ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Меркулов
(Киев)

В работе рассматривается уравнение установившегося теплообмена в стационарном потоке вязкой жидкости. При этом считается, что коэффициент температуропроводности является постоянным, а задача о нахождении поля скоростей рассматриваемых потоков считается решенной.

Для стационарного распределения температуры в установившемся потоке [1]

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a\Delta T + f(x, y) \tag{1}$$

где v_x и v_y — компоненты вектора скорости. Если в безграничном потоке помещено тело с границей S, то для уравнения (1) краевые условия будут

$$\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} = \gamma \quad \text{на } S, \qquad \lim T = \text{const}, \quad x^2 + y^2 \to \infty$$

Очевидно, что последнюю постоянную всегда можно сделать равной нулю. Кроме того, в последующем будем рассматривать только задачу Дирихле, т. е. считать $\beta = 0$.

Введем функцию тока Ψ. Тогда уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\frac{D(T, \Psi)}{D(x, y)} = a\Delta T + f(x, y), \qquad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2}$$

Уравнение (2) не меняет вида при переходе к любой другой изотермической системе координат. Перейдем, например, к системе координат φ, ψ, где φ и ψ — действительная и мнимая части комплексного потенциала течения идеальной жидкости в той же области. В новой системе получим уравнение

$$\frac{D(T, \Psi)}{D(\varphi, \psi)} = a\Delta_{\varphi\psi} T + f_1(\varphi, \psi) \tag{3}$$

а область Q с границей S перейдет в плоскость Q' с разрезом S' вдоль оси φ, на котором и надлежит выполнять краевые условия.

Введем функцию $\chi = \psi - \Psi$ и перепишем уравнение (3) так:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \Delta T = \frac{1}{a}\frac{D(T, \chi)}{D(\varphi, \psi)} \tag{4}$$

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, решающее задачу о теплообмене в потоке идеальной жидкости:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \Delta T = 0 \tag{5}$$

Такая задача рассматривалась несколькими авторами [2-4].

Середину разрыва S' совместим с началом координат и введем эллиптическую систему координат ξ, η по формулам $\varphi = \operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $\psi = \operatorname{sh}\xi\sin\eta$.

При этом разрез T' совпадет с координатной линией $\xi = 0$. Это позволяет уравнение (5) решать методом разделения переменных. Имея общее решение уравнения 5) и фундаментальное решение, дающееся функцией

$$\exp\left[-\frac{1}{2a}(\varphi - \varphi_0)\right] K_0\left[\frac{1}{2a}\sqrt{(\varphi-\varphi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2}\right]$$

мы можем построить функцию Грина уравнения (5) задачи Дирихле в плоскости Q' с разрезом S'. В обозначениях [5] искомую функцию можно написать так:

$$G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{2a}\right)\exp\left[-\frac{1}{2a}(\varphi - \varphi_0)\right] - g(\xi, \eta)$$

где

$$g(\xi, \eta) = \exp\left[-\frac{1}{2a}(\varphi - \varphi_0)\right] \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m \operatorname{se}(\eta) + \beta_m \operatorname{ce}_m(\eta)]\, FeK_m(\xi)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi FeK_m(0)} \int_{-\pi}^{\pi} K_0\left(\frac{r}{2a}\right)\Big|_{\xi=0} \operatorname{se}_m(\eta)\, d\eta, \qquad r^2 = (\varphi - \varphi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2$$

$$\beta_m = \frac{1}{2\pi FeK_m(0)} \int_{-\pi}^{\pi} K_0\left(\frac{r}{2a}\right)\Big|_{\xi=0} \mathrm{ce}_m(\eta)\, d\eta$$

При помощи этой функции уравнение (5) заменим интегральным уравнением:

$$T(\varphi_0, \psi_0) = F(\varphi_0\psi_0) + \frac{1}{a}\iint\limits_{Q'} T(\varphi, \psi)\frac{D(\chi, G)}{D(\varphi, \psi)}\, d\varphi\, d\psi \qquad (6)$$

где $F(\varphi_0, \psi_0)$ — температурное поле в потоке идеальной жидкости.

Функции $\partial\chi / \partial\varphi$ и $\partial\chi / \partial\psi$, являющиеся разностями скоростей течения вязкой и идеальной жидкости, для безотрывного течения при больших числах Рейнольдса можно определить, пользуясь теорией пограничного слоя. Согласно этой теории указанные величины будут равны нулю вне некоторой параболы Q_1, уравнение которой:

$$\sqrt{(\varphi + c)^2 + \psi^2} - (\varphi + c)^2 = b R^{-1/2},$$

где R — число Рейнольдса, а параметр c выбран так, что разрез S' находится в Q_1.

Кроме того, в указанной параболе можно положить

$$\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} \sim R^{-1/2}, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial\psi} \sim 1 \qquad (7)$$

Далее из условий $G = 0$ при $\psi = 0$ следует, что $G \sim R^{-1/2}$ в Q_1. Очевидно, что такой же порядок будет иметь и производная $\partial G / \partial\varphi$ в Q_1. Все это позволяет указать порядок для ядра интегрального уравнения (6)

$$\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\frac{\partial G}{\partial\psi} - \frac{\partial\chi}{\partial\psi}\frac{\partial G}{\partial\varphi} \sim R^{-1/2}$$

Уравнение (6) будем решать в пространстве ограниченных непрерывных функций на плоскости $C[-\infty, \infty]$. При этом норму ядра уравнения (6) определим так:

$$\|K\|_C = \max_{(\varphi_0, \psi_0)} \left\{\frac{1}{a}\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{D(\chi, G)}{D(\varphi, \psi)}\right| d\varphi\, d\psi\right\} \qquad (8)$$

От переменных φ, ψ и φ_0, ψ_0 перейдем к переменным

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{a}, \qquad \psi_1 = \frac{\psi}{a}, \qquad \varphi_{01} = \frac{\varphi_0}{a}, \qquad \psi_{01} = \frac{\psi_0}{a}$$

В выбранном масштабе функция G не будет зависеть от параметра a.

Очевидно, что оценки (7) сохраняют свой смысл и в новом масштабе.

Пользуясь написанным ранее представлением функции Грина и указанными оценками, можно получить неравенство

$$\|K\|_C < M\; R^{-1/2}$$

где M — некоторая константа, не зависящая от a и R.

Это неравенство позволяет сформулировать теорему: уравнение (6), решающее задачу о теплообмене в потоке вязкой жидкости при достаточно больших числах Рейнольдса, имеет в пространстве $C[-\infty, \infty]$ единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Свободный член $F(\varphi_0, \psi_0)$, дающий решение задачи о теплообмене в потоке идеальной жидкости, может мало отличаться от решения задачи вязкой жидкости в смысле метрики $C[-\infty, \infty]$, если число R достаточно велико.

Из этих результатов ясно, почему не удалась попытка Кинга [3] решить задачу о термоанемометре, пользуясь моделью идеальной жидкости.

Поступила 9 VIII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С. М. Основные задачи теории ламинарных потоков. ГТТИ, 1951.
2. B o u s s i n e s q M. I. Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. Journ al de Math., vol. 1, 1905.
3. K i n g L. V. On the Convection of Heat from Small Cylinders in a Stream of Fluid Philos. Trans. A 214, 1914.
4. С р е т е н с к и й Л. Н. О нагревании потока жидкости твердыми стенками. ПММ, т. II, вып. 2, 1935.
5. М а к - Л а х л а н. Теория и приложения функций Матье. Изд-во иност. лит., М., 1935