

**ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ НЕКОТОРЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КОНТУРОВ, ОБТЕКАЕМЫХ С ОТРЫВОМ СТРУЙ**

С. И. Пархомовский

(Николаев)

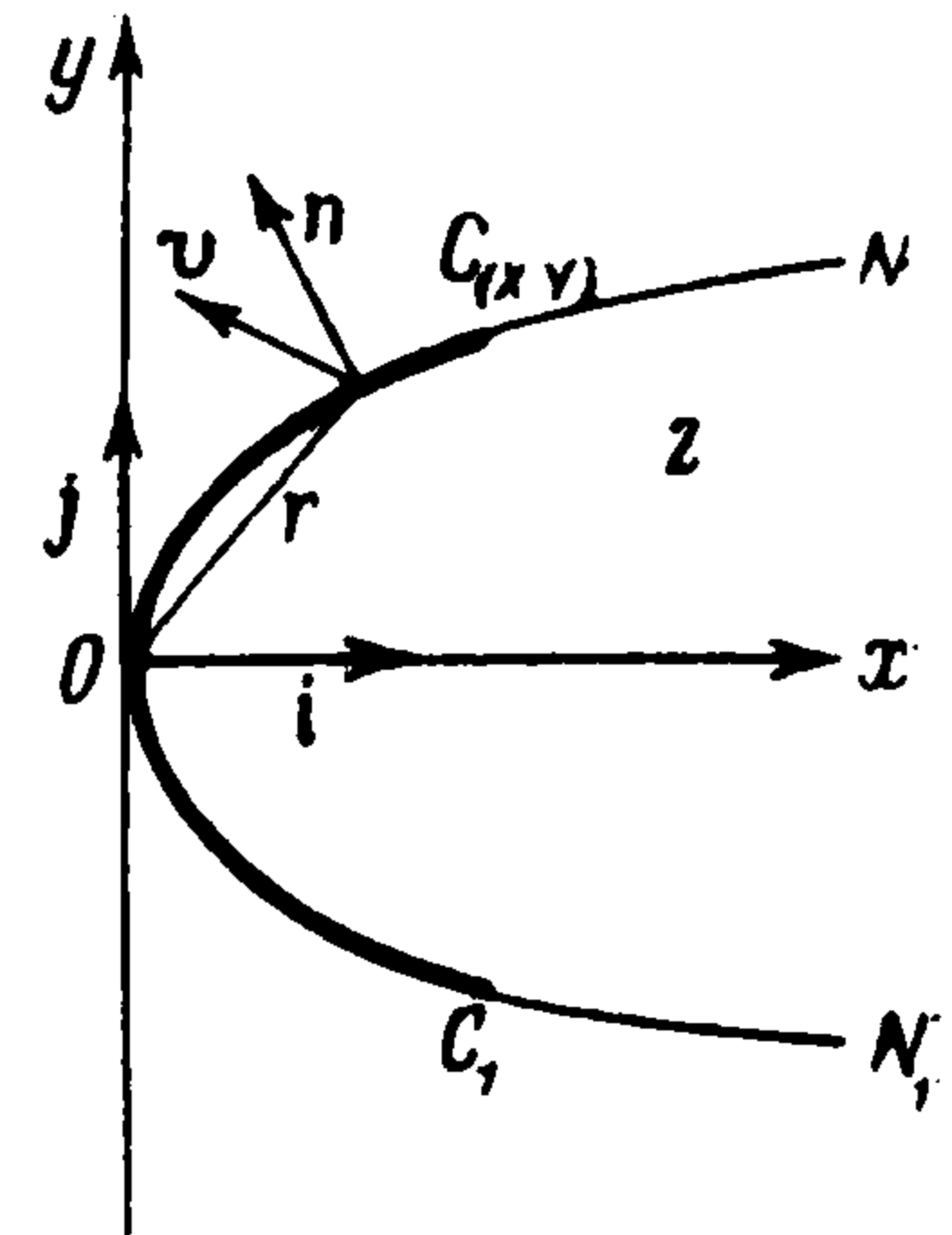
1. Точное решение задачи в замкнутой форме об отрывном обтекании одного семейства кривых  $L(m, \nu)$  дано Г. Н. Пыхтеевым [1]. В настоящей заметке рассматривается удар этого же семейства кривых при отрывном обтекании безграничным потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Кривая  $L(m, \nu)$ , зависящая от двух параметров  $m, \nu$ , задается на плоскости течения  $z = x + iy$  параметрическим уравнением

$$x = -\lambda \frac{\cos^m \nu}{m} \operatorname{ctg} \nu \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\vartheta} \frac{1 + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \theta}}{[1 + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \theta} \sin \nu]^m} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\cos^{m+2\theta}}$$

