О ФУНКЦИЯХ ЧАПЛЫГИНА

Л. Н. Сретенский
(Москва)

1. Уравнение для определения функции тока установившегося плоско-параллельного потенциального движения газа, записанное в переменных Чаплыгина θ и τ:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0$$

имеет следующее частное решение:

$$\psi(\theta,\tau)=z_n(\tau)\sin(n\theta+\alpha)$$

в котором $z_n(\tau)$ определяется через интеграл $y_n(\tau)$ гипергеометрического уравнения

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2}+[(n+1)+(\beta-n-1)\tau]\frac{dy_n}{d\tau}+\frac{1}{2}\beta n(n+1)y_n=0 \qquad (1)$$

по формуле

$$z_n(\tau)=\tau^{\frac{1}{2}}y_n(\tau)$$

Уравнение (1) имеет частное решение, изображаемое гипергеометрическим рядом

$$F(a_n, b_n, c_n; \tau) \qquad (2)$$

в котором параметры a_n, b_n, c_n определяются из уравнений

$$a_n+b_n=n-\beta, \qquad a_nb_n=-\frac{1}{2}\beta n(n+1), \qquad c_n=n+1$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь это частное решение уравнения (1); второе частное решение, независимое от первого, может быть вычислено через первое при помощи квадратуры.

Для определения параметров a_n и b_n в отдельности надо решить квадратное уравнение

$$\rho^2-(n-\beta)\rho-\frac{1}{2}\beta n(n+1)=0$$

корни которого и дадут параметры a_n и b_n.

В дальнейшем будем считать число β равным $^5/_2$. В этом предположении значения параметров a_n и b_n будут даваться формулами

$$a_n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sigma\right), \qquad b_n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sigma\right) \qquad (3)$$

где σ имеет следующее значение:

$$\sigma=\sqrt{24n^2+25}$$

Целью настоящей заметки является указать такие значения индекса n, для которых число σ будет целым рациональным числом. Интерес определения тех целых чисел n, для которых и число σ — целое, заключается в том, что для этих чисел n функции Чаплыгина $z_n(\tau)$ могут быть выражены через элементарные функции.

В самом деле, число σ всегда будет нечетным: $\sigma=2\sigma'+1$; отсюда формулы (3) перепишутся так:

$$a_n=\frac{1}{2}(n+\sigma'-2), \qquad b_n=\frac{1}{2}(n-\sigma'-3)$$

Так как число σ больше, чем $4n$, то параметр b_n будет всегда отрицательным и если числа n и σ' будут разной четности, то число b_n будет целым отрицательным числом; поэтому гипергеометрический ряд (2) превратится в многочлен.

Если же числа n и σ' будут одинаковой четности, то число a_n будет целым положительным числом; число b_n будет равно половине нечетного числа; в силу этого гипергеометрический ряд (2) обратится в рациональную функцию переменного τ. Отметим, что в этом случае и второе решение уравнения (1) изображается [1] элементарной функцией переменного τ.

2. Теперь наша задача заключается в том, чтобы указать, для каких целых чисел n число σ будет также целым. Для решения этой задачи мы должны разрешить в целых числах неопределенное уравнение

$$\sigma^2-24n^2=25 \qquad (4)$$

Решение этого уравнения может быть получено при помощи методов, изложенных Дирихле в его книге по теории чисел [2].

При решении уравнения (4) надо различать два случая: первый случай, когда числа n и σ взаимно простые; второй случай, когда числа n и σ имеют отличный от единицы общий наибольший делитель. Таким делителем может быть лишь число 5; полагая $n = 5n'$, $\sigma = 5\sigma'$, получаем для определения n' и σ' следующее уравнение:

$$\sigma'^2 - 24n'^2 = 1 \tag{5}$$

Применяя методы, изложенные в указанной книге, получаем в первом случае следующие решения уравнения (4):

$$\sigma_k = 7\,t_k + 24\,u_k, \qquad n_k = -(t_k + 7\,u_k) \tag{6}$$

и

$$\sigma_k = 7\,t_k - 24\,u_k, \qquad n_k = t_k - 7\,u_k \tag{7}$$

в каждой из этих пар формул число k пробегает целые положительные значения от 0 до ∞. Что же касается t_k и u_k, то это есть произвольная пара решений уравнения Пелля (Pell)

$$t^2 - 24\,u^2 = 1$$

Этому уравнению удовлетворяет пара чисел $T = 5$, $U = 1$, наименьших по своей величине. Все остальные пары t_k, u_k решений уравнения Пелля определятся при помощи примечательной формулы

$$t_k + u_k\sqrt{24} = (5 + 1.\sqrt{24})^k \tag{8}$$

где $k = 0,1,2,3,\ldots$ Значения чисел t_k и u_k для некоторых значений показателя k указаны в § 3.

Если числа σ или n, находимые по формулам (6) или (7), окажутся отрицательными, то мы вправе взять вместо такого числа равное ему по абсолютному значению положительное число. На основании формул (6) и (7) составим следующую таблицу значений чисел σ, n, a_n, b_n, c_n:

$k = 0$	$n = 1$	$\sigma = 7$	$a_1 = 1$	$b_1 = -\frac{5}{2}$	$c_1 = 2$
$k_1 = 1$	$n = 2$	$\sigma = 11$	$a_2 = \frac{5}{2}$	$b_2 = -3$	$c_2 = 3$
	$n = 12$	$\sigma = 59$	$a_{12} = \frac{39}{2}$	$b_{12} = -10$	$c_{12} = 13$
$k_2 = 2$	$n = 21$	$\sigma = 103$	$a_{21} = 35$	$b_{21} = -\frac{33}{2}$	$c_{21} = 22$
	$n = 119$	$\sigma = 583$	$a_{119} = 204$	$b_{119} = -\frac{175}{2}$	$c_{119} = 120$
$k = 3$	$n = 208$	$\sigma = 1019$	$a_{208} = \frac{715}{2}$	$b_{208} = -152$	$c_{208} = 209$
	$n = 1178$	$\sigma = 5771$	$a_{1178} = \frac{4061}{2}$	$b_{1178} = -855$	$c_{1178} = 1179$

3. Обратимся теперь к решению уравнения (5). На основании формулы (8) получаем следующие значения чисел σ' и n', равных соответственно числам t и u:

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3.$	..
$t = 1$	$t = 5$	$t = 49$	$t = 485.$	..
$u = 0$	$u = 1$	$u = 10$	$u = 99.$	..

По этим числам можем составить следующую заключительную таблицу:

$k = 0$	$n = 0$	$\sigma = 5$	$a_0 = 0$	$b_0 = -\frac{5}{2}$	$c_0 = 1$
$k = 1$	$n = 5$	$\sigma = 25$	$a_5 = \frac{15}{2}$	$b_5 = -5$	$c_5 = 6$
$k = 2$	$n = 50$	$\sigma = 245$	$a_{50} = 85$	$b_{50} = -\frac{75}{2}$	$c_{50} = 51$
$k = 3$	$n = 495$	$\sigma = 2425$	$a_{495} = \frac{2705}{2}$	$b_{495} = -360$	$c_{495} = 496$

Поступила 24 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Bateman Harry. Higher Transcendental Functions, vol. 1, Ch. II, New-York, 1953.
2. Лежен-Дирихле П. Г. Лекции по теории чисел, гл. IV, ОНТИ, М., 1936.