

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ НА ПОРШНЕ, ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ

В. Б. Адамский, Н. А. Попов

(Москва)

Выводится интегро-дифференциальное уравнение для плоского движения газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону. Это же уравнение описывает движение под действием короткого удара. Найдено разложение, которое служит хорошим приближением для решения этой задачи.

Рассмотрено поведение гидродинамических величин вблизи поршня на примере частного случая $\gamma = 7/5$. Показано, что при показателе автомодельности, соответствующем короткому удару, кроме уже известного решения о движении под действием короткого удара, существует решение, описывающее движение под действием спадающего давления на поршне.

В работе Н. А. Крашенинниковой [1] рассматривалась сходная задача о движении газа под действием поршня, скорость которого изменяется по степенному закону. При этом исследовались плоский, цилиндрический и сферический случай. Мы ограничиваемся плоским случаем. Выбор давления на поршне в качестве определяющего параметра позволяет единообразно описать широкий класс движений от равномерно движущегося поршня до так называемого короткого удара [2-4]. В серии работ [5-9], открывающейся статьей Вейцеккера, ставится задача отыскания такого автомодельного решения уравнений гидродинамики в плоском случае, к которому стремятся решения, соответствующие произвольным начальным условиям при неограниченном возрастании времени. Полученное в этих работах решение совпадает с решением, которое в статьях [2-4], а также в настоящей статье называется коротким ударом.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим движение газа под действием давления p на поршне, падающего или возрастающего по степенному закону:

$$p = It^{-\alpha} \quad (I = p_0 t_0^\alpha) \quad (1.1)$$

Здесь t — время, I — некоторая константа. Такое движение для первоначально холодного газа является автомодельным. Оно определяется четырьмя параметрами y, t, ρ, I , из которых три обладают независимыми размерностями (y — координата, ρ_0 — плотность холодного газа перед поршнем). Пусть Y — координата фронта ударной волны перед поршнем. Тогда

$$\frac{dY}{dt} = D = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \frac{p}{\rho_0}}$$

Отсюда

$$Y = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \frac{I'}{\rho_0} \frac{2}{2 - \alpha}} t^{1 - 1/2\alpha} \quad (1.2)$$

Здесь мы заранее воспользовались тем, что движение автомодельно, так как предположили, что давление на фронте ударной волны так же

зависит от времени, как и давление на поршне, отличаясь только значением констант I и I' .

Возведем равенства (1.2) в степень $n = 2\alpha / (2 - \alpha)$ и, используя (1.1), получим

$$p = A\rho_0 Y^{-n}, \quad A = \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \frac{I'}{\rho_0} \frac{2}{2-\alpha}} \right)^{-n} (I\rho_0)^{-1}$$

Пусть y — лагранжева координата. Вводя независимую переменную $x = y/Y$, изменяющуюся в пределах от 0 до 1, представим давление, скорость и плотность в виде

$$p = A\rho_0 Y^{-n} f(x), \quad u = \sqrt{A} Y^{-1/2n} v(x), \quad \rho = \rho_0 q(x) \quad (1.3)$$

На фронте ударной волны $x = 1$. Выберем функцию $f(x)$ так, чтобы $f(1) = 1$. Тогда $v(1) = \sqrt{2/(\gamma+1)}$. Используя уравнения газодинамики в форме Лагранжа, можно получить систему уравнений для f, v [3]

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} v + x \frac{dv}{dx} &= \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \frac{df}{dx} \\ \frac{dv}{dx} &= -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} x \frac{d}{dx} [x^n f]^{-\frac{1}{\gamma}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

и конечное соотношение для представителя плотности q :

$$q = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (x^n f)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (1.5)$$

Интегрируя второе уравнение (1.4) при условии $v(1) = \sqrt{2/(\gamma+1)}$, имеем

$$v = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \left\{ \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \int_x^1 (x^n f)^{-\frac{1}{\gamma}} dx - \frac{\gamma-1}{2} x (x^n f)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (1.6)$$

Подставляя v в первое уравнение (1.4), получаем основное уравнение рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} \frac{n}{4}(\gamma+1) - \frac{n}{4}(\gamma-1) \int_x^1 (x^n f)^{-\frac{1}{\gamma}} dx + \frac{n}{4}(\gamma-1) \left(\frac{2}{\gamma} - 1 \right) x (x^n f)^{-\frac{1}{\gamma}} + \\ + \left[\frac{\gamma-1}{2\gamma} (x^n f)^{-\frac{1}{\gamma}} x^{n+2} - 1 \right] \frac{df}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

с граничным условием $f = 1$ при $x = 1$.