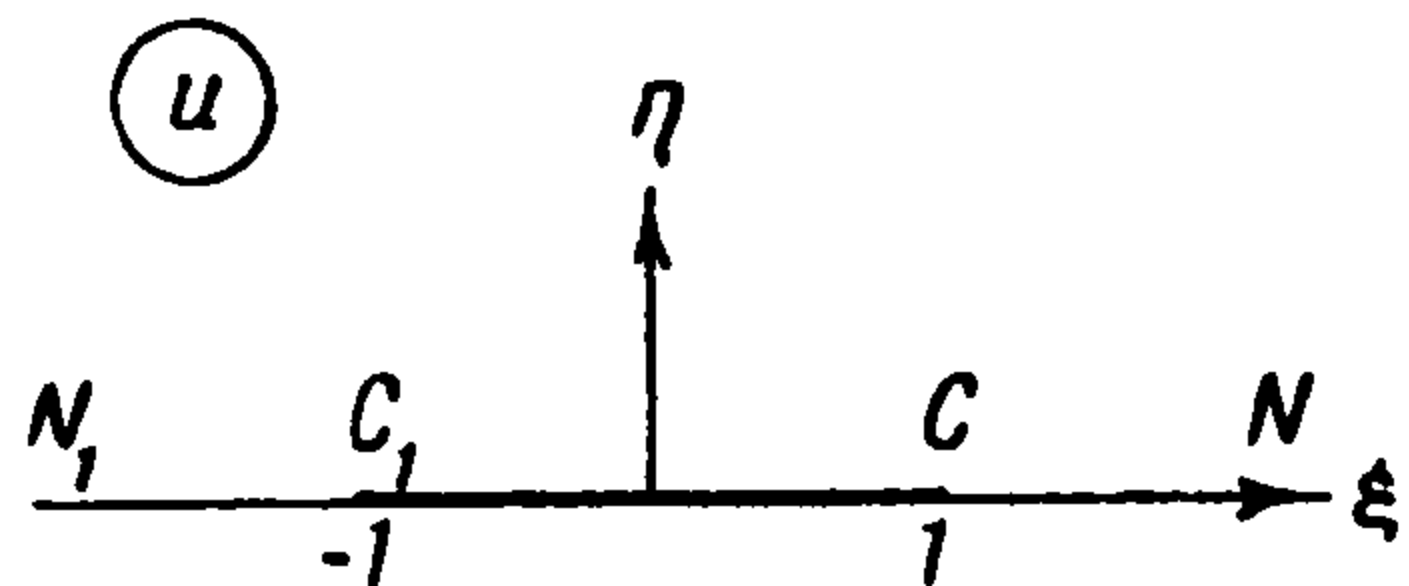
$$\left(\frac{\pi - 2\vartheta}{2m} = \theta\right) \tag{1.1}$$

$$y = -\lambda \frac{\cos^m \nu}{m} \operatorname{ctg} \nu \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\vartheta} \frac{1 + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \theta}}{[1 + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \theta} \sin \nu]^m} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\cos^{m+2\theta}}$$



Фиг. 1

где  $\vartheta$  — угол наклона касательной к оси  $x$ , изменяющийся в интервале  $0 \leq \frac{1}{2}\pi - \vartheta \leq m\nu$ , причем  $0 \leq \nu < \frac{1}{2}\pi/m$ . Кривая  $L(m, \nu)$  при  $\nu \neq 0$  монотонно возрастает, симметрична относительно оси  $x$  и проходит через начало координат, касаясь оси  $y$ . При  $\nu = 0$  кривая  $L(m, \nu)$  обращается в отрезок прямой, совпадающей с осью  $y$  (фиг. 1). В конечной точке кривой  $C(X, Y)$  угол наклона касательной  $\vartheta = \frac{1}{2}\pi - m\nu$ , а длина дуги  $S$ . Для каждой кривой  $L(m, \nu)$  параметр  $\lambda$ , входящий в (1.1), определяется заданием одной из трех величин  $X, Y, S$ . Интегралы в (1.1) для всех целых и многих дробных значений  $m$  выражаются через элементарные или табулированные функции. Легко определить кривизну кривой:



Фиг. 2

$$K(\vartheta) = \frac{d\vartheta}{ds} =$$

$$= -\frac{m \operatorname{tg} \nu}{\lambda \cos^m \nu} \frac{[1 + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \theta} \sin \nu]^m}{1 + \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \theta}} \cos^{m+2\theta} \tag{1.2}$$

2. Пусть кривая  $L(m, \nu)$ , обтекаемая с отрывом струй, внезапно приобрела поступательную скорость  $v(v_2, v_1)$  и угловую скорость  $\omega$  относительно точки  $O$ . Возникающее при этом дополнительное (ударное) течение имеет комплексный потенциал скоростей  $w = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi$  связана с плотностью жидкости  $\rho$  и импульсивным давлением  $p$  соотношением  $p = -\rho\varphi$ . Гармоническая функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям: на свободных поверхностях  $p = 0$ , следовательно,  $\varphi = 0$ ; на кривой  $L(m, \nu)$  известна нормальная составляющая скорости  $\partial\varphi/\partial n = v_n$ , где в рассматриваемом случае

$$v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n}\omega\mathbf{r} = v_1 \cos \vartheta - v_2 \sin \vartheta + \omega(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) \tag{2.1}$$

Кроме того, из физических представлений следует, что комплексная скорость ударного течения  $dw/dz$  обращается в бесконечность у концов кривой и равна нулю на бесконечности в потоке.

Отобразим конформно область течения плоскости ( $z$ ) на верхнюю полуплоскость параметрического переменного  $u = \xi + i\eta$  (фиг. 2). Соответствующие точки на фиг. 1 и 2 обозначены одинаковыми буквами. Отображение определяется из работы [1] и

в наших обозначениях запишется

$$\frac{dz}{du} = \lambda i (1 + \sqrt{1-u^2}) \left[ \frac{1 - (\sqrt{1-u^2} + iu) \operatorname{tg}^{1/2} \nu}{1 + (\sqrt{1-u^2} + iu) \operatorname{tg}^{1/2} \nu} \right]^m \quad (2.2)$$

Граничные условия, выраженные посредством функции  $dw/du$ , примут на плоскости  $u$  соответственно вид:

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{du} = 0, \quad |\xi| > 1, \quad \eta = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{du} = -v_n \left| \frac{dz}{du} \right|, \quad |\xi| < 1, \quad \eta = 0 \quad (2.4)$$

