СКОС ПОТОКА ЗА СТРЕЛОВИДНЫМ ВИХРЕМ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

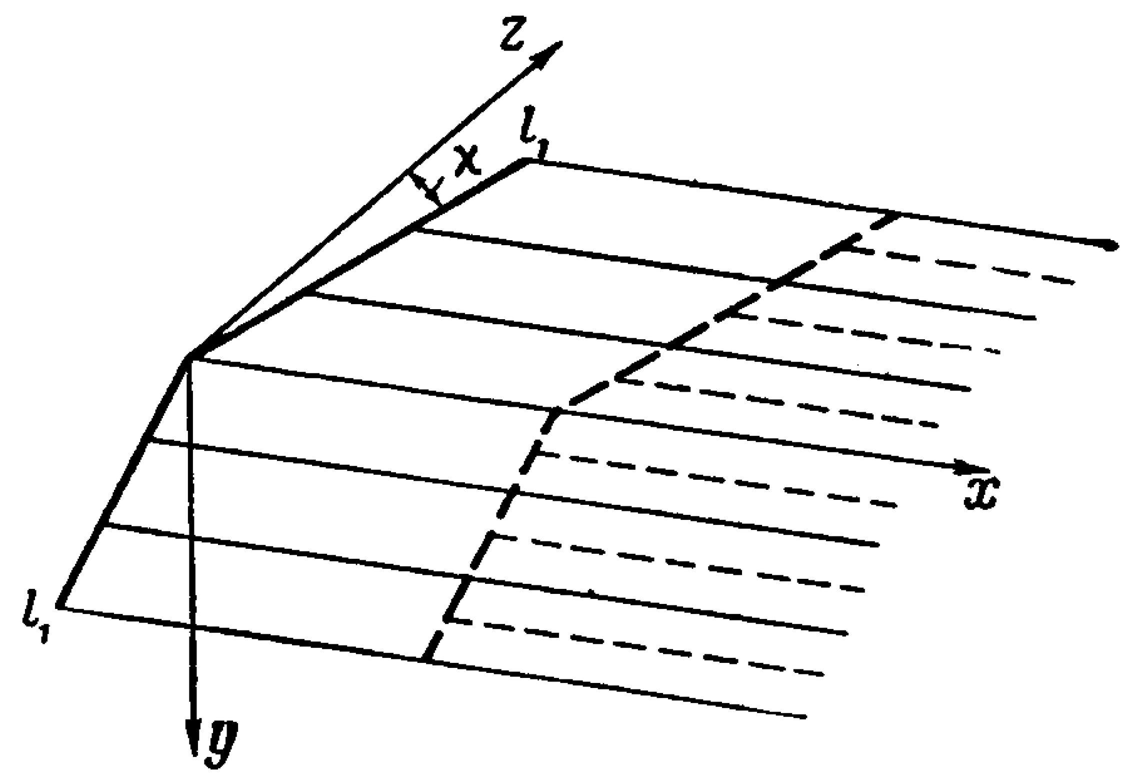
Е. А. Бирюков

(Москва)

В работе С. М. Белоцерковского [1] разработан расчет скоса потока за прямым вихрем конечного размаха при неустановившемся движении.

В настоящей статье предложены формулы, позволяющие создать метод расчета скоса потока в идеальной несжимаемой жидкости за крылом большого удлинения и с малым углом стреловидности для случая, когда циркуляция, переменная по размаху крыла, гармонически меняется по времени.