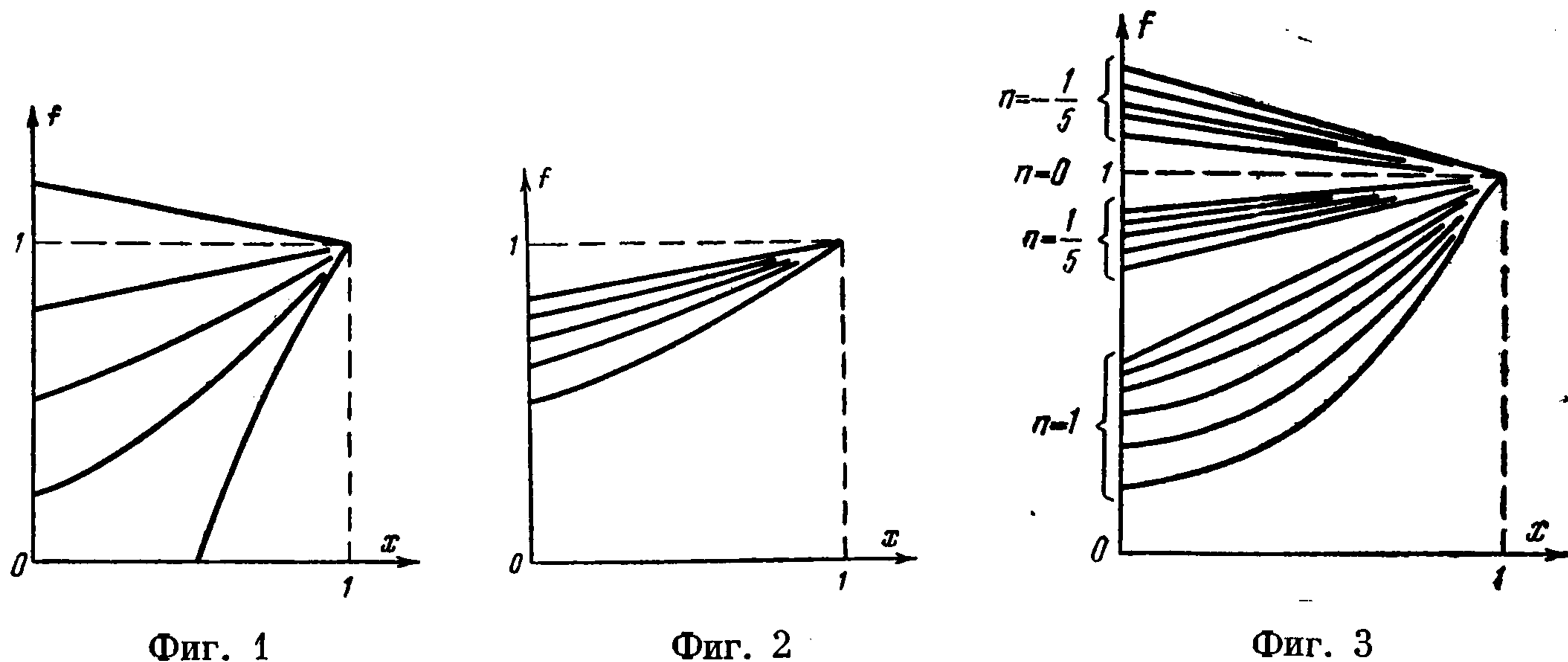
§ 2. Решения для некоторых отдельных случаев. Попытаемся решить задачу для всех γ и n . Представим себе общий ход функции $f(x)$ для разных значений n . При спадающем на поршне давлении давление в газе будет снижаться от фронта к поршню тем круче, чем быстрее падает давление на поршне. При $n = 0$, т. е. при постоянном давлении, $f = \text{const} = 1$. Таким образом, совокупность решения при каком-нибудь γ и при любом n может быть представлена в виде пучка кривых (фиг. 1), расходящихся из точки $f = 1, x = 1$.

Горизонтальная линия соответствует $n = 0$, т. е. постоянному давлению. Кривые, лежащие выше, соответствуют отрицательным n , т. е. давлению на поршне, возрастающему во времени.

По мере увеличения n увеличивается отношение давления на фронте к давлению на поршне. При каком-то значении n давление на поршне

(точнее, в точке $x = 0$) станет равным нулю и отношение $p(1)/p(0)$ устремится к бесконечности.

Такое распределение давления соответствует короткому удару, как он определен в работе Я. Б. Зельдовича [2].



Фиг. 1

Фиг. 2

Фиг. 3

Будем теперь искать такие γ и n , при которых существуют аналитические решения. Рассмотрим предельный случай $\gamma = 1$. Назовем условно такое вещество «изотермическим». Для него уравнение приобретает вид:

$$\frac{df}{dx} = \frac{n}{2} \quad (2.1)$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию $f(1) = 1$, будет

$$f = 1 + \frac{1}{2} n (x - 1) \quad (2.2)$$

Обратимся к другому предельному случаю несжимаемой жидкости, т. е. $\gamma = \infty$. Для этого удобно перейти от γ к предельному сжатию h , причем $\gamma = (h + 1)/(h - 1)$. Тогда уравнение (1.7) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} h - \frac{n}{2} \int_x^1 (x^n f)^{-\frac{h-1}{h+1}} dx + \frac{n}{2} \frac{h-3}{h-1} x (x^n f)^{-\frac{h-1}{h+1}} + \\ + (h-1) \left[\frac{1}{h+1} (x^n f)^{-\frac{2h}{h+1}} x^{n+2} - 1 \right] \frac{df}{dx} = 0 \end{aligned}$$