Кроме того,  $dw/du$  должна у концов контура  $u = \pm 1$  обращаться в бесконечность порядка минус половина, а на бесконечности иметь нуль не ниже второго порядка. Аналитическая функция  $dw/du$  в верхней полуплоскости ( $u$ ) находится методами теории тонкого крыла и удара о несжимаемую жидкость [2]:

$$\frac{dw}{du} = \frac{1}{\pi i \sqrt{u^2-1}} \int_{-1}^1 \left[ v_n(u) \left| \frac{dz}{du} \right| \right]_{u=\xi} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-u} d\xi \quad (2.5)$$

причем  $\left| \frac{dz}{du} \right|$  и  $\vartheta$  определяются из (2.2) для  $-1 < u < 1$ :

$$\left| \frac{dz}{du} \right| = \lambda (1 + \sqrt{1-u^2}) \left[ \frac{1 - \sqrt{1-u^2} \sin \nu}{1 + \sqrt{1-u^2} \sin \nu} \right]^{1/2 m} \quad (2.6)$$

$$\vartheta = \arg \frac{dz}{du} = \frac{1}{2} \pi - m \operatorname{arc} \operatorname{tg} (u \operatorname{tg} \nu) \quad (2.7)$$

а  $x(u)$ ,  $y(u)$  находятся из (1.1) и (2.7). Таким образом, формулы (2.5) и (1.1), (2.1) (2.6), (2.7) дают общее решение задачи.

Учитывая, что  $v_n$  выражается линейно через  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\omega$ , удобно представить искомый потенциал в виде

$$w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \omega w_3 \quad (w_k = \varphi_k + i\psi_k) \quad (2.8)$$

где  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  — комплексные потенциалы от вертикального, горизонтального и вращательного ударов с единичными скоростями.

3. Во время удара на элемент  $ds$  кривой действуют элементарный импульс  $dJ$  и момент  $dM$  относительно точки  $O$  (фиг. 1):

$$dJ = p ds \mathbf{n} = -i p ds \sin \vartheta + j p ds \cos \vartheta = -i p dy + j p dx$$

$$dM = |\mathbf{r} \times p ds \mathbf{n}| = p ds (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) = p (x dx + y dy) = \frac{1}{2} p d|z|^2$$

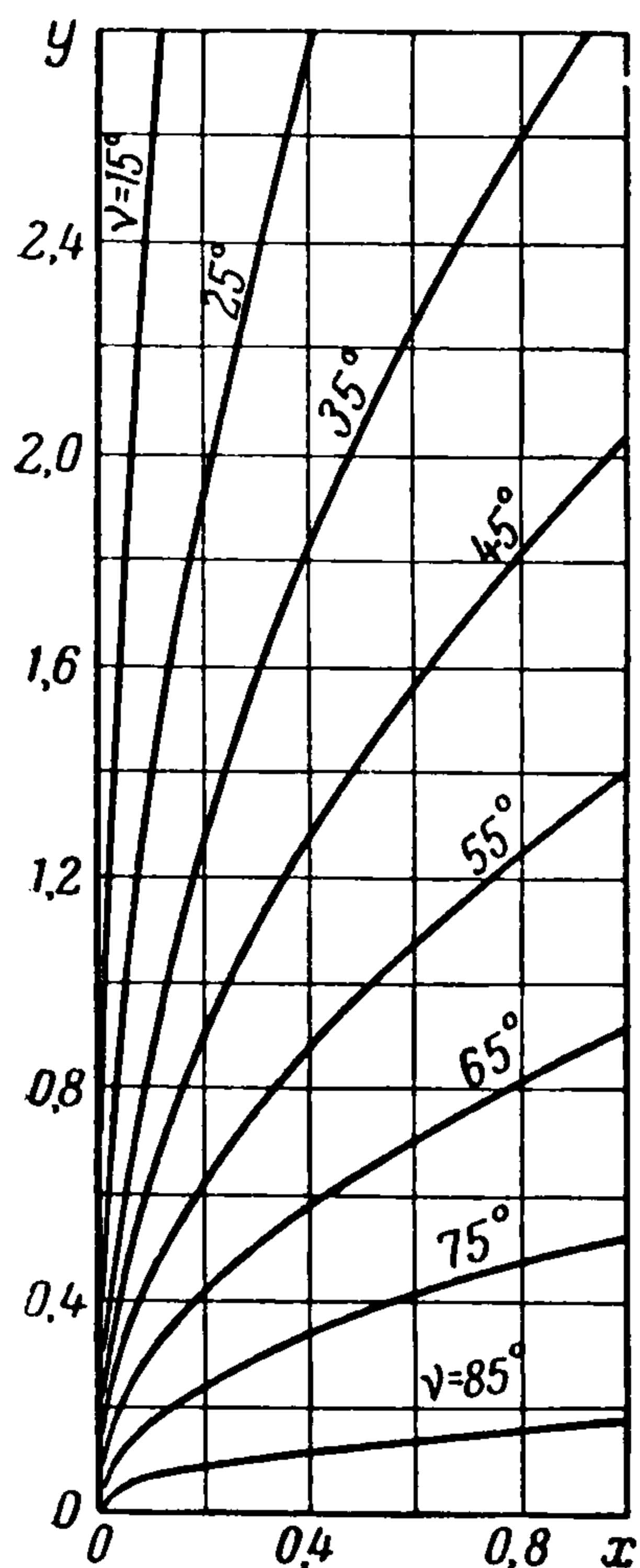
Суммируя по контуру и учитывая, что  $p = -\rho \varphi$ , получим  $J$  ( $J_x$ ,  $J_y$ ) и  $M$ :

$$J_x = \rho \int_{C_1 C} \varphi dy, \quad J_y = -\rho \int_{C_1 C} \varphi dx, \quad M = -\frac{1}{2} \rho \int_{C_1 C} \varphi d|z|^2$$

