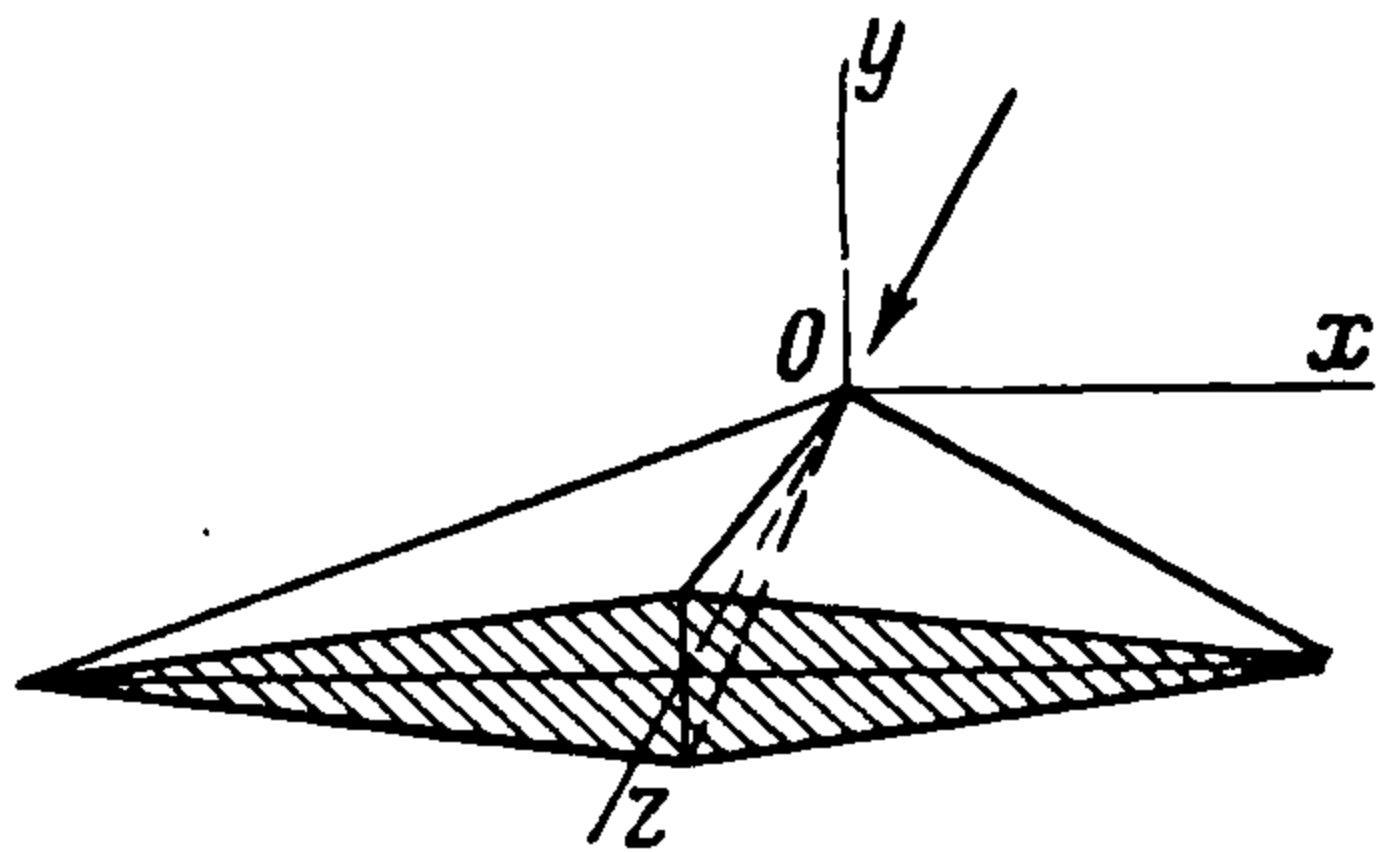


**ЗАМЕЧАНИЕ К ДОКЛАДУ А. ФЕРРИ «НОВАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РАБОТА
ПО СВЕРХЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКЕ
В БРУКЛИНСКОМ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ» [1]**

Б. М. Булах

(Саратов)

Значительная часть доклада А. Ферри [1] посвящается обсуждению сверхзвуковых конических течений, возникающих при больших числах Маха и больших возмущениях, производимых обтекаемым телом. В частности, большое место отводится