Проделав необходимые преобразования и устремив $h \rightarrow 1$, получим уравнение для несжимаемой жидкости

$$\frac{n}{2} (x + 1) + \frac{n^2}{4} (x - 1) + \frac{n}{4} \left[\int_x^1 \ln f dx + x \ln f \right] - \left(1 - \frac{x^2}{2f} \right) \frac{df}{dx} = 0 \quad (2.3)$$

В точке $x = 1$ значение производной $df/dx = 2n$. Следовательно, вблизи точки $x = 1$ имеем

$$f = 1 + 2n(x - 1) + \dots \quad (2.4)$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (2.2), видим, что при любом n кривые, описывающие ход давления в газах с различным показателем адиабаты γ , выходят из точки $x = 1$ в виде пучка (фиг. 2), ограниченного вблизи $x = 1$ прямыми с наклоном $1/2 n$ и $2n$, соответствующим двум предельным случаям $\gamma = 1$ и $\gamma = \infty$.

Положим $f = x^\alpha$, что соответствует случаю короткого удара, так как $f = 0$ при $x = 0$.

Подставляя $f = x^\alpha$ в уравнение (1.7), имеем

$$\frac{n}{4} \left[\gamma + 1 - \frac{(\gamma - 1)\gamma}{\gamma - n - \alpha} \right] + (\gamma - 1) \left[\frac{n}{4} \left(\frac{\gamma}{\gamma - n - \alpha} + \frac{2}{\gamma} - 1 \right) + \frac{\alpha}{2\gamma} \right] x^{1 - \frac{n+\alpha}{\gamma}} - \alpha x^{\alpha-1} = 0$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, нужно предположить, что

$$1 - \frac{n+\alpha}{\gamma} = \alpha - 1, \quad \gamma + 1 - \frac{(\gamma - 1)\gamma}{\gamma - n - \alpha} = 0 \quad (2.5)$$

$$(\gamma - 1) \left[\frac{n}{4} \left(\frac{\gamma}{\gamma - n - \alpha} + \frac{2}{\gamma} - 1 \right) + \frac{\alpha}{2\gamma} \right] = \alpha$$

либо

$$\alpha = 1, \quad \frac{n}{4} \left[\gamma + 1 - \frac{(\gamma - 1)\gamma}{\gamma - n - \alpha} \right] = \alpha \quad (2.6)$$

$$(\gamma - 1) \left[\frac{n}{4} \left(\frac{\gamma}{\gamma - n - \alpha} + \frac{2}{\gamma} - 1 \right) + \frac{\alpha}{2\gamma} \right] = 0$$

Система уравнений (2.5) противоречива и не дает никакого нового решения. Система уравнений (2.6) дает сразу уже известный результат:

$$\gamma = 1, \quad n = 2$$

Полагая $\gamma \neq 1$, для γ получим уравнение $5\gamma^2 - 12\gamma + 7 = 0$, которое имеет корни 1 и $7/5$.

Используя выражения (1.5) и (1.6), получим формулы для полного набора гидродинамических величин:

$$f = x, \quad q = 6x^{5/2}, \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{6}} \left(3 - \frac{1}{x^{3/2}} \right) \quad (2.7)$$

Это решение было получено С. Хернером [7], В. Хефеле [9], а также А. И. Жуковым и Я. М. Кажданом [4].

Итак, уравнение (1.7), описывающее движение газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону, имеет решения, представляющие пучки кривых, выходящие из точки $x = 1, f = 1$. При этом каждому значению параметра n , характеризующему скорость изменения давления на поршне, соответствует свой пучок, содержащий решения, относящиеся ко всевозможным значениям показателя адиабаты от $\gamma = 1$ до $\gamma = \infty$. Чем меньше по абсолютной величине параметр n , тем уже пучок. При $n = 0$ пучок вырождается в прямую линию.

Примерный вид и расположение таких пучков на плоскости x, f изображены на фиг. 3.

Все кривые, относящиеся к определенному n , лежат в пределах угла, очерченного прямыми

$$f = 1 + \frac{1}{2} n (x - 1), \quad f = 1 + 2n (x - 1)$$

Кроме того, среди этой совокупности решений имеется решение $f = 1 + (x - 1)$, которое соответствует $\gamma = 7/5$ и $n = 4/3$.

Все эти соображения позволяют надеяться, что для хорошего описания решения уравнения (1.7) в широком интервале значений γ и n можно воспользоваться несколькими первыми членами разложения функции $f(x)$ в ряде Тейлора вблизи точки $x = 1$.

