

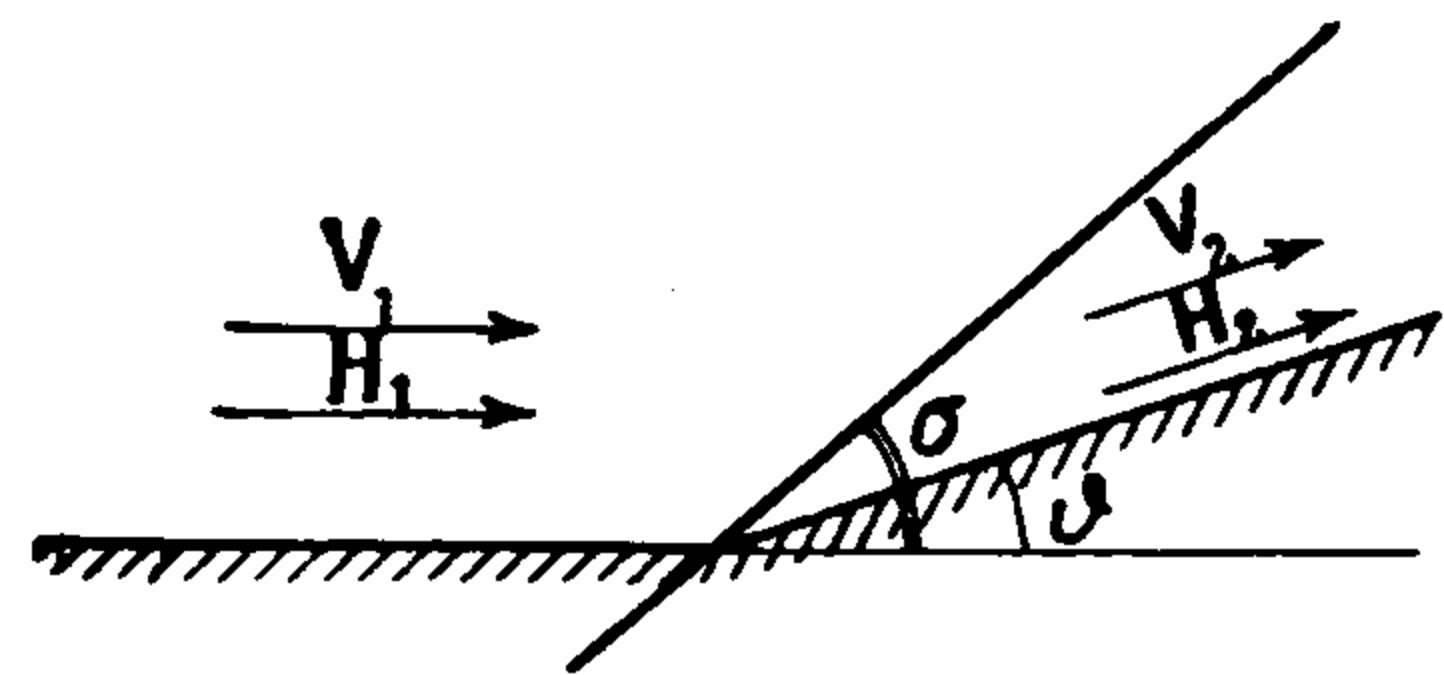
УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

М. Н. Коган

(Москва)

В работе исследован характер ударных волн при различных параметрах потока и магнитного поля.

§ 1. Постановка задачи. Рассматриваются ударные волны в идеальном газе с бесконечной электрической проводимостью. Пусть $V_{1,2}$, $H_{1,2}$, $p_{1,2}$, $\rho_{1,2}$ и $T_{1,2}$ — соответственно векторы скорости и поля, давление, плотность и температура до (индекс 1) и после (индекс 2) скачка уплотнения. Будем считать, что V_1 и H_1 параллельны. Это предположение не уменьшает общности, так как случай с произвольно направленными V_1 и H_1 всегда можно свести к рассматриваемому соответствующим выбором движущейся инерциальной системы координат [1]. Будем рассматривать течение в плоскости, проходящей через совпадающие векторы V_1 и H_1 и нормаль к поверхности ударной волны. Тогда векторы V_2 и H_2 также параллельны и лежат в той же плоскости и все течение является плоским (фиг. 1).



Фиг. 1

В работе [2] показано, что магнитогидродинамические течения определяются двумя безразмерными параметрами: числом Маха M и числом N , которое определяется отношением

$$N^2 = \frac{H^2 / 8\pi}{\frac{1}{2} \kappa p} = \frac{H^2 / 4\pi\rho}{\kappa p / \rho} = \frac{a_A^2}{a^2}$$

где a_A — альфвеновская и a — обычная скорость звука, κ — отношение удельных теплоемкостей.