Вычислим скос потока за вихрем конечного размаха с переменной интенсивностью и с малым углом стреловидности, обтекаемым нестационарным дозвуковым потоком идеальной жидкости. Скорости скоса будут составляться из скоростей, полученных от влияния квазистационарной пелены, состоящей из свободных вихрей (V_{y1}), параллельных несущим вихрям, пелены связанных вихрей (V_{y2}), сходящих с присоединенных и параллельных оси x, изображенных на фигуре сплошными линиями, и нестационарной вихревой пелены, которая в свою очередь состоит из пелены свободных нестационарных вихрей (W_{y1}), сходящих с несущего вихря — штриховые линии, паралелльные несущим вихрям, и пелены нестационарных связанных вихрей (W_{y2}), изображенных штриховыми линиями, параллельными оси x и сходящими с нестационарных свободных вихрей. Если циркуляция Г на несущем вихре получает некоторое приращение, то по теореме Гельмгольца приращение такое же по абсо лютной величине, но обратное по знаку, получает и циркуляция в нестационарном вихревом следе, сбегающем с несущего вихря, т. е. интенсивность циркуляции нестационарной вихревой пелены, например, в точке $(x, 0, 0)$ в момент времени t будет



$$\frac{d\Gamma(x, t)}{dt} = -\frac{1}{V_0}\frac{d}{dt}\Gamma\left(t - \frac{x}{V}\right) \qquad (1)$$

Предположим, что циркуляция несущего вихря меняется по времени:

$$\Gamma(z, t) = \Gamma_0(z) f(t) \qquad \left(\frac{d\Gamma_0}{dz} < 0\right) \qquad (2)$$

Тогда по теореме Био-Савара в точке (x_0, y_0, z_0) скорость скоса будет

$$V_{y1} = \frac{f(t)}{4\pi}\int\limits_{-l}^{+l}\Gamma_0(z)\frac{x_0 - z\operatorname{tg}\varkappa}{[(|z|\operatorname{tg}\chi - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}dz \qquad (3)$$

$$V_{y2} = -\frac{f(t)}{4\pi}\int\limits_{-l}^{+l}\int\limits_{|z|\operatorname{tg}\chi}^{\infty}\frac{d\Gamma_0(z)}{dz}\frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \qquad (4)$$

$$W_{y1} = -\frac{1}{4\pi V_0}\int\limits_{-l}^{+l}\int\limits_{0}^{\infty}\Gamma_0(z)\frac{(x_0 - x^* - |z|\operatorname{tg}\chi)\,dz\,dx^*}{[(x_0 - x^* - |z|\operatorname{tg}\chi)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}\frac{df(t - x^*/V)}{dt} \qquad (5)$$

$$W_{y2} = \frac{1}{4\pi V_0}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{df(t - x^*/V)}{dt}dx^*\int\limits_{x^* + |z|\operatorname{tg}\chi}^{\infty}\frac{z\,dx}{[(x - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}\int\limits_{-l}^{+l}\frac{d\Gamma_0(z)}{dz}dz \qquad (6)$$

где x^* — текущая координата по оси симметрии несущего вихря. Перед интегралом (4) стоит знак минус, так как интенсивность связанных вихрей отрицательна. В последнем интеграле $d\Gamma / dz > 0$, ибо это производная пелены вихрей, сходящих с нестационарных свободных вихрей, направление вращения которых обратно направлению вращения несущего вихря. Возьмем гармонический случай изменения Г по времени:

$$\Gamma = \Gamma_0(z)\,e^{i\omega t} \qquad (7)$$

и рассмотрим скосы потока на оси симметрии несущего вихря. Скос потока от квазистационарной пелены будет находиться в фазе с циркуляцией несущего вихря, в то время как скос потока от нестационарной вихревой пелены будет запаздывать по отношению к Г. Поэтому общий скос будет выражаться в следующем виде:

$$V_y = V_{y0} e^{i(\omega t - \vartheta)} \tag{8}$$

где ϑ — запаздывание скоса. Для дальнейшего рассмотрения интегралов воспользуемся некоторыми интерполяционными формулами. Введем угол θ, предположив, что

$$z = l_1 \cos\theta \qquad z_\nu = l_1 \cos\theta_\nu, \qquad \theta_\nu = \nu \frac{\pi}{m+1} \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

а m — некоторые фиксированные, но произвольно выбранные положительные числа.