Приводим первые четыре члена этого разложения:

$$\begin{aligned}
 f = & 1 + n \frac{2\gamma - 1}{\gamma + 1} (x - 1) + \frac{n}{2} \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^2} \left\{ 5\gamma - 1 - \frac{n}{2} (5\gamma + 2) \right\} (x - 1)^2 + \\
 & + \frac{n}{6} \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^3} \left\{ 2(12\gamma^2 - 11\gamma + 1) - \frac{3}{2} n(35\gamma^2 - 19\gamma - 2) + \right. \\
 & + \left. \frac{n^2}{4} (111\gamma^2 - 59\gamma + 4) \right\} (x - 1)^3 + \frac{n}{24} \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^4} \left\{ 6(29\gamma^3 - 47\gamma^2 + 19\gamma - 1) - \right. \\
 & - n(784\gamma^3 - 1043\gamma^2 + 272\gamma + 11) + \frac{n^2}{4} (4159\gamma^3 - 4876\gamma^2 - 1165\gamma - 24) - \\
 & \left. - \frac{n^3}{8} (3419\gamma^3 - 3762\gamma^2 + 855\gamma + 8) \right\} (x - 1)^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Это разложение решает задачу с практически достаточной степенью точности для всех γ и n в случае спадающего давления и для малых γ и n в случае возрастающего давления.

Из сравнения результатов точного численного счета по уравнениям (1.4) с формулой разложения (2.8) следует, что чем меньше n и чем ближе γ к единице, тем разложение точнее. При $n < 2/3$ и $\gamma < 2$ можно ограничиться тремя и при еще меньших γ и n двумя членами разложения. Этим же разложением можно воспользоваться для нахождения наибольшего возможного значения n для любого γ , т. е. такого n , при котором уже имеет место короткий удар. Действительно, приравняв нулю при $x = 0$ выражение для f , содержащее один, затем два, три, четыре члена разложения, получаем уравнения соответственно для первого, второго, третьего и четвертого приближений параметра n для короткого удара. Значение n изменяется в пределах от $n = 1.117$ для $\gamma = \infty$ (несжимаемая жидкость) до $n = 2$ для $\gamma = 1$ («изотермическое» вещество). В статье В. Хефеле приведены значения величины $k = n / (2 + n)$ для четырех значений γ , полученные путем численного счета: $\gamma = 1.1$, $k = 0.43112$, $\gamma = 1.4$, $k = 0.4$, $\gamma = 5/3$, $k = 0.38927$, $\gamma = 2.8$, $k = 0.343296$.

Из разложения (2.8) для f можно получить плотность, пользуясь конечным соотношением (1.5), и скорость при помощи квадратуры (1.6). Заметим, что из формулы (1.5) непосредственно следует равенство плотности на поршне нулю при положительных n и бесконечности при отрицательных n .

§ 3. Осуществление автомоделных решений. Частный случай $n = 1$, $\alpha = 2/3$ совпадает с известным решением Л. И. Седова [10] о сильном взрыве для плоского варианта. Действительно, в этом решении давление на фронте и по всей области падает как $t^{-3/2}$. В решении Л. И. Седова рассматривается движение газа в обе стороны от плоскости, на которой произошло мгновенное выделение энергии. При этом в силу симметрии плоскость, на которой выделилась энергия, остается неподвижной.

Это решение можно интерпретировать как описывающее движение газа под действием давления на поршне, спадающего как $t^{-3/2}$. Поршень при таком движении остается неподвижным. Очевидно, что такое движение является граничным между движением двух классов: первого с $\alpha < 2/3$ и $n < 1$, при котором поршень движется в направлении общего движения газа (скорость движения газа в этом случае нигде не переходит в нуль), и второго с $\alpha > 2/3$ и $n > 1$, включающего в себя короткий удар, при

котором поршень отбрасывается назад (в этом случае скорость газа в некоторой точке переходит через нуль, газ движется в обе стороны).

Для того чтобы движение было автомодельным, давление должно меняться со временем по закону $p = It^{-\alpha}$.

При отрицательных α согласно этому закону давление в момент $t = 0$ равно нулю и далее возрастает пропорционально $t^{|\alpha|}$. Такой ход давления по времени может быть осуществлен физически, и поэтому движение с давлением на поршне, возрастающим по степенному закону, с момента возникновения протекает как автомодельное. При положительных α давление в момент $t = 0$ бесконечно и дальше падает $\sim t^{-\alpha}$.

Бесконечное давление в момент $t = 0$ не может быть осуществлено. В физически реальной постановке задачи следует предположить, например, что давление с амплитудой p_0 действовало в течение t_0 , после чего падало по закону $p = It^{-\alpha}$.

Определим энергию, передаваемую газу поршнем за время движения. В плоском случае $E \sim px$, где x — длина области, охваченной движением, $p \sim t^{-\alpha}$, $x \sim ut \sim t^{1-\alpha/2}$ и, следовательно, $E \sim t^{1-3\alpha/2}$.