В обозначениях, указанных выше и на фиг. 1, известные [1] соотношения в ударной волне можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{H_1} &= \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}, & \frac{V_2}{V_1} &= \frac{N^2 \sin \vartheta}{M^2 \sin(\sigma - \vartheta) \cos(\sigma - \vartheta)} + \frac{\cos \sigma}{\cos(\sigma - \vartheta)} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{V_1 \sin \sigma}{V_2 \sin(\sigma - \vartheta)}, & \frac{p_2}{p_1} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[1 - \frac{1}{2} (\kappa - 1) M^2 \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right) \right] \\ \frac{p_2}{p_1} &= 1 - \kappa M^2 \sin^2 \sigma \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \kappa N^2 \left[\frac{\sin^2 \sigma \cos^2(\sigma - \vartheta)}{\sin^2(\sigma - \vartheta)} - \cos^2 \sigma \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

В работах [1] и [3] показано, что в реальных ударных волнах (с возрастающей энтропией)

$$\frac{p_2}{p_1} > 1, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1, \quad \frac{V_2}{V_1} < 1$$

Задача настоящей] работы состоит выяснении характера изменения параметров потока за ударной волной в зависимости от параметров M и N до скачка и угла поворота ϑ векторов скорости и поля в волне. Ввиду сложности соотношений (1.1) аналитическому анализу поддаются лишь отдельные характерные точки ударных поляр и некоторые вырожденные режимы. Дополненный расчетом анализ поведения функций вблизи указанных характерных точек позволяет выявить общий характер ударных поляр.

§ 2. Слабые ударные волны. В работе [2] исследованы слабые ударные волны, в которых изменение всех параметров потока и поля пропорционально углу поворота вектора скорости. Такие ударные волны будем называть слабыми ударными волнами первого рода. Угол наклона ударных волн первого рода нулевой интенсивности определяется выражением [2]

$$\operatorname{tg} \sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{M^2 - N^2(1 - M^2)}{(M^2 - 1)(M^2 - N^2)}} \quad (2.1)$$

Как легко видеть из (2.1), эти волны существуют при $N < 1$ в диапазонах $M_a \leq M \leq N$ и $1 \leq M \leq \infty$ и при $N > 1$ в диапазонах $M_a \leq M \leq 1$ и $N \leq M \leq \infty$, где $M_a = N(1 + N^2)^{-1/2}$.

Угол отклонения ударной волны ненулевой интенсивности от σ_0 пропорционален углу отклонения потока ϑ :

$$\delta = \sigma - \sigma_0 = \frac{(3 + \kappa)(1 - M^2)N^2 + (\kappa + 1)(N^2 - M^2)}{4[M^2 - N^2(1 - M^2)](1 - M^2)} \vartheta \quad (2.2)$$

Давление за ударной волной равно

$$p_2 = p_1 + \rho V_0^2 \frac{M^2 - N^2}{M^4 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0} \vartheta \quad (2.3)$$

При $M < 1$ отклонение потока в слабой волне первого рода на положительные углы ϑ может иметь место только при $\sigma_0 \geq 90^\circ$ (в этом случае $\cos \sigma_0 < 0$ и $p_2 > p_1$). Согласно (2.2) при тех же условиях $\delta > 0$ и, следовательно, при увеличении ϑ ударная волна приближается к оси. При $N \rightarrow 0$ и $M > 1$ рассматриваемые волны переходят в слабые волны обычной газодинамики. В магнитной газодинамике имеется новый тип слабых ударных волн, которые мы будем называть волнами второго рода и которым нет аналога в обычной газодинамике. Эти волны имеют место при $M^2 = N^2 + \Delta$, $\sigma = 90^\circ + \tau$ и $\vartheta = 2\tau + \varepsilon$, где Δ и ε — малые, а $0 \leq \tau \leq 90^\circ$. В этом случае, пренебрегая квадратами малых величин из (1.1), имеем