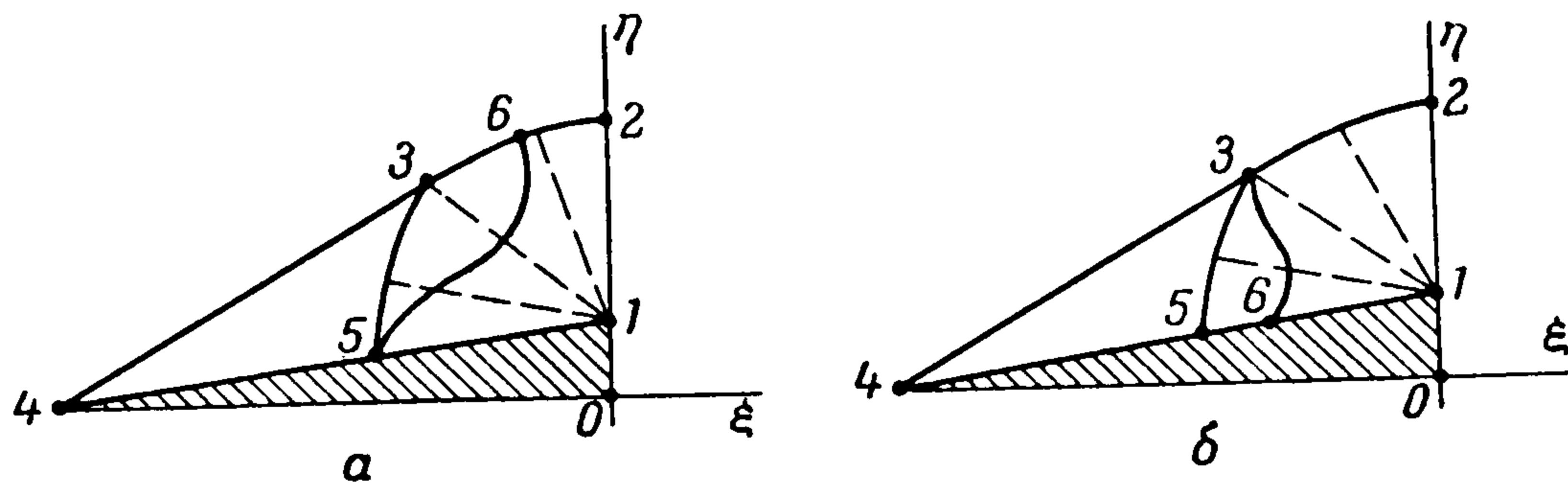
Фиг. 1

обсуждению свойств конических потоков в окрестности параболической («звуковой») линии. В заметке показывается, что поведение конических потоков, примыкающих к однородному потоку вдоль конуса Маха (параболическая линия), не может быть описано разложениями, предложенными А. Ферри и его сотрудниками. Это обстоятельство лишает основания выводы о существовании промежуточных трансзвуковых областей, примыкающих к конусу Маха, введенных А. Ферри при рас-

смотрении обтекания сверхзвуковым потоком треугольных конических крыльев с поперечным сечением типа ромба. Обсуждается вопрос о возможности возникновения таких областей.

Рассмотрим для определенности треугольное коническое крыло с поперечным сечением в виде ромба, помещенное в однородный сверхзвуковой поток под нулевым углом атаки (фиг. 1).

В силу симметрии обтекания крыла будем рассматривать только область $x < 0$, $y > 0$. Предполагаем, что передние кромки крыла сверхзвуковые. Так как возникающие потоки будут конические, то компоненты скорости потока и энтропия зависят



Фиг. 2

только от $\xi = x/z$, $\eta = y/z$ или, если использовать сферическую систему координат с началом в точке O (фиг. 1), — только от угловых переменных.

Картина обтекания крыла на плоскости $\xi\eta$ приводится на фиг. 2. На передней кромке крыла возникает плоский скачок, изображаемый на фиг. 2 отрезком 4—3; после него следует область однородного потока, примыкающая к поверхности крыла (отрезок 4—5—1). Однородный поток отделяется от общего конического потока соответствующим ему конусом Маха (дуга эллипса 3—5). Кривая 3—2 соответствует криволинейному скачку, возникающему над центральной частью крыла.

