha = \arg(u_0 + iv_0))$$

Если функции $\Phi^+(\zeta)$ и $\Phi^-(\zeta)$ регулярны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, удовлетворяют краевому условию (7) и связаны соотношением

$$\overline{\Phi^+(\bar\zeta)} = \Phi^-(\zeta)$$

то функция $\Phi^-(\zeta)$ будет являться решением краевой задачи (6). Решение задачи (7) можно получить, используя общую теорию краевых задач с разрывными коэффициентами [2,3]. Решение, ограниченное в точках $\xi = \pm 1$, имеющее порядок $O(\zeta)$ при $\zeta \to \pm\infty$ и удовлетворяющее условию $\overline{\Phi^+(\bar\zeta)} = \Phi^-(\zeta)$, будет иметь вид:

$$\Phi^-(\zeta) = \Phi(\zeta) = (\zeta + 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}\,(\zeta - 1)^{1-\frac{\alpha}{\pi}}\,[ie^{i\alpha}C + \Phi_0^-(\zeta)]$$

$$\Phi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \zeta}\,(\tau + 1)^{-\frac{\alpha}{\pi}}\,(\tau - 1)^{-1+\frac{\alpha}{\pi}}\,d\tau \tag{8}$$

(C — вещественно) [1].

Таким образом, заданному распределению импульсивного давления отвечает однопараметрическое семейство контуров. Из формулы (8) можно получить решение в случае $u_0 = \omega_0 = 0$, рассмотренном выше.

Третий случай. Пусть $\omega_0 \neq 0$. Потенциал φ зададим на искомом контуре в функции расстояния до мгновенного центра вращения тела

$$\varphi_L = \Omega\left(\sqrt{(x + v_0/\omega_0)^2 + (y - u_0/\omega_0)^2}\right) \tag{9}$$

Условие (9) при выполнении очевидных условий согласования вместе с (1) определяет в плоскости w кривую, являющуюся образом искомого контура L_z. (Предполагается, что все точки искомого контура находятся на разных расстояниях от $z_0 = -v_0/\omega_0 + iu_0/\omega_0$ или же контур состоит из участков, удовлетворяющих этому условию.) Как и выше, отображаем область B_w на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$

---

[1] Под $(\zeta + 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}\,(\zeta - 1)^{1-\frac{\alpha}{\pi}}$ понимается ветвь этой многозначной функции, регулярная в плоскости с разрезами по оси абсцисс $-\infty < \xi < -1$ и $1 < \xi < \infty$ и вещественная на нижнем берегу правого разреза.

и рассматриваем функцию $F(\zeta) = \Phi(\zeta) - z_0$, где $\Phi(\zeta) = z[w(\zeta)]$. Краевое условие для $F(\zeta)$ имеет вид: $(<1<\xi<1)$

$$|F(\xi)| = |z - z_0| = \sqrt{\left(x + \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(y - \frac{u_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{-\frac{2}{\omega_0}\psi(\xi) + \frac{u_0^2 + v_0^2}{\omega_0}}$$

$$\operatorname{Im} F(\xi) = -\frac{u_0}{\omega_0} \qquad (\xi < -1,\ \xi > 1) \tag{10}$$

Таким образом, получаем нелинейную краевую задачу для функции $F(\zeta)$, регулярной в нижней полуплоскости и имеющей порядок $O(\zeta)$ при $\zeta \to \pm\infty$ В случае, когда $u_0 = 0$, т. е. z_0 попадает на ось абсцисс, легко привести эту задачу к линейной и получить решение. Предположим для определенности, что z_0 лежит между точками $\xi = -1$ и $\xi = 1$. Пусть

$$F_1(\zeta) = \ln F(\zeta)$$

Тогда

$$\operatorname{Im} F_1(\xi) = 0 \quad \text{для } \xi < -1, \qquad \operatorname{Im} F_1(\xi) = \pi \quad \text{для } \xi > 1$$

$$\operatorname{Re} F_1(\xi) = \sqrt{-\frac{2}{\omega_0}\psi(\xi) + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \qquad \text{для } -1 < \xi < 1,$$

$$F_1(\zeta) = O(\ln\zeta) \quad \text{при } z \to \infty$$

Решением этой краевой задачи служит функция

$$F_1(\zeta) = \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{C(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}}\frac{d\tau}{\tau - \zeta}$$

где

$$C(\tau) = \sqrt{-\frac{2}{\omega_0}\psi(\xi) + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

а для $z(\zeta)$ получается выражение

$$z(\zeta) = z_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\exp\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{C(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}}\frac{d\tau}{\tau - \zeta} \tag{11}$$

Отметим, что полученное решение теряет силу при $\omega_0 = 0$, так как в этом случае способ задания φ на искомом контуре должен быть изменен.

Если $u_0 \neq 0$, то краевая задача (10) сводится к нелинейному сингулярному интегральному уравнению. Пусть $F_2(\zeta) = iF(\zeta)$, тогда

$$|F_2(\xi)| = h(\xi) \quad \text{для } -1 < \xi < 1, \qquad \operatorname{Re} F_2(\xi) = u_0/\omega_0 \quad \text{для } \xi < -1 \text{ и } \xi > 1$$

Положим $\theta(\xi) = \arg F_2(\xi)$, тогда, используя интеграл Шварца, получим для $-1 < \xi < 1$ уравнение

$$C(\xi)\sin\theta(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{C(t)\cos\theta(t)}{t - \xi}\frac{1 + t\xi}{1 + t^2}dt - \frac{u_0}{\pi\omega_0}\ln\frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

Полученные результаты при $\omega_0 = 0$ могут быть перенесены на случай удара нескольких тел, а также и на случай жидкости конечной глубины при условии, что граница состоит из прямолинейных отрезков.

Поступила 20 IV 1957

Ростовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, М., 1950.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ОГИЗ, ГИТТЛ, М., 1946.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения. Уч. зап. КГУ, т. 109, кн. 4, 1949.