Энергия, вносимая поршнем за время движения с постоянным давлением $E_0 \sim t_0^{1-3\alpha/2}$, если считать, что $p_0 \sim t_0^{-1}$. Отсюда следует, что при $\alpha < 2/3$ энергия, вносимая поршнем в процессе движения по закону $t^{-\alpha}$, неограниченно растет со временем. Таким образом, доля в энергии газа, полученная газом за время постоянного давления на поршне, стремится к нулю. Из этого следует, что движение становится автомодельным, когда $E \gg E_0$ или $t \gg t_0$. В случае $\alpha = 2/3$ поршень, на котором давление падает как $t^{-2/3}$, не передает энергии газу, передается только импульс. Энергия, имеющаяся в газе, приобретена за время первого толчка. Этот случай описывается решением Л. И. Седова. Л. И. Седовым показано также, что через время $t \gg t_0$ движение становится автомодельным. Наконец, если α больше $2/3$ и меньше значения α в случае короткого удара, то энергия передается газу первым толчком и затем отбирается поршнем в процессе его движения назад. Таким образом, в этом случае на протяжении всего времени движения существенно входят два характерных параметра: энергия, внесенная первым толчком, и величина I в формуле $p = It^{-\alpha}$, определяющая давление на поршне. Поэтому без особого исследования нельзя сказать, осуществляется ли в этом случае автомодельное движение. Осуществление автомодельного движения в случае короткого удара показано Я. Б. Зельдовичем [2], А. И. Жуковым и Я. М. Кажданом [4].

§ 4. Поведение гидродинамических величин вблизи поршня. Рассмотрим подробнее поведение гидродинамических величин вблизи поршня в случае движений с $n > 1$ или $\alpha > 2/3$.

Для этого воспользуемся некоторыми результатами статьи [3]. В этой статье для исследования короткого удара уравнения (1.4) были сведены к одному уравнению

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z} \frac{\frac{\gamma-1}{\sqrt{2(\gamma+1)}} n - \frac{\gamma-1}{4} (n+2) u - \frac{n\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} u^2 z + \gamma u z}{\frac{n}{2} (\gamma+1) \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} u z - (2\gamma-n) z + \frac{\gamma-1}{2} (n+2)} \quad (4.1)$$

при помощи подстановок

$$f = z^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x^{\frac{2\gamma-n}{\gamma+1}}, \quad v = uz^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x^{\frac{\gamma-n-1}{\gamma+1}}$$

При этом интегральная кривая, соответствующая короткому удару, находилась из условия прохождения через особую точку уравнения. Особая точка в переменных u, z имеет координаты

$$u = -2\sqrt{2/\gamma+1}, \quad z = (\gamma-1)/2\gamma$$

Перейдем теперь к независимой переменной x и функции f . Связь между этими величинами в особой точке

$$f = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x^{\frac{2\gamma-n}{\gamma+1}} \quad (4.2)$$

Если нам известен ход давления $f(x)$ в случае короткого удара, то мы можем найти x , соответствующее особой точке. Эта особая точка является седлом. Одна из сепаратрис седла служит интегральной кривой, соответствующей короткому удару. В этом случае все гидродинамические величины в особой точке являются непрерывными и гладкими.

С другой стороны, особую точку можно рассматривать как место слабого разрыва и продолжать функцию $f(x)$ после особой точки по другой сепаратрисе. При этом получается, что $f(x)$ растет с уменьшением x и равно конечной величине при $x=0$. Эта ветвь есть решение задачи о движении под действием давления на поршне, спадающего по закону $p = It^{-\alpha}$, где $\alpha = 2n/(2+n)$ и n — показатель автомодельности решения о коротком ударе. То, что решение с другой сепаратрисой соответствует поршню, подтверждается следующим рассуждением. В случае $n > 1$ поршень движется назад (скорость отрицательна), замедляясь. Это значит, что $\partial u / \partial t > 0$. Тогда из уравнения движения $\partial u / \partial t = \rho_0^{-1} \partial p / \partial x$ следует, что $\partial p / \partial x < 0$. Таким образом, в ходе давления от фронта к поршню имеется немонотонность. Давление от фронта к поршню падает, проходит через минимум и вновь растет вблизи поршня. Именно такая картина и получается, если выбрать решение для движения с поршнем в виде ломаной кривой, составленной из двух сепаратрис. В качестве примера приведем случай $\gamma = 7/5$, удобный тем, что для него имеется аналитическое решение.

Особая точка в переменных u, z имеет координаты $u = -2\sqrt{5/6}$, $z = 1/7$, $f = (1/7)^{7/12} x^{11/12}$, так как в данном случае $f = x$, то $x = (1/7)^{1/2} \approx 0.054$.

Ветвь, соответствующая поршню, не имеет аналитического решения.

Из численного счета следует, что $f(x)$ возрастает от $f = 0.054$ в особой точке до $f = 0.1101$ на поршне. Заметим, что $\partial p / \partial x = 0$ на поршне в случае $n = 1$ (случай Л. И. Седова) и $\partial p / \partial x > 0$ при $n < 1$.

Таким образом, немонотонность в ходе давления имеет место только при $1 < n < n_1$, где n_1 соответствует короткому удару.