Система уравнений, описывающая конические безвихревые (вихревые) потоки, гиперболического типа, если проекция скорости на плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору точки в пространстве xuz , больше местной скорости звука и эллиптического (смешанного: две характеристики мнимые, две действительные, слившиеся) типа в противоположном случае.

В области однородного потока 4—5—3 (фиг. 2) решение гиперболического типа. Дуга конуса Маха 3—5 является одновременно параболической линией и характеристической кривой. В докладе А. Ферри утверждается, что к однородному потоку вдоль дуги конуса Маха 3—5 примыкает область гиперболического решения (транс-

звуковая область) 3-5-6 (на фиг. 2). Эта область смыкается вдоль второй параболической линии 5-6 (на фиг. 2а), 3-6 (на фиг. 2б) с областью, где решение эллиптического типа (1-2-6-5 на фиг. 2а и 1-2-3-6 на фиг. 2б). Трансзвуковые области могут быть двух видов (фиг. 2а и 2б). Поведение решения в этих областях описывается разложениями, о которых будет сказано ниже.

Введем, следуя Ферри, сферическую систему координат ψ, θ, r , с осью, совпадающей по направлению со скоростью однородного потока в области 4-5-3 (фиг. 2 и 3).

Конус Маха 3-5 (фиг. 2) изображается на единичной сфере окружностью $\psi = \psi^*$, $\sin \psi^* = M^{-1}$, где M — число Маха однородного потока в области 4-5-3 (фиг. 2).

Введем вместо v_n, w новые искомые переменные $u = \sqrt{v_n^2 + w^2}$ и β , где $\operatorname{tg} \beta = v_n/w$, и будем отмечать величины, относящиеся к конусу Маха, звездочками; так,

$$\begin{aligned} v_n^* &= -a^*, & \beta^* &= -\frac{1}{2}\pi \\ v_r^* &= a^* \sqrt{M^2 - 1}, & w^* &= 0 \end{aligned}$$

(a^* — скорость звука однородного потока). В докладе А. Ферри приводится разложение для безвихревого решения в окрестности произвольной параболической (звуковой) линии; для случая дуги конуса Маха в выбранной системе координат оно записывается в виде

$$u = a^* (1 + K_{12} A_{12} + m_{12}^2 A_{12}^2 + \dots) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v_r &= a^* \sqrt{M^2 - 1} \left\{ 1 + \frac{2}{3} (M^2 - 1)^{-1/2} (\gamma + 1)^{1/2} K_{12}^{1/2} A_{12}^{3/2} + \frac{\gamma - 1}{6} A_{12}^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{5} (M^2 - 1)^{-1/2} \left(\frac{\gamma + 1}{K_{12}} \right)^{1/2} \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{18 (\gamma + 1)} (M^2 - 1) + \frac{K_{12}^2}{2} + m_{12} \right] A_{12}^{5/2} + \\ &+ \left. \left[\frac{(\gamma - 1)^3}{108 K_{12}} (M^2 - 1)^{1/2} \left(\frac{1}{5 (\gamma + 1)} - (M^2 - 1)^{1/2} \right) + \frac{\gamma - 1}{45 K_{12}} \left(\frac{53 - 5\gamma}{4} K_{12}^2 - m_{12} \right) \right] A_{12}^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{2}{3} (\gamma + 1)^{1/2} K_{12}^{3/2} A_{12}^{3/2} \pm K_{12} (M^2 - 1)^{1/2} \frac{4\gamma + 5}{6} A_{12}^2 + \dots$$

$$\psi = \psi^* - \frac{2}{3} (\gamma + 1)^{1/2} K_{12}^{1/2} A_{12}^{3/2} - \frac{\gamma - 1}{6} (M^2 - 1)^{1/2} A_{12}^2 + \dots$$

$$\theta = \theta^* \mp M A_{12} \mp \frac{\gamma + 1}{4} M K_{12} A_{12}^2 + \dots$$

Здесь A_1, A_2 — криволинейные координаты вдоль характеристик, определяемые уравнениями

$$\frac{d\psi}{dA_{12}} = \sin(\beta \pm \mu), \quad \frac{\sin \psi d\theta}{dA_{12}} = \cos(\beta \pm \mu), \quad \sin \mu = \frac{a}{u}$$