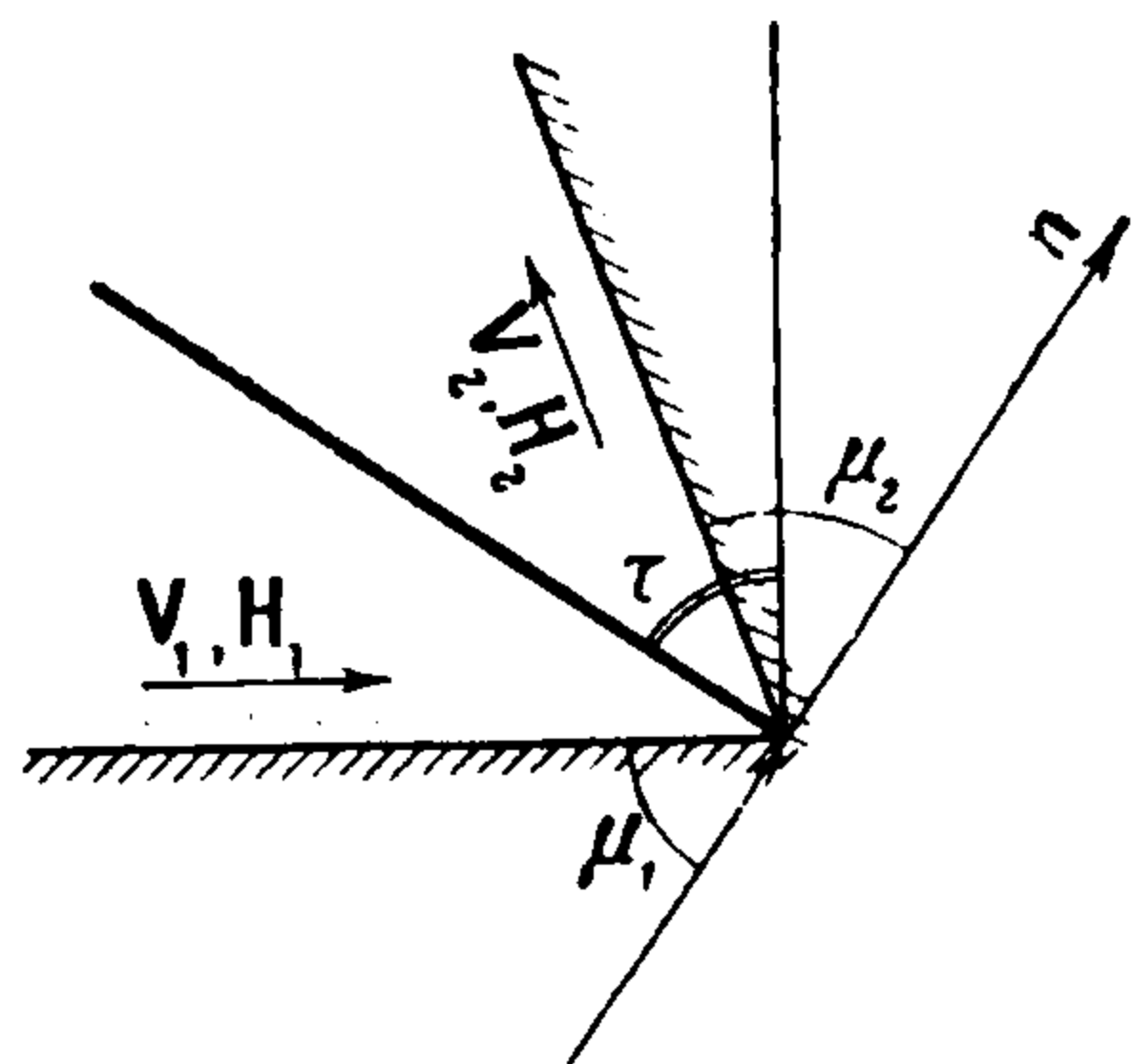
$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= 1 + \varepsilon \operatorname{tg} \tau - \frac{\Delta}{M^2}, & \frac{p_2}{p_1} &= \kappa M^2 \left(\cos^2 \tau \frac{\Delta}{M^2} - \varepsilon \operatorname{tg} \tau \right) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 + \frac{\Delta}{M^2}, & \varepsilon &= - \left[\frac{1 - M^2}{M^2} + \kappa \sin^2 \tau \right] \frac{\Delta}{M^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что должно быть $\Delta > 0$, т. е. второй тип ударных волн существует при $M > N$.