Если $F(\theta)$ — функция, которая аппроксимирована первыми m членами ряда Фурье, то согласно интерполяционной формуле

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{m} F_n R_n \qquad \left(R_n = \frac{2}{m+1} \sum_{\tau=1}^{m} \sin\tau\theta_n \sin\tau\theta\right) \tag{10}$$

После вычисления интегралов с использованием интерполяционных формул получим выражения для амплитуды скорости скоса потока и запаздывания скоса:

$$V_{y0} = \frac{1}{4\pi}\left[S_1^2 + (S_2 - S_3)^2\right]^{1/2}, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{S_1}{S_2 - S_3} \tag{11}$$

$$S_1 = k \sum_{n=1}^{m} \Gamma_n I_n^*, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{m} \Gamma_n I_n, \qquad S_3 = k \sum_{n=1}^{m} \Gamma_n I_n' \quad \left(k = \frac{\omega l_1}{V_0} = \frac{\omega l}{V_0}\frac{1}{\cos\chi}\right) \tag{12}$$

$$I_n^* = \frac{2}{m+1}\left[\sum_{\tau=1}^{m} \sin\tau\theta_n \int_0^\pi \sin\tau\theta \sin\theta \frac{\xi_0 - |\cos\theta|\operatorname{tg}\chi}{[(\xi_0 - |\cos\theta|\operatorname{tg}\chi)^2 + \cos^2\theta]^{3/2}}\, d\theta + \right.$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{m} \tau \sin\tau\theta_n \int_0^\pi \frac{\cos\tau\theta}{\cos\theta}\left[\frac{|\cos\theta|\operatorname{tg}\chi - \xi_0}{[(\xi_0 - |\cos\theta|\operatorname{tg}\chi)^2 + \cos^2\theta]^{1/2}} + 1\right] d\theta -$$

$$\left. - 2\pi \sum_{\tau=1}^{[\varkappa]} (-1)^\tau (2\tau - 1)\sin(2\tau - 1)\theta_n\right] \qquad \left(\xi_0 = \frac{x_0}{l_1}, \ \varkappa = \operatorname{ent}\frac{m+1}{2}\right) \tag{14}$$

$$I_n = \frac{2}{m+1}\sum_{\tau=1}^{m} \sin\tau\theta_n\left[\int_0^\pi \sin\tau\theta \sin\theta \ \ T_1(\theta)\, d\theta + \tau \int_0^\pi \cos\tau\theta \ \ T_2(\theta)\, d\theta\right] \tag{15}$$

$$I_n' = \frac{2}{m+1}\sum_{\tau=1}^{m} \sin\tau\theta_n\left[\int_0^\pi \sin\tau\theta \sin\theta \ \ T_1'(\theta)\, d\theta + \tau \int_0^\pi \cos\tau\theta \ \ T_2'(\theta)\, d\theta\right] \tag{16}$$

$$T_1(\theta) = j_1 \sin(k, a) - j_2 \cos(k, a), \qquad j_1 = \int_{-a}^{\infty} \frac{\gamma}{\delta^3} \sin k\gamma \, d\gamma \tag{17}$$

$$T_2(\theta) = -j_3 \sin(k, a) + j_4 \cos(k, a), \qquad j_2 = \int_{-a}^{\infty} \frac{\gamma}{\delta^3} \cos k\gamma \, d\gamma \tag{18}$$

$$T_1'(\theta) = -j_2 \sin(k, a) - j_1 \cos(k, a), \qquad j_3 = \int_{-a}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)\frac{\sin k\gamma}{\cos\theta}\, d\gamma \tag{19}$$

$$T_2'(\theta) = j_4 \sin(k, a) + j_3 \cos(k, a), \qquad j_4 = \int_{-a}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)\frac{\cos k\gamma}{\cos\theta}\, d\gamma \tag{20}$$

где

$$a = \xi_0 - |\cos\theta|\operatorname{tg}\chi, \qquad \delta = (\gamma^2 + \cos^2\theta)^{1/2} \tag{21}$$

Поступила 1 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М. Подковообразный вихрь при неустановившемся движении. ПММ, т. XIX, вып. 2, 1955.