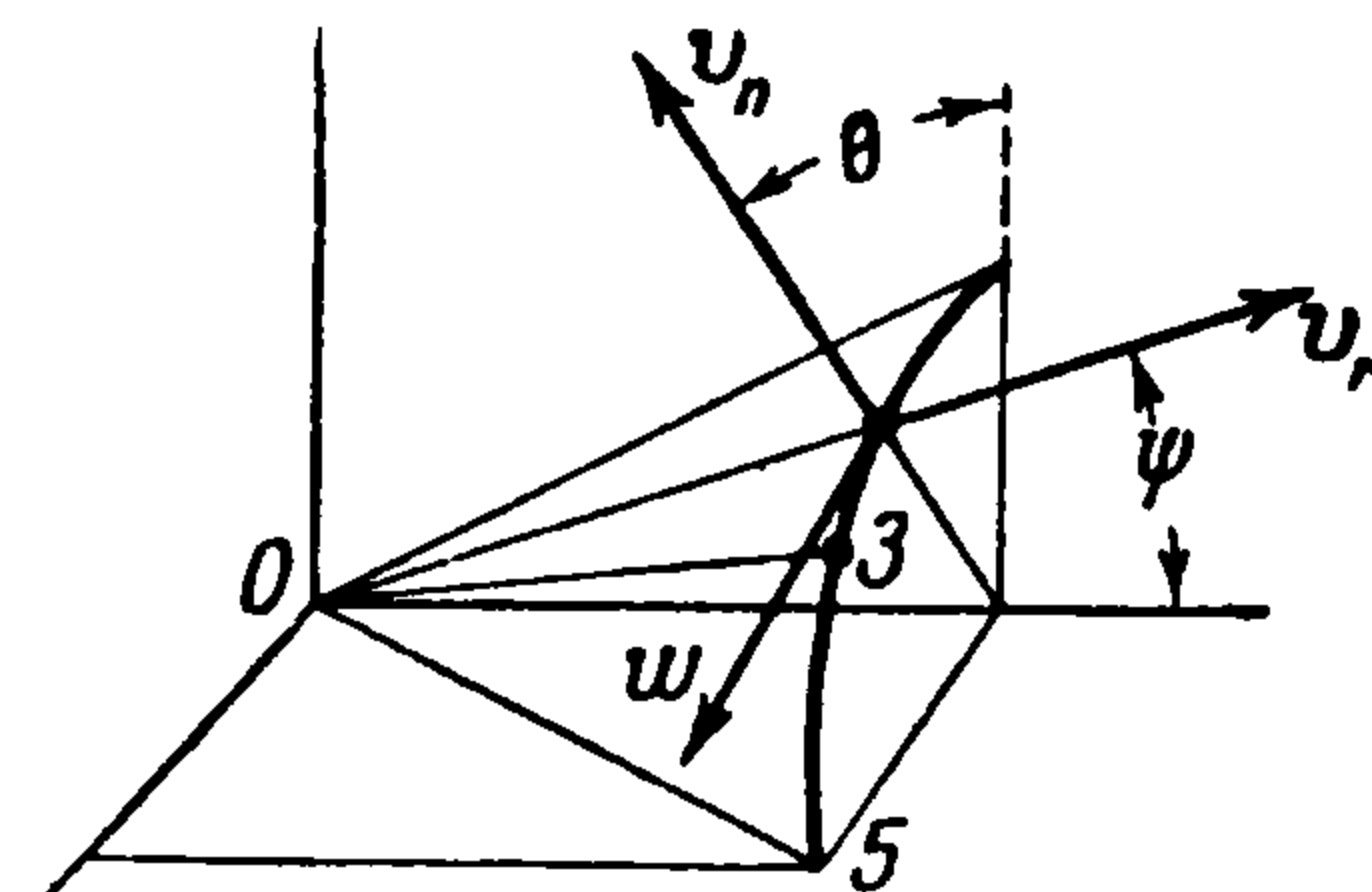
и отсчитываемые от параболической линии, значок 1 и верхний знак в формулах относятся к первому семейству характеристик, значок 2 и нижний знак — ко второму, K_{12}, m_{12} — коэффициенты разложения u в ряд по степеням A_{12} вдоль характеристик, ψ^*, θ^* — значения ψ и θ для фиксированной характеристики на параболической линии, γ — отношение удельных теплоемкостей. Многоточием обозначены члены высшего порядка относительно A_{12} , а позже — относительно $\psi^* - \psi$.