Перейдем к переменной  $u$ . Затем, интегрируя по частям и учитывая, что на концах контура  $\varphi = 0$ , имеем:]

$$J_x = -\rho \int_{-1}^1 y(u) \frac{d\varphi}{du} du, \quad J_y = \rho \int_{-1}^1 x(u) \frac{d\varphi}{du} du, \quad M = \frac{1}{2} \rho \int_{-1}^1 |z|^2 \frac{d\varphi}{du} du \quad (3.1)$$

Величины  $-J_x$ ,  $-J_y$ ,  $-M$  можно рассматривать как количество движения и

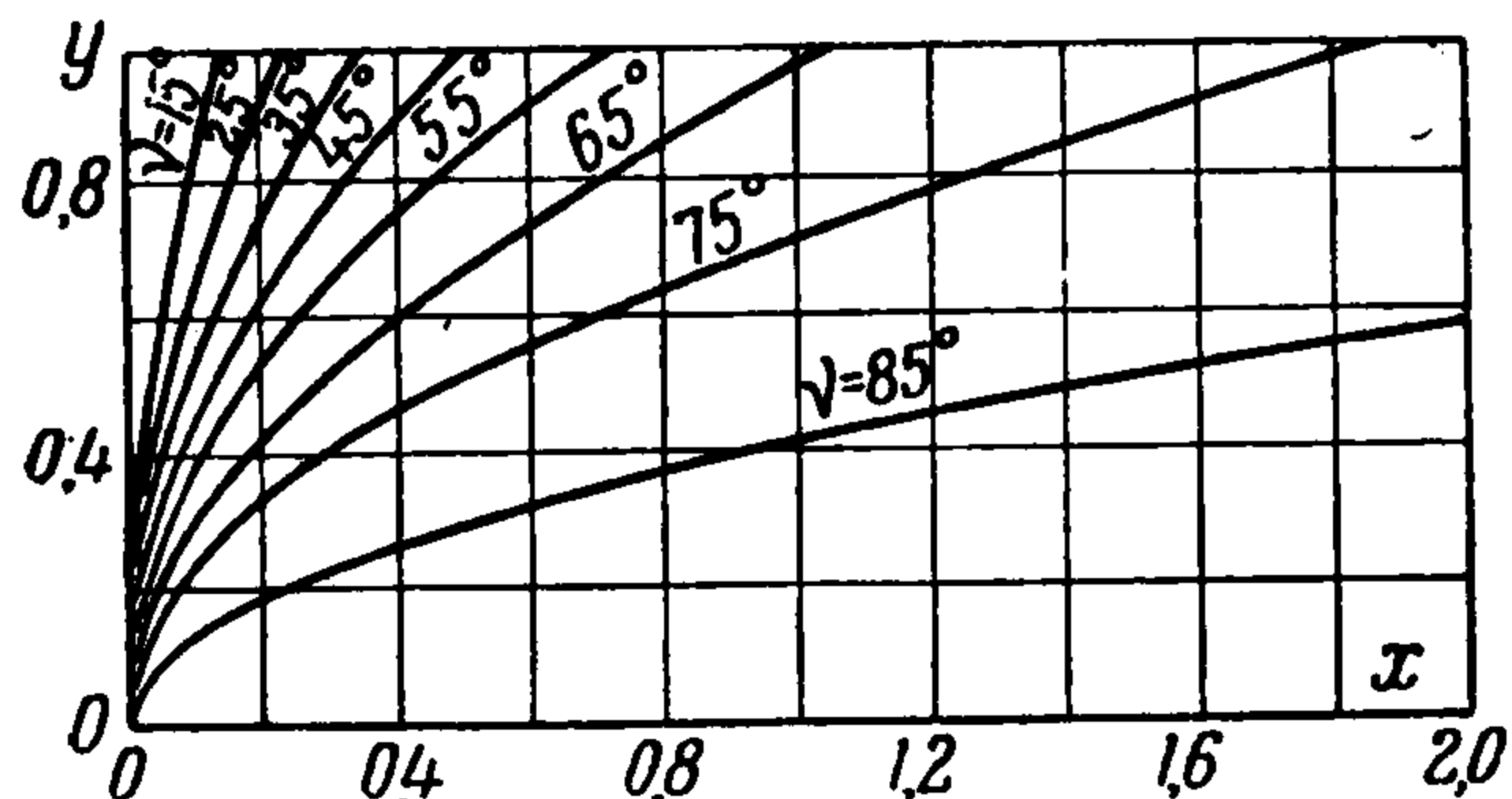


Фиг. 3

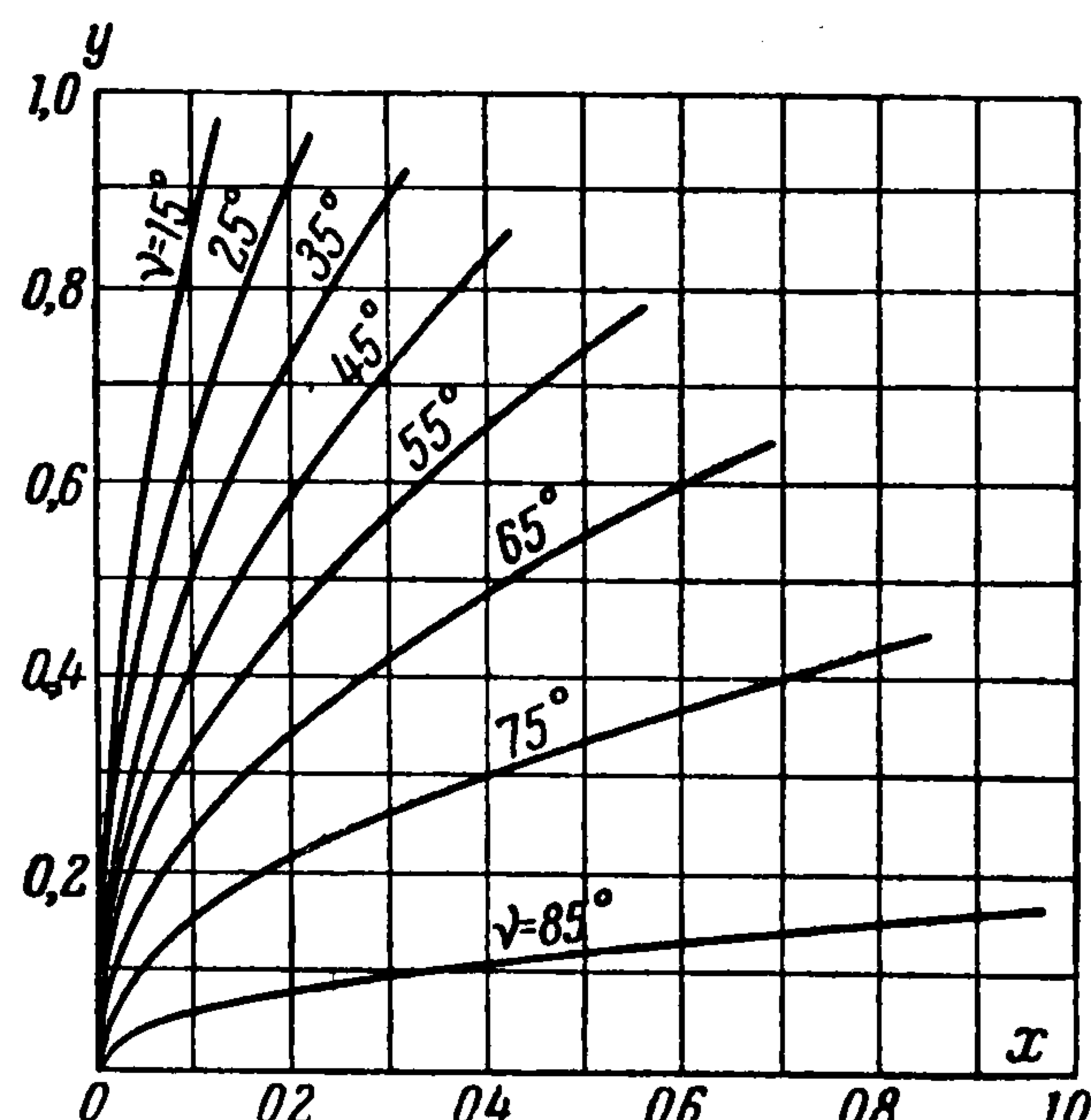
момент количества движения жидкости и представить в виде

$$\begin{aligned} - J_y &= \mu_{11}v_1 + \mu_{12}v_2 + \mu_{13}\omega \\ - J_x &= \mu_{21}v_1 + \mu_{22}v_2 + \mu_{23}\omega \\ - M &= \mu_{31}v_1 + \mu_{32}v_2 + \mu_{33}\omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $\mu_{ik}$  — коэффициенты присоединенных масс.



Фиг. 4



Фиг. 5

Сравнивая (3.2) и (3.1) и учитывая (2.8), получим расчетные формулы

$$\mu_{1k} = -\rho \int_{-1}^1 x(u) \frac{d\varphi_k}{du} du \quad \mu_{2k} = \rho \int_{-1}^1 y(u) \frac{d\varphi_k}{du} du, \quad \mu_{3k} = -\frac{1}{2} \rho \int_{-1}^1 |z|^2 \frac{d\varphi_k}{du} du \quad (3.3)$$

В силу симметрии  $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{23} = \mu_{32} = 0$ . Остальные коэффициенты отличны от нуля.