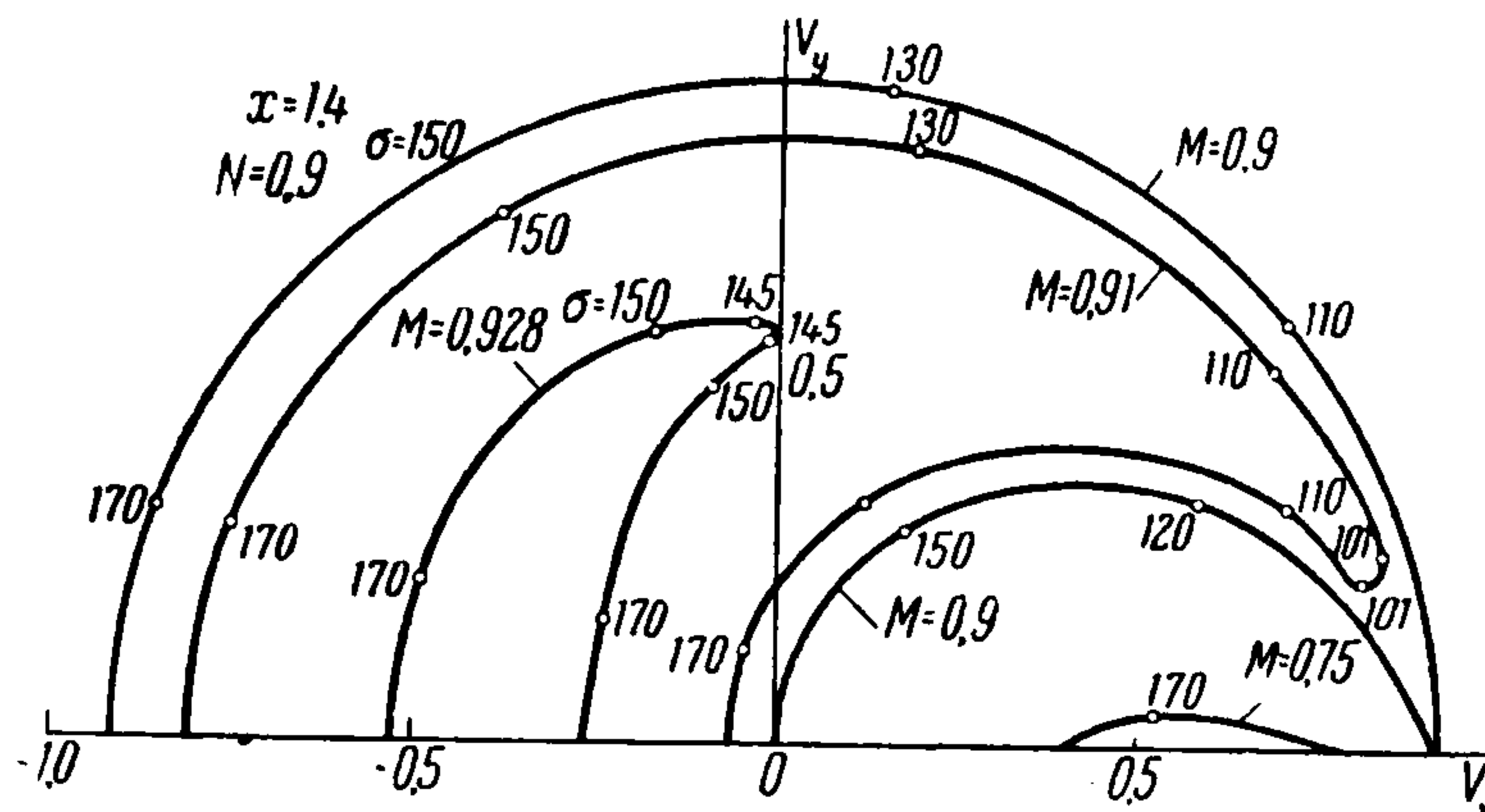
При $M = N$ поток поворачивается на любой угол до 180° без изменения параметров течения и поля¹. Этот тип волн имеет простое физиче-

¹ Эти волны называют вращательными разрывами [1].

ское толкование. Рассмотрим волну указанного типа (фиг. 2). Из геометрии течения ясно, что углы μ_1 и μ_2 , составляемые векторами скорости и поля с нормалью к волне, равны между собой и равны τ , т. е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \tau$. Так как $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $V_1 = V_2$ и $H_1 = H_2$, то сохранение