Из (1) видно, что K_{12} не может обращаться в нуль, так как в противном случае один из коэффициентов при $A_{12}^{3/2}$ или A_{12}^3 в разложении для v_r обращался бы в бесконечность. Далее (1) следует, что вдоль характеристик

$$A_{12} = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} (\gamma + 1)^{-1/2} K_{12}^{-1/2} (\psi^* - \psi)^{2/3} + \dots \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$u = a^* \left[1 + \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} (\gamma + 1)^{-1/2} K_{12}^{1/2} (\psi^* - \psi)^{2/3} + \dots \right] \quad (3)$$



Фиг. 3

Будем теперь рассматривать не одну характеристику, а целое семейство, например первое, тогда K_1 становится функцией ψ и θ , $K_1 = K_1(\psi, \theta)$, которая остается ограниченной при $\psi \rightarrow \psi^*$ произвольным образом, так как семейство характеристик заполняет полуокрестность параболической линии. Обозначим

$$\lim_{\psi \rightarrow \psi^*} K_1(\psi, \theta) = K(\theta) \neq 0$$

Тогда

$$K_1(\psi, \theta) = K(\theta) - [K(\theta) - K_1(\psi, \theta)] = K(\theta) + \dots$$

и (3) может быть записано в виде

$$u = a^* \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (\gamma + 1)^{-1/3} K(\theta)^{1/3} (\psi^* - \psi)^{2/3} + \dots \right] \quad (4)$$

справедливым при любом ψ и θ в окрестности $\psi = \psi^*$.

Аналогично из (1) и (2) получим

$$\beta = -\frac{1}{2} \pi + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} (\gamma + 1)^{1/3} K^2(\theta) (\psi^* - \psi) + \dots \quad (5)$$

$$v_r = a^* \sqrt{M^2 - 1} + a^* (\psi^* - \psi) \quad (6)$$

Уравнение неразрывности после преобразований с использованием уравнений количества движения и энергии записывается в виде

$$\begin{aligned} v_r \left(2 - \frac{v_n^2 + w^2}{a^2} \right) + v_n \operatorname{ctg} \psi + \left(1 - \frac{v_n^2}{a^2} \right) \frac{\partial v_n}{\partial \psi} + \\ + \left(1 - \frac{w^2}{a^2} \right) \frac{\partial w}{\sin \psi \partial \theta} - \frac{v_n w}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial v_n}{\sin \psi \partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Для безвихревого потока

$$\frac{\partial v_n}{\partial \theta} = \frac{\partial (w \sin \psi)}{\partial \psi} \quad (8)$$

Подставим (8) в (7), умножим результат на $\sin \psi (1 - w^2/a^2)^{-1}$, проинтегрируем по θ в пределах от θ_0 до θ , произведем замену $v_n = u \sin \beta$, $w = u \cos \beta$ (интегрирование производится для исключения производной $\partial w / \partial \theta$), в результате получим

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \psi (u^2 \cos^2 \beta - a^2) \left\{ v_r (2a^2 - u^2) + u \sin \beta (a^2 - u^2 \cos^2 \beta) \operatorname{ctg} \psi + \right. \\ \left. + [(a^2 - u^2 \sin^2 \beta) \sin \beta - 2u^2 \sin \beta \cos^2 \beta] \frac{\partial u}{\partial \psi} + [(a^2 - u^2 \sin^2 \beta) \cos \beta + \right. \\ \left. + 2u^2 \sin^2 \beta \cos \beta] u \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right\} d\theta + u(\psi, \theta_0) \cos \beta(\psi, \theta_0) - u(\psi, \theta) \cos \beta(\psi, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Используя (4), (5), (6) и их производные по ψ (члены, обозначенные многоточием, не влияют на результат), легко непосредственной подстановкой установить, что (9) в окрестности $\psi = \psi^*$ имеет вид:

$$\frac{a^*}{M} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (\gamma + 1)^{1/3} \int_{\theta_0}^{\theta} K^{1/3}(\theta) d\theta (\psi^* - \psi)^{1/3} + \dots = 0 \quad (10)$$

Деля (10) на $(\psi^* - \psi)^{1/3}$ и устремляя ψ к ψ^* , получим, что

$$\int_{\theta_0}^{\theta} K^{1/3}(\theta) d\theta \equiv 0 \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по θ в предположении кусочной непрерывности $K(\theta)$, получим

$$K(\theta) \equiv 0 \quad (12)$$

что противоречит выведенному ранее условию, что $K \neq 0$.