В виде примера приведем вычисление  $\mu_{ik}$  для кривых класса  $L(1, \nu)$ . Полагая  $m = 1$  в формулах (2.6), (2.7), согласно (2.1), (2.5), (2.8) найдем

$$\frac{dw_1}{du} = -\frac{\lambda \csc \nu}{\pi (\operatorname{ctg}^2 \nu + u^2) \sqrt{1-u^2}} \left\{ A(\nu) + \left[ \frac{1}{2} \pi \sin \nu - (\pi + 2)(1 - \sin \nu) \right] u^2 - \right. \\ \left. - u^4 \pi \sin \nu + (1 - \sin \nu) u (1 - u^2) \ln \frac{u-1}{u+1} + i\pi (1 - \sin \nu + u^2 \sin \nu) u \sqrt{1-u^2} \right\} \quad (3.4)$$

$$\frac{dw_2}{du} = -\frac{\lambda \cos \nu \csc^2 \nu}{\pi (\operatorname{ctg}^2 \nu + u^2) \sqrt{1-u^2}} \left\{ uB(\nu) - u^3 \pi \sin \nu + (1 - \sin \nu) (1 - u^2) \ln \frac{u-1}{u+1} + \right. \\ \left. + i\pi (1 - \sin \nu + u^2 \sin \nu) \sqrt{1-u^2} \right\} \quad (3.5)$$

$$A(\nu) = 2 \operatorname{ctg} \nu (1 - \sin \nu) (\nu \csc^2 \nu - \operatorname{ctg} \nu) + \pi \operatorname{ctg}^2 \nu \left[ \frac{1}{2} \sin \nu - (\sec \nu - 1) (\operatorname{cosec} \nu - 1) \right]$$

$$B(\nu) = \pi \sec \nu (\csc \nu - 1) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2\nu - \cos \nu - \frac{2\nu}{\pi} \right)$$

Легко проверить, что  $dw_1/du$ ,  $dw_2/du$  удовлетворяют граничным условиям (2.3) (2.4), а также дополнительным требованиям физического характера.