Выясним физический смысл особой точки. Для этого произведем переход от лагранжевых координат к эйлеровым. Пусть ξ — отношение текущей эйлеровой координаты к координате фронта; формула перехода

$$\xi = 1 - \int_x^1 \frac{dx}{q} \quad (4.3)$$

Для случая $\gamma = 7/5$ и $n = 4/3$, подставляя $q = 6x^{3/2}$, получаем

$$\xi = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} x^{-2/3}, \quad x = (5 - 4\xi)^{-3/2} \quad (4.4)$$

Для гидродинамических величин и адиабатической скорости звука получим

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{(5 - 4\xi)^{3/2}}, & q &= \frac{6}{(5 - 4\xi)^{3/2}} \\ v &= \sqrt{\frac{5}{6}}(2\xi - 1), & c &= \sqrt{\frac{7}{30}}(5 - 4\xi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пусть z и Z — текущая эйлерова координата и координата фронта, так что $\xi = z/Z$. Известно, что $Z = At^{1-\alpha/2}$

$$Z = At^{3/5}, \quad \xi = \frac{z}{Z} = \frac{z}{At^{3/5}}$$

Константу A нетрудно найти, используя соотношения на фронте ударной волны

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{3}{5} At^{-2/5}$$

С другой стороны,

$$\frac{dZ}{dt} = D = \sqrt{\frac{6}{5}} t^{-2/5}$$

Отсюда $A = \sqrt{10/3}$ и

$$z = \sqrt{\frac{10}{3}} \xi t^{3/5} \quad (4.6)$$

Теперь построим z, t -диаграмму, на которую нанесем некоторые ξ -линии и поле характеристик. Запишем уравнение того семейства характеристик, которые несут возмущения в сторону фронта:

$$\frac{dz}{dt} = u + c$$

Имеем

$$\frac{dz}{dt} = [u(\xi) + c(\xi)] t^{-\frac{\alpha}{2}} \quad (4.7)$$

В рассматриваемом случае (4.7) уравнение примет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \left[\sqrt{\frac{5}{6}}(2\xi - 1) + \sqrt{\frac{7}{30}}(5 - 4\xi) \right] t^{-2/5} \quad (4.8)$$

Придавая ξ различные конкретные значения, будем получать уравнения ξ -линий и наклоны характеристик при пересечении ими соответствующих ξ -линий; уравнение фронта получим, положив $\xi = 1$ в формуле (4.6):

$$Z = \sqrt{\frac{10}{3}} t^{3/5}$$

наклон, с которым характеристики приходят к фронту:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{7}{30}} \right) t^{-2/5}$$

Уравнение точки, в которой зародилось движение, также представляет собой ξ -линию с $\xi = 0$. Характеристики пересекают ее с наклоном

$$\frac{dz}{dt} = \left[-\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{7}{30}} \right] t^{-2/5}$$

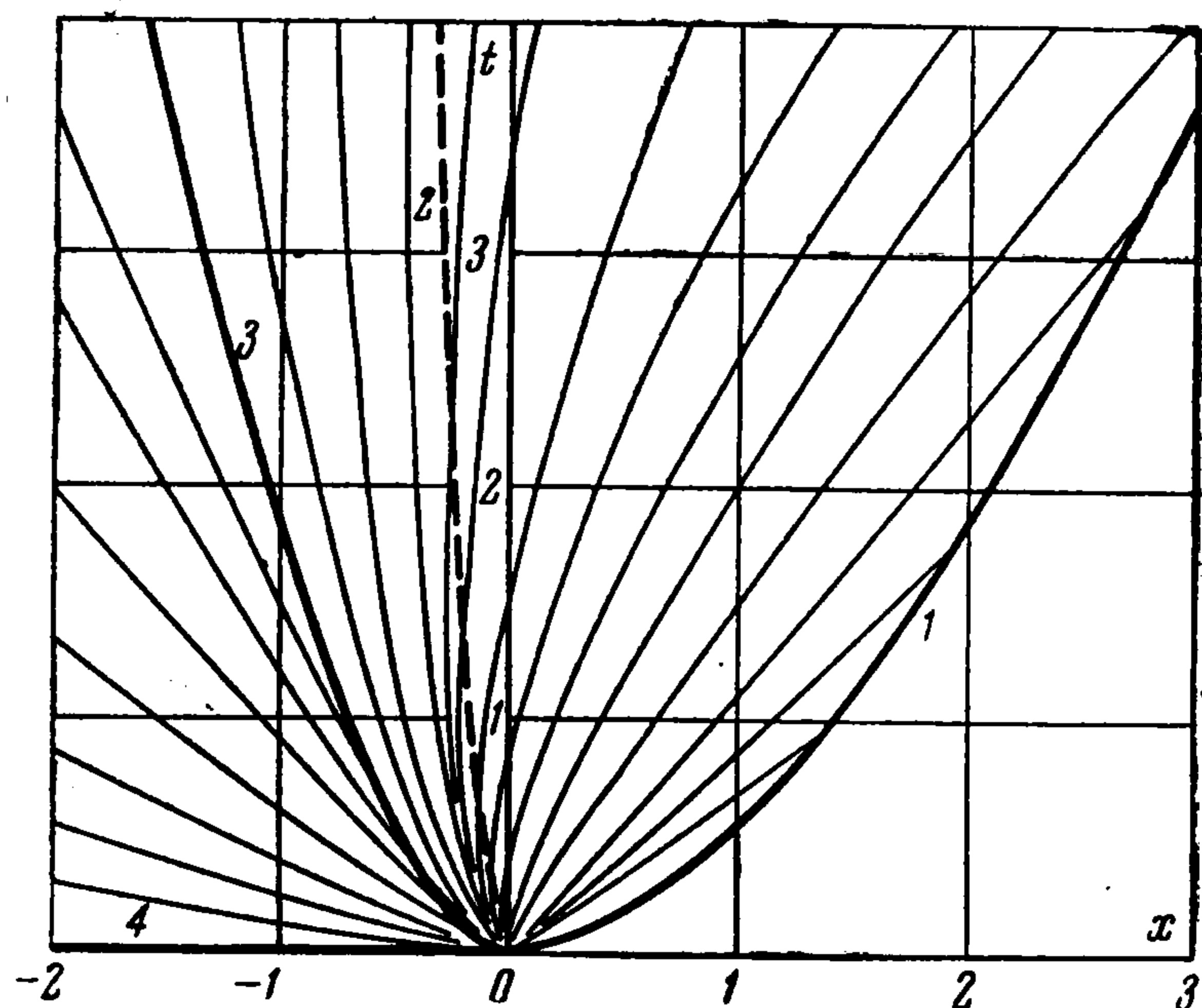
В особой точке $\xi = -1/2$. Для соответствующей ξ -линии