Фиг. 2

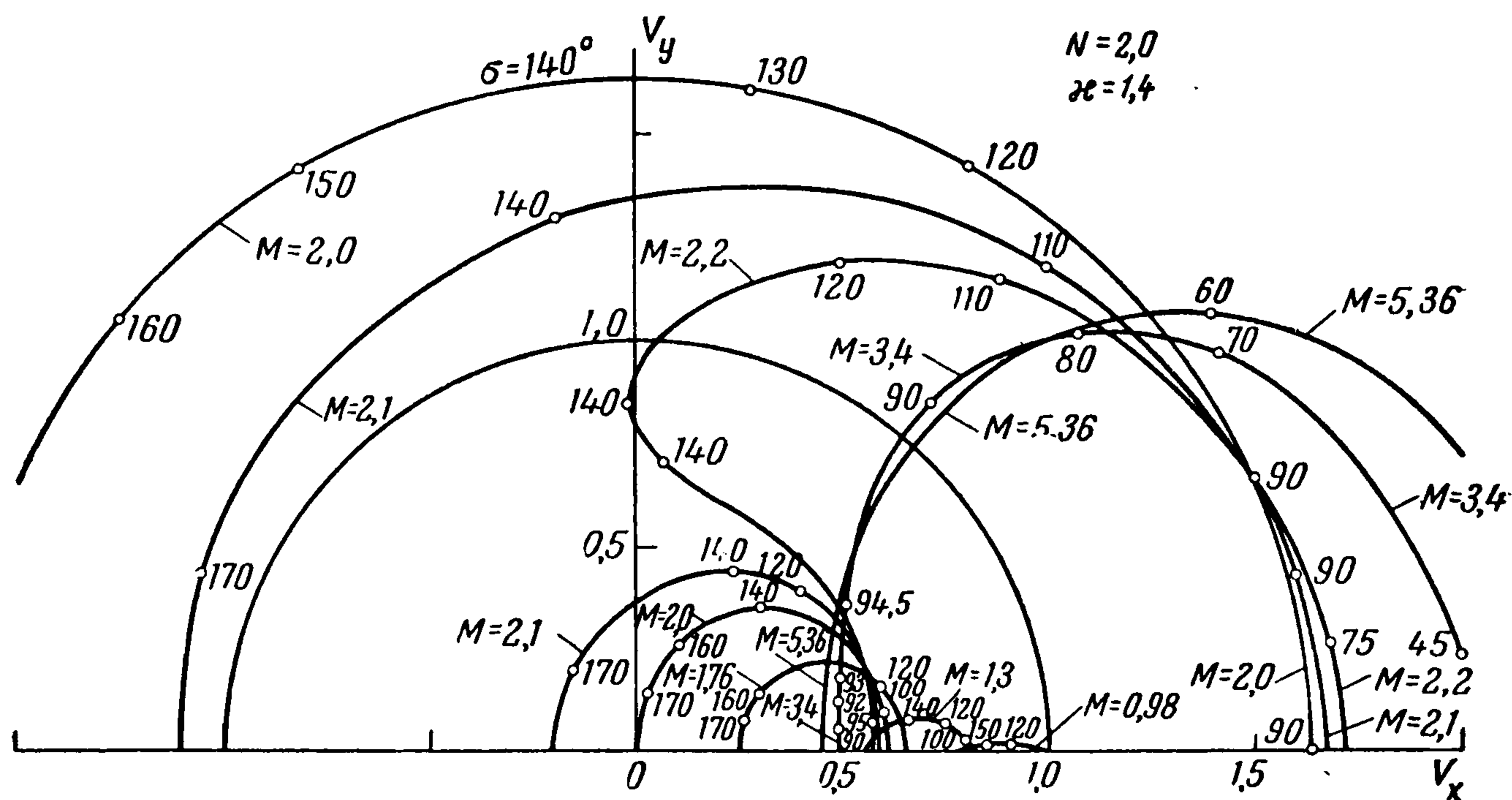


Фиг. 3

потока массы, нормального импульса и энергии очевидно. Изменение же тангенциального импульса обусловлено тем, что в отличие от обычных ударных волн в магнитогидродинамических волнах на газ действует конечная сила. Действительно, так как ток через некоторую площадку равен интегралу от поля по контуру этой площадки

$$4\pi I = c \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$$

и так как в скачке поле терпит разрыв, то в скачке протекает конечный ток. Поскольку этот ток течет в магнитном поле, то на него действует конечная сила, имеющая в общем случае как тангенциальную, так и



Фиг. 4

нормальную составляющие. Появлением указанной силы по существу и отличается ударная волна в бесконечно проводящем газе от обычной ударной волны, так как ни на сохранение массы, ни на сохранение энергии¹ наличие магнитного поля и бесконечной проводимости не влияет.

¹ Поток вектора Пойнтинга $\mathbf{s} = (4\pi)^{-1} c \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ через контрольную поверхность, проведенную по обеим сторонам поверхности скачка, равен нулю.

В рассматриваемом случае ток на единицу длины скачка равен $1/2 \pi^{-1} cH \sin \mu$. Этот ток течет в нормальном к скачку магнитном поле $H \cos \mu$, следовательно, действующая вдоль скачка сила равна $1/2 \pi^{-1} cH^2 \times \sin \mu \cos \mu$. Эта сила должна быть равна изменению тангенциального импульса

$$2\rho V^2 \sin \mu \cos \mu = 1/2 \pi^{-1} H^2 \sin \mu \cos \mu$$

Это равенство, очевидно, выполняется при $M = N$, что и предполагалось.

Отметим, что последний тип волн имеет место и в несжимаемой жидкости при $4\pi\rho_1 V_1^2 = H_1^2$. В плоскости годографа скорости (фиг. 3 и 4) поляра слабых ударных волн второго рода при $M = N$ изобразится, очевидно, окружностью.

§ 3. Прямая ударная волна ($\sigma = 1/2 \pi$). Если V_1 и H_1 перпендикулярны фронту скачка, то одним из возможных течений является течение с непрерывным полем. В этом случае в скачке нет тока и ударная волна тождественна с обычной. Однако в магнитной газодинамике возможно течение с поворотом векторов скорости и поля. В этом случае сила, действующая на возникающий в волне ток, поворачивает поток.