Полагая  $m = 1$  в (1.1), (2.7), найдем уравнение  $L(1, \nu)$ : (3.6)

$$\begin{aligned} x(u) &= \lambda (1 - \csc \nu) \left[ \frac{u^2}{2(1 - \csc \nu)} + 1 - \sqrt{1-u^2} + \csc \nu \ln \frac{1 + \sqrt{1-u^2} \sin \nu}{1 + \sin \nu} \right] \\ y(u) &= \lambda \operatorname{ctg} \nu (\csc \nu - 1) \left[ \frac{u}{\csc \nu - 1} - \arcsin u + 2 \sec \nu \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1 - \sqrt{1-u^2} \operatorname{tg} \frac{\pi - 2\nu}{4}}{u} \right) \right] \end{aligned}$$

Функция  $dw_3/du$  не выражается через элементарные и может быть найдена приближенно по (2.5), если  $x(u)$ ,  $y(u)$  в (2.1) разложить, например, в ряд по полиномам Лежандра. При  $u = 1$  формулы (3.6) дают  $X$ ,  $Y$  конца кривой:

$$\begin{aligned} X &= \lambda (1 - \csc \nu) \left[ \frac{1}{2(1 - \csc \nu)} + 1 - \csc \nu \ln (1 + \sin \nu) \right] \\ Y &= \lambda \operatorname{ctg} \nu (\csc \nu - 1) \left[ \frac{1}{\csc \nu - 1} - \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - \nu \right) \sec \nu \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Наконец, интегрируя (2.6) от 0 до 1 при  $m = 1$ , получим: (3.8)

$$S = \lambda \frac{1 - \sin \nu}{\sin^2 \nu} \left[ F\left(\sin \nu, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\sin \nu, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2(\csc \nu - 1)} - \frac{1 - \sin \nu}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi - 2\nu}{4} \right]$$

где  $F, E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

На фиг. 3, 4, 5 изображены соответственно семейства кривых

$$X = 1\left(\frac{x(u)}{X}, \frac{y(u)}{X}\right), \quad Y = 1\left(\frac{x(u)}{Y}, \frac{y(u)}{Y}\right), \quad S = 1\left(\frac{x(u)}{S}, \frac{y(u)}{S}\right)$$

На фиг. 6, 7, 8 даны безразмерные коэффициенты присоединенных масс как

функции  $\nu$  или безразмерной максимальной кривизны кривой  $K(1/2 \pi) X, K(1/2 \pi) Y, K(1/2 \pi) S$ , согласно (3.3)—(3.8) и (1.2). Как видно из фиг. 6, 7, коэффициенты  $\mu_{11}/\rho X^2, \mu_{22}/\rho Y^2$  практически не зависят от кривизны кривых соответствующих им семейств  $X = 1$  и  $Y = 1$ , т. е. определяются только величиной максимального сечения кривой проведенного перпендикулярно к направлению своего удара. Этим можно объяснить, что  $\lim \mu_{22}/\rho Y^2 = 1/2 \pi$  при  $\nu \rightarrow 1/2 \pi$  — конечное число.