Полученное противоречие показывает, что разложение (1), справедливое в окрестности изолированной параболической («звуковой») точки типа $\beta^* = -1/2 \pi$, не представляет решения в том случае, когда эти точки заполняют непрерывно целую кривую (конус Маха).

Автор настоящей заметки исследовал поведение конических потоков в окрестности конуса Маха при естественных предположениях относительно гладкости решения [2] и получил, что найденное им разложение для F приводит к эллиптическому типу решения в окрестности конуса Маха. Других типов решения найдено не было и, вероятнее всего, их не существует.

Как можно понять из доклада А. Ферри, вторая параболическая линия 3-6 (фиг. 2б) была обнаружена следующим образом. (Заметим сразу же, что случай, изображенный на фиг. 2а, мы не рассматриваем, так как мы не знаем решений гиперболического типа в окрестности конуса Маха.) Задавалась форма криволинейного скачка 3—2 (фиг. 2б); это давало возможность из условий на скачке и уравнений конических потоков найти значение скоростей и их нормальных производных на линии скачка и тем самым вычислить значение скоростей в точках близких к линии скачка.

По этим значениям скоростей снова находились из уравнений конических течений нормальные производные, по которым находились значения скоростей в последующих точках и т. д. Это приводит к появлению второй параболической линии.

Тут следует обратить внимание на важное обстоятельство, что вдоль линии постоянной энтропии 3-1 (фиг. 2б) происходит смыкание безвихревого и вихревого конических потоков. (В дальнейшем линии постоянной энтропии мы будем называть линиями тока; они изображены пунктиром на фиг. 2). Исследуем особенности перехода через такую линию. Система уравнений, описывающая вихревые конические потоки с постоянной энтальпией торможения, имеет вид:

$$\begin{aligned} L_1 &= (u - \xi w) \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_\xi + (v - \eta w) \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_\eta + a^2 (\xi w_\xi + \eta w_\eta - u_\xi - v_\eta) = 0 \\ L_2 &= w (\xi u_\xi + \eta v_\xi + w_\xi) + (v - \eta w) (v_\xi - u_\eta) + a^2 s_\xi = 0 \\ L_3 &= w (\xi u_\eta + \eta v_\eta + w_\eta) + (u - \xi w) (u_\eta - v_\xi) + a^2 s_\eta = 0 \\ L_4 &= (u - \xi w) s_\xi + (v - \eta w) s_\eta = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $s = S [(\gamma - 1) \gamma c_v]^{-1}$, S — энтропия, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, u, v, w — составляющие скорости в декартовой системе координат, a — скорость звука,

$$a^2 = a_0^2 - 1/2 (\gamma - 1) (W_0^2 - u^2 - v^2 - w^2), \quad \xi = x/z, \quad \eta = y/z$$

где a_0, W_0 — скорость звука и скорость потока в некоторой точке.

Уравнения (13) представляют собой комбинацию уравнений количества движения, неразрывности, энергии.

Заменим уравнения $L_2 = L_3 = 0$ более удобными для дальнейшего

$$\begin{aligned} L_5 &= L_2 (u - \xi w) + L_3 (v - \eta w) = \xi [(u - \xi w) u_\xi + (v - \eta w) u_\eta] + \\ &+ \eta [(u - \xi w) v_\xi + (v - \eta w) v_\eta] + (u - \xi w) w_\xi + (v - \eta w) w_\eta = 0 \\ L_6 &= -L_2 (v - \eta w) + L_3 (u - \xi w) = w \{ \xi [(u - \xi w) u_\eta - (v - \eta w) u_\xi] + \\ &+ \eta [(u - \xi w) v_\eta - (v - \eta w) v_\xi] + (u - \xi w) w_\eta - (v - \eta w) w_\xi \} + \\ &+ [(u - \xi w)^2 + (v - \eta w)^2] (u_\eta - v_\xi) + a^2 [(u - \xi w) s_\eta - (v - \eta w) s_\xi] = 0 \end{aligned}$$

Система (13) эквивалентна системе (14):

$$L_1 = L_4 = L_5 = L_6 = 0 \quad (14)$$

Из вида уравнений $L_4 = 0, L_5 = 0$ сразу же следует, что линии тока, определяемые уравнениями

$$\frac{d\xi}{u - \xi w} = \frac{d\eta}{v - \eta w}$$

являются двойными характеристиками системы (14). Оставшиеся две характеристики, как можно показать, определяются такими же уравнениями, как и в случае безвихревого движения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$A = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2, \quad B = a^2\xi\eta - (u - \xi w)(v - \eta w), \quad C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2$$

Эти характеристики не совпадают с линиями тока.