$$z = -\sqrt{\frac{5}{6}} t^{3/5}, \quad \frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{3}{10}} t^{-2/5}$$

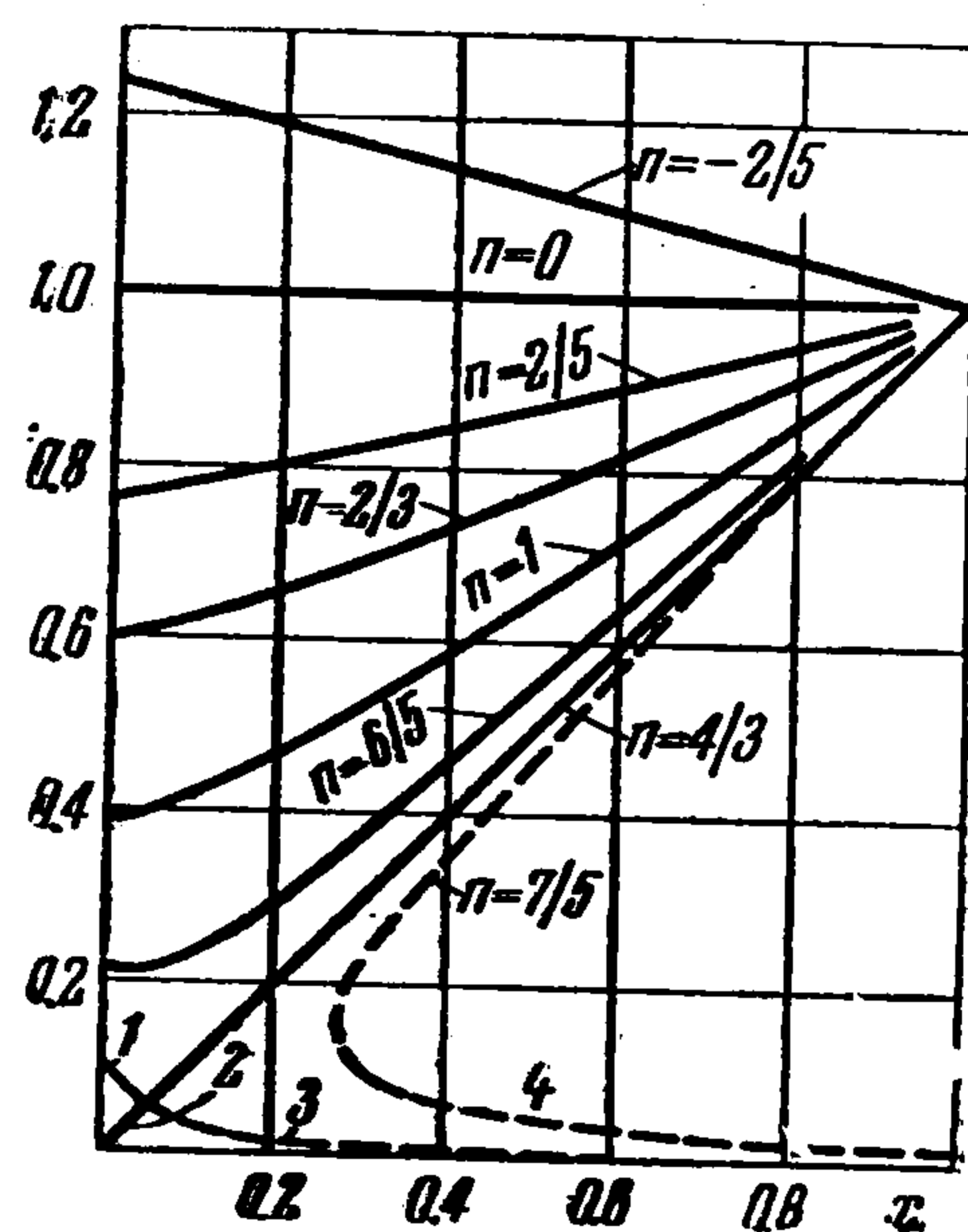
Таким образом, наклон характеристик совпадает с наклоном самой ξ -линии, т. е. ξ -линия, соответствующая особой точке, является характеристикой.