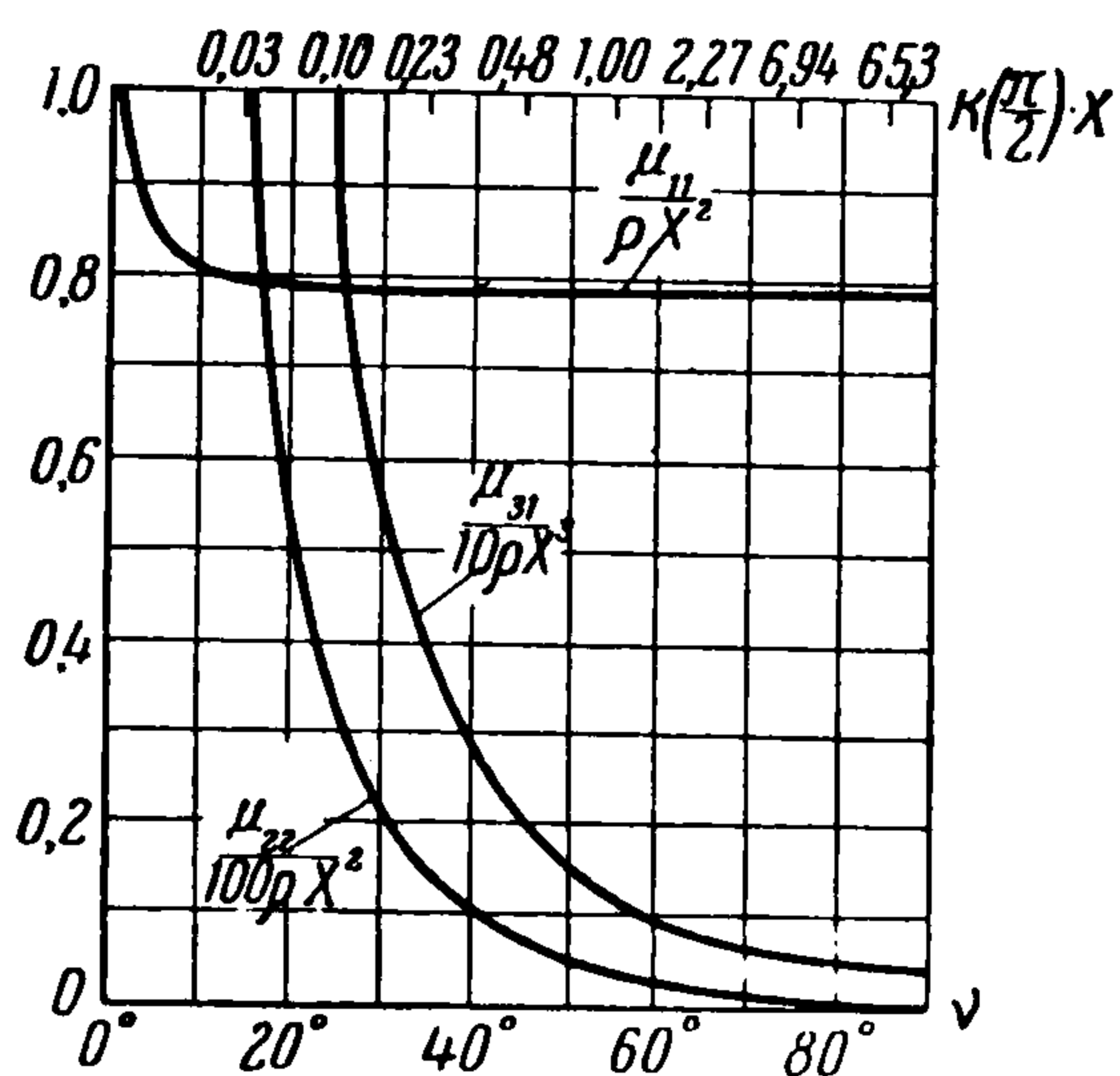
При  $\nu \rightarrow 0$  кривые  $Y = 1, S = 1$  представляют собой вертикальную пластину длиной, равной двум, обтекаемую с отрывом струй. В этом случае (3.3) дают известные значения [3]

$$\frac{\mu_{22}}{\rho Y^2} = \frac{\mu_{22}}{\rho S^2} = 1.6896$$

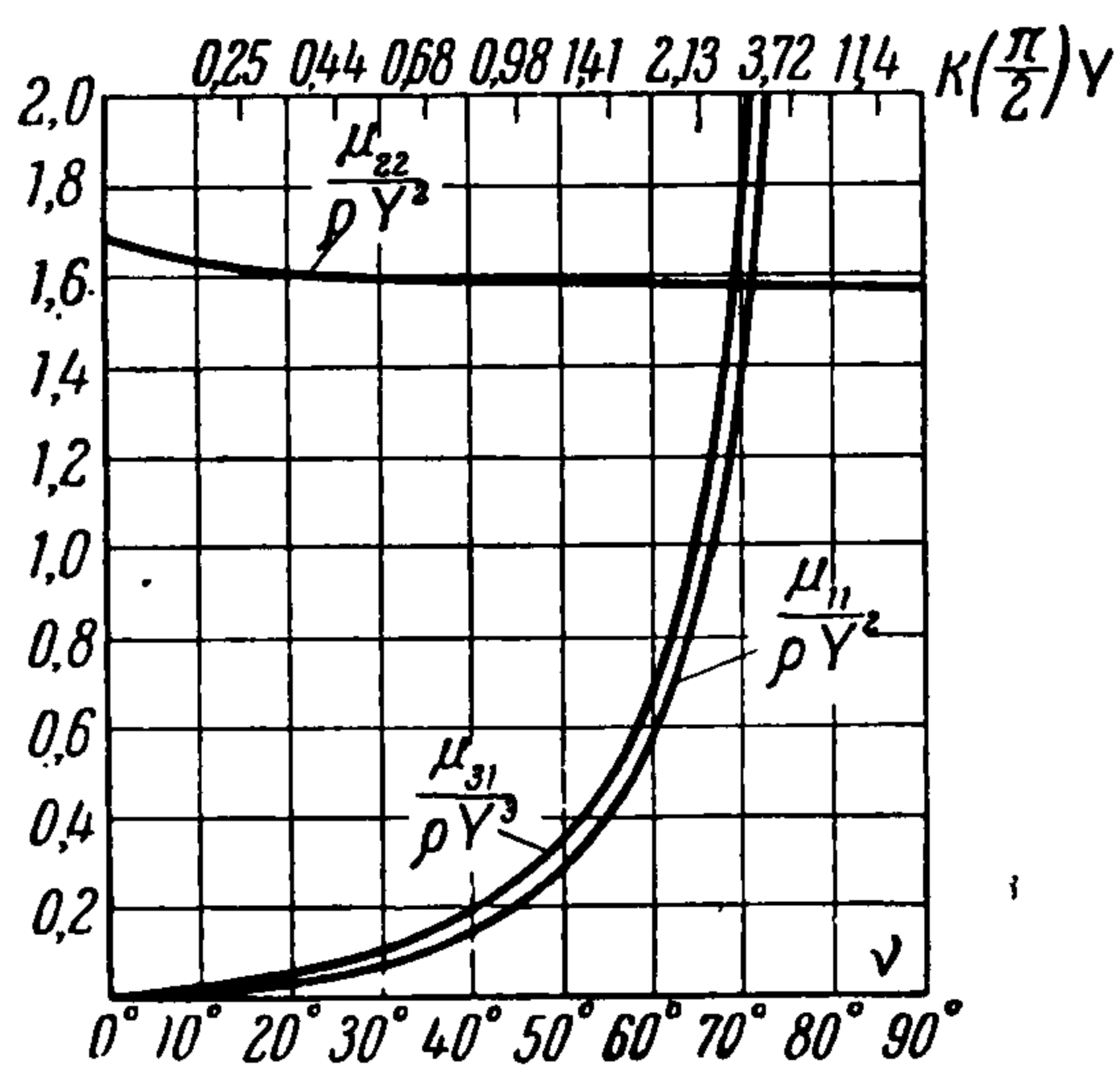
При  $\nu \rightarrow 1/2 \pi$  кривые  $X = 1, S = 1$  представляют собой пластину единичной длины, обтекаемую с обеих сторон; для нее по (3.3) имеем [2]