Принимая в (1.1) $\sigma = 1/2 \pi$, имеем

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N^2}{M^2} \frac{1}{\cos \vartheta}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \kappa (M^2 - N^2) - 1/2 \kappa N^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M^2}{N^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{(N^2 - M^2) [2 + (\kappa - 1) M^2 - (\kappa + 1) N^2]}{N^4}$$

Легко проверить, что такие ударные волны сжатия ($p_2/p_1 > 1$) существуют лишь при $N > 1$ и $N \leq M \leq M_b$, где

$$M_b^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left(N^2 - \frac{2}{\kappa + 1} \right)$$

Таким образом, в указанном интервале за прямым скачком возможны три режима течения ($\sigma > 0$, $\vartheta = 0$ и $\vartheta < 0$). Точка $M = M_b$ является также особой и для поведения ударной поляры вблизи $\sigma = 1/2 \pi$ и $\vartheta = 0$. Действительно, при $\sigma = 1/2 \pi - \delta$ и малом ϑ имеем

$$\delta = \frac{2 + (\kappa - 1) M^2 - (\kappa + 1) N^2}{2(M^2 - 1)} \vartheta$$

При $M > 1$ и $M < M_b$ числитель правой части отрицателен. Поэтому при увеличении ϑ увеличивается и σ (т. е. σ становится $> 1/2 \pi$). При $M > M_b$, наоборот, при увеличении ϑ угол наклона σ , как и вдоль ударной поляры обычной газодинамики вблизи прямого скачка, уменьшается.

§ 4. Ударные волны при $M = N$. В § 2 отмечалось, что при $N = M$ существуют слабые ударные волны второго рода, в которых поток и поле меняют свое направление на любой угол без изменения параметров потока. С другой стороны, в § 3 мы видим, что при $M > 1$ и любом N существует обычная прямая ударная волна. Эта волна, очевидно, не входит в класс слабых ударных волн второго рода и, следовательно, принадлежит к другой ветви ударной поляры. Оказывается, что при $M = N$ существует класс ударных волн, наклон которых σ составляет прямой

угол с направлением потока ϑ за скачком. Подставляя в (1.1) $\sigma = 1/2\pi + \vartheta$, получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1 \sin \sigma}{V_2} \left[1 - \frac{1}{2} (\kappa - 1) M^2 \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right) \right], \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \sin \sigma$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{1,2} = \frac{[2 + \kappa M^2 (1 + \sin^2 \sigma)] \pm \sqrt{R}}{2(\kappa + 1) M^2 \sin \sigma} \quad (4.1)$$

$$R = [2 + \kappa M^2 (1 + \sin^2 \sigma)]^2 - 4(\kappa + 1) M^2 \sin^2 \sigma [2 + (\kappa - 1) M^2]$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют верхнему и нижнему знакам.

При $\sigma = 1/2\pi + \delta$, где δ — малая величина и $M < 1$, имеем

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)_1 = \left[\frac{2 + (\kappa - 1) M^2}{(\kappa + 1) M^2} + O(\delta^2) \right] > 1, \quad \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_2 = 1 - \frac{\delta^2}{2(1 - M^2)} < 1$$

при $M > 1$

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)_1 = 1 + \frac{\delta^2}{2(M^2 - 1)} > 1, \quad \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_2 = \frac{2 + (\kappa - 1) M^2}{(\kappa + 1) M^2} \left[1 - \frac{\delta^2}{2(M^2 - 1)} \right] < 1$$

Таким образом, только второй корень соответствует реальной ударной волне. При $\delta \rightarrow 0$ и $M > 1$ имеем обычную прямую ударную волну, а при $M < 1$ слабую волну. Следовательно, при $M < 1$ и $M = N$ обе ветви ударной [поляры начинаются в одной точке, соответствующей слабой ударной волне с $\vartheta = 0$. При $\sigma = \pi - \delta$

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{1,2} = \frac{[2 + \kappa M^2 (1 + \delta^2)] \pm [2 + \kappa M^2 (1 + \delta^2)]}{(\kappa + 1) M^2 \delta} \mp \frac{2 + (\kappa - 1) M^2}{(2 + \kappa M^2)} \delta$$

здесь опять только второй корень соответствует реальной волне:

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)_2 = \frac{2 + (\kappa - 1) M^2}{2 + \kappa M^2} \delta < 1$$

Отметим, что модуль скорости за волной V_2 при $\sigma \rightarrow \pi$ стремится к нулю, а ϑ к $1/2\pi$.