Так как линии тока являются характеристиками (14) то производные как s , так и u , v , w могут терпеть разрыв при переходе через нее. Введем переменные ρ , σ при помощи формул $\xi = \xi(\rho, \sigma)$, $\eta = \eta(\rho, \sigma)$, так что $\rho = \text{const}$ вдоль линий тока, а $\sigma = \text{const}$ вдоль ортогональных к ним траекторий.

В новых переменных система (14) запишется так:

$$L_1 = [(v - \eta w)\xi_\rho - (u - \xi w)\eta_\rho] \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)_\sigma + a^2 [\xi(\eta_\sigma w_\rho - \eta_\rho w_\sigma) + \eta(\xi_\rho w_\sigma - \xi_\sigma w_\rho) + \eta_\rho u_\sigma - \eta_\sigma u_\rho + \xi_\sigma v_\rho - \xi_\rho v_\sigma] = 0$$

$$L_4 = s_\sigma = 0, \quad L_5 = \xi u_\sigma + \eta v_\sigma + w_\sigma = 0 \quad (15)$$

$$L_6 = w[(v - \eta w)\eta_\sigma + (u - \xi w)\xi_\sigma](\xi u_\rho + \eta v_\rho + w_\rho) + [(u - \xi w)^2 + (v - \eta w)^2](\xi_\sigma u_\rho - \xi_\rho u_\sigma + \eta_\sigma v_\rho - \eta_\rho v_\sigma) + a^2[(v - \eta w)\eta_\sigma + (u - \xi w)\xi_\sigma]s_\rho = 0$$

Из системы (15) ясно видно, что задание u , v , w на линии тока $\rho = \rho_0$ как функций σ ($s = s_0$) не определяет единственным образом нормальных производных u_ρ , v_ρ , w_ρ , s_ρ , т. е. они могут терпеть здесь разрыв.

Поскольку линия тока 3-1 (фиг. 2б) разделяет безвихревое течение ($s = \text{const}$) и вихревое ($s = s(\rho)$), то на ней s_ρ (или старшие производные s по ρ) терпят разрыв и, следовательно, как видно из уравнения $L_6 = 0$ в системе (15), производные u_ρ , v_ρ , w_ρ (или их старшие производные по ρ) обязательно терпят разрыв.

(Для безвихревого течения $\xi u_\rho + \eta v_\rho + w_\rho = 0$)

$$\xi_\sigma u_\rho - \xi_\rho u_\sigma + \eta_\sigma v_\rho - \eta_\rho v_\sigma = (\xi u_\rho + \eta v_\rho + w_\rho)_\sigma - (\xi u_\sigma + \eta v_\sigma + w_\sigma)_\rho = 0$$

По-видимому, разрыв производных от u , v , w не был учтен при переходе через линию тока 3-1 и непрерывное продолжение решений от скачка через линию 3-1 всегда приводило к появлению второй параболической («звуковой») линии 3-6 (фиг. 2б).

Из сказанного выше следует, что вопрос о возникновении второй звуковой линии, а следовательно, и промежуточных трансзвуковых областей требует дополнительного рассмотрения, и возможно, что их вообще не существует в точном решении. (Возможно, что в точке 3, фиг. 2 образуется разветвленный скачок уплотнения.)

Заметим попутно, что в статье Л. Фауэлла [3] при численном решении задачи о треугольном плоском крыле возможность существования разрыва производных от скоростей на линии, аналогичной 3-1, не учитывалась. По этой причине неясно, насколько расчеты Л. Фауэлла учитывают завихренность потока и можно ли их рассматривать как «точное» решение.

Поступила 7 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ferris A. Recent Theoretical Work in Supersonic Aerodynamics at the Polytechnic Institute of Brooklyn, Proceedings of the Conference on High-Speed Aeronautics, N. Y., 1955.
2. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
3. Fowell L. R. Exact and Approximate Solutions for the Delta Wing. J. Aero Sci., vol. 23, No 8, 1956.