$$\frac{\mu_{11}}{\rho X^2} = \frac{\mu_{11}}{\rho S^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\mu_{31}}{\rho X^3} = \frac{\mu_{31}}{\rho S^3} = \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\mu_{33}}{\rho X^4} = \frac{\mu_{33}}{\rho S^4} = \frac{9\pi}{128}.$$

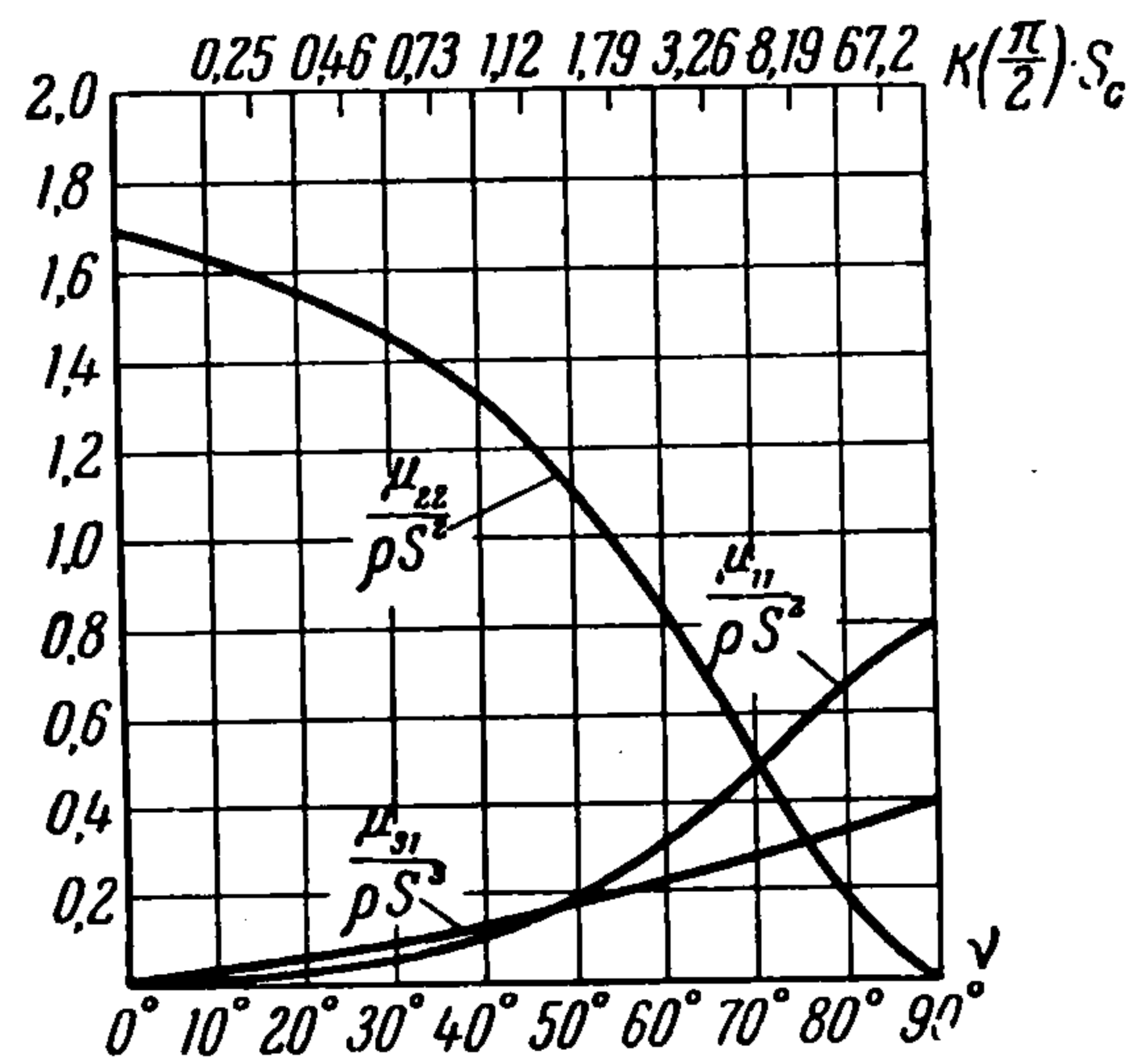
В заключение отметим, что при горизонтальном ударе кривой  $L(1, \nu)$ , в отличие от такого же удара клина [4], не наблюдается изменение знака касательной состав-



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

ляющей скорости ударного течения при переходе от точки  $O$  к  $C$  (фиг. 1). Для вертикального удара кривой  $L(1, \nu)$  знак меняется.

Поступила 1 IX 1958

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пыхтеев Г. Н. Точное решение задачи отрывного обтекания по схеме Кирхгофа для одного семейства кривых. Докл. АН СССР, т. 108, № 1, 1956.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
3. Гуревич М. И. Удар пластины при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
4. Берман Я. Р. Удар клина при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.