На фиг. 4 представлен вид поля характеристик для случая $\gamma = 7/5$ и $n = 4/3$ (кривая 1 — фронт ударной волны, кривая 2 — ξ -линия, на которой $dz/dt = 0$, кривая 3 — характеристика, совпадающая с ξ -линией, кривая 4 — фронт разлета).

Как следует из этого поля характеристик, все возмущения, не являющиеся ударными волнами, возникающие слева от линии $\xi = -1/2$, не проникают в область справа от этой линии и не достигают фронта.



Фиг. 4



Фиг. 5

Поэтому по линии $\xi = -1/2$ слева может быть «приклеено» как решение, соответствующее движению с поршнем, так и решение, соответствующее короткому удару.

Заметим, что точка ветвления в зависимости от γ скользит вдоль кривой $f(x)$. Для несжимаемой жидкости ($\gamma = \infty$) она находится наиболее близко к фронту ($x \sim 0.3$), а для «изотермического» вещества ($\gamma = 1$) она исчезает.

Давление на фронте ударной волны не может падать быстрее, чем по короткому удару, даже если на поршне происходит более быстрое падение. Это следует из того, что кривые, изображающие решение при $n > n_1$ короткого удара, выходя из точки (1.1), располагаются ниже линии короткого удара и, не достигнув поршня ($x = 0$), поворачивают в сторону возрастающих x , как изображено на фиг. 5, кривая 1 — ветвь, соответствующая поршню, кривая 2 — ветвь, соответствующая короткому удару, кривая 3 и 4 — ветви, не имеющие физического смысла.

Пунктиром нанесена кривая, являющаяся продолжением в сторону возрастающих x решения, описывающего движение с поршнем при $n = n_1$. Некоторый физический смысл можно приписать ветвям этих решений от

точки (1.1) до точки поворота. Они соответствуют движению, которое возникает под действием короткого удара и которое сопровождается тем, что по газу вслед за ударной волной движется резервуар, способный поглощать газ. При этом скорость его движения такова, что сохраняется доля газа, поглощенная этим резервуаром, по отношению к количеству газа, охваченному ударной волной, и численно равная координате x точки поворота.

Разные скорости движения и разные доли газа соответствуют решениям с различным n . Такое движение осуществляется, например, в случае полубесконечной трубы. Если с открытого конца по газу, находящемуся в трубе, произвести короткий удар, то вдоль трубы по газу будет распространяться ударная волна, а из открытого конца будет вытекать вещество. При этом пространство вне трубы будет служить резервуаром, в котором как бы поглощается газ. В этом случае точка поворота имеет эйлерову координату $\xi = 0$, т. е. резервуар покоится и находится в точке, где зародилось движение.

В заключение авторы выражают благодарность И. В. Потугиной, В. Е. Трощиеву и Г. А. Гришиной за проделанные численные расчеты и М. А. Подурцу за участие в обсуждении работы. Авторы пользуются случаем поблагодарить за участие в дискуссии и за ряд существенных замечаний Я. Б. Зельдовича.

Поступила 23 XII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Крашенинникова Н. А. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, № 10, стр. 14, 1955.
2. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акустический журнал, т. 2, вып. 1, стр. 28—38, 1956.
3. Адамский В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе. Акустический журнал, т. 2, вып. 1, стр. 3—9, 1956.
4. Жуков А. И., Каждан Я. М. Движение газа под действием кратковременного импульса. Акустический журнал, т. 2, вып. 4, стр. 352—357, 1956.
5. Weizsäcker C. von. Genäherte Darstellung starker instationären Stosswellendurch Homologie-Lösungen. Z. f. Naturforschung, Bd. 9a, S. 269, 1954.
6. Hain K. and von Haerner S. Instationäre starke Stossfronten. Z. f. Naturforschung, Bd. 9a, S. 994, 1954.
7. Hoerner S. von Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit linearen Verlauf der Geschwindigkeit. Z. f. Naturforschung, Bd. 10a, 687, 1955.
8. Meyer F. Zur Darstellung starken Stossfronten durch Homologie-lösungen. Z. f. Naturforschung, Bd. 10a, S. 693, 1955.
9. Häfelle W. Zur analytische Behandlung ebener starker instationärer Stosswellen. Z. f. Naturforschung, Bd. 10a, S. 1006, 1954.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.