Вид ветви сильных ударных волн при $M = N$ показан на фиг. 3 и 4. Отметим, что при увеличении угла наклона волны (при стремлении от $\sigma = 1/2\pi$ к $\sigma = \pi$) волна становится все более слабой, т. е. p_2/p_1 падает от значения $p_2/p_1 = (\kappa + 1)^{-1} [2\kappa M^2 - (\kappa - 1)]$, соответствующего обычному прямому скачку, до значения $p_2/p_1 = 1/2(2 + \kappa M^2)$. Однако энтропийные потери растут (т. е. отношение $p_2/\rho_2^\kappa/p_1/\rho_1^\kappa$ падает).

§ 5. Ударные волны при $\sigma \rightarrow \pi$. Очевидно, что при $\sigma \rightarrow \pi$ представляются две возможности¹: $\vartheta \rightarrow 0$ и $\vartheta \rightarrow \pi$. Пусть $\sigma = \pi - \delta$ и $\vartheta \sim 0$. Тогда

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{N^2}{M^2} \frac{\vartheta}{\delta + \vartheta} + 1, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\kappa}{2} N^2 \left[\frac{\delta^2}{(\delta + \vartheta)^2} - 1 \right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{\delta}{\delta + \vartheta}, \quad \delta = \frac{1}{2} (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}) A^{-1} \vartheta \quad (5.1)$$

где

$$A = M^2 - N^2(1 - M^2), \quad B = 1/2 \{M^2 N^2 - [4 + (\kappa + 1) N^2] (N^2 - M^2)\}$$

$$C = (1 + 1/2 \kappa N^2) (M - N^2)$$

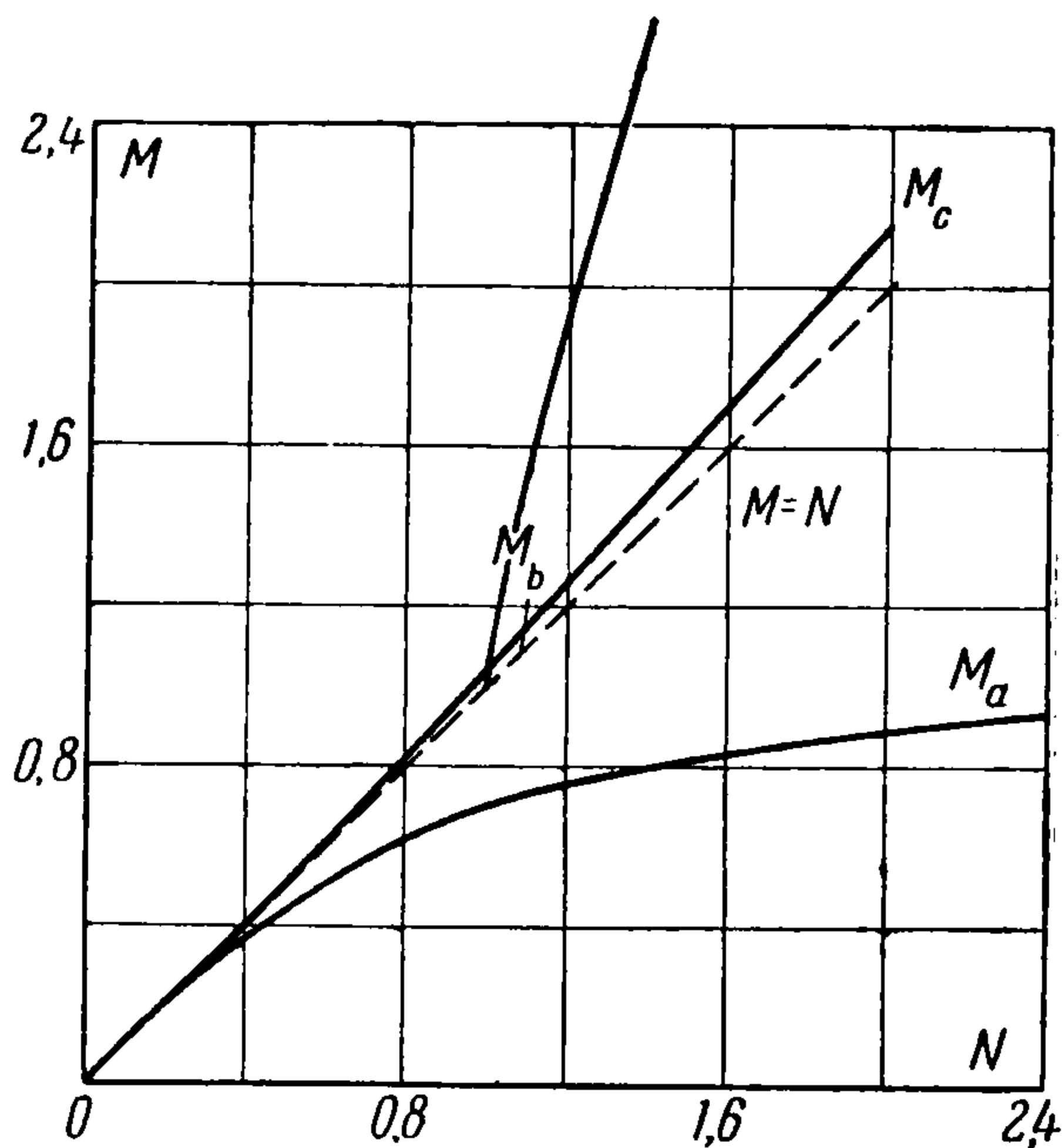
¹ Исключительным является случай $M = N$, когда $\vartheta \rightarrow 1/2\pi$ при $\sigma \rightarrow \pi$.

При $\sigma = \pi - \delta$ и $\vartheta = \pi - \theta$ имеем

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N^2 \mp \theta}{M^2 \theta - \delta} - 1, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\kappa}{2} N^2 \left[\frac{\delta^2}{(\theta - \delta)^2} - 1 \right] \quad (5.2)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{\delta}{\theta - \delta}, \quad \delta = \frac{1}{2} (B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}) A^{-1} \theta$$

Легко видеть, что среди ударных волн, определяемых соотноше-



Фиг. 5

ниями (5.1), реальными будут лишь те, для которых ϑ и δ положительны. Поэтому эти волны могут существовать при $M_a \leq M \leq N$. При этом имеет смысл лишь корень, соответствующий верхнему знаку. Аналогично волны, поворачивающие поток почти на 180° , определяемые соотношениями (5.2), могут существовать лишь при $N \leq M \leq M_c$, где M_c — то число Маха, при котором $B^2 - 4AC$ становится равным нулю. При $M > M_c$ корень в (5.1) и (5.2) становится мнимым. Значения M_c при разных N даны на фиг. 5, где нанесены также значения M_a , $M = N$

и M_b . Отметим, что M_c почти везде меньше M_b . Таким образом, при $N \leq M \leq M_c$ существуют две волны, поворачивающие поток на углы, близкие к π .

§ 6. Общий характер ударных поляр. Приведенный выше анализ позволяет выяснить общий характер поведения ударных поляр при различных значениях параметров потока и поля M и N . Удобно рассматривать отдельно случаи $N < 1$ и $N > 1$.

Случай $N < 1$ (фиг. 3). Здесь при $M < M_a$ ударных волн нет. При $M_a \leq M < N$ имеется одна ветвь ударной поляры, которой соответствуют ударные волны с углами наклона $\sigma \geq \sigma_0 \geq 1/2 \pi$. Давление за волной и энтропийные потери увеличиваются при движении вдоль поляры от $\sigma = \sigma_0$ к $\sigma = \pi$. При $\sigma = \sigma_0$ имеет место слабый разрыв первого рода. При $M = M_a$ вся поляра стягивается в точку. По мере увеличения M точка, соответствующая $\sigma = \pi$, двигается к началу координат, достигая последнего при $M = N$. При этом числе M появляются слабые ударные волны второго рода (§ 2), поляра которых изображается кругом. Обе ветви поляры начинаются в точке $V_1 = V_2$, $\vartheta = 0$ и $\sigma = \sigma_0 = 1/2 \pi$. При дальнейшем увеличении числа Маха точки обеих ветвей, соответствующие $\sigma = \pi$ и $\vartheta = \pi$, начинают сближаться, совпадая при $M = M_c$. Как отмечено в § 2, при $1 > M > N$ нет слабых ударных волн с $\vartheta \sim 0$. Точка слияния обеих ветвей ударных поляр отрывается от оси и по мере увеличения числа M переходит на все большие углы ϑ . При $M = M_c$ вся поляра стягивается в точку. При $M_c < M < 1$ ударных волн не существует. При $M \geq 1$ существует одна ветвь ударной волны, качественно подобная ударной поляре обычной газодинамики.

Случай $N > 1$ (фиг. 4). Здесь так же, как и в предыдущем случае, при $M < M_a$ ударных волн нет. При $M_a \leq M < 1$ имеется ветвь поляры,

соответствующая волнам с углами наклона $\pi \geq \sigma \geq \sigma_0 > 1/2 \pi$. При $M = 1$ угол наклона слабой волны первого рода σ_0 становится равным $1/2 \pi$. Здесь, собственно говоря, слабая ударная волна является в то же время и прямым скачком. При $M > 1$ ударные поляры начинаются с прямого скачка ($\vartheta = 0$, т. е. с прямого скачка обычной газодинамики) и заканчиваются при $\sigma = \pi$ ($\vartheta = 0$). При этом давление за скачком растет при перемещении вдоль поляры от $\sigma = 1/2 \pi$ к $\sigma = \pi$. В § 4 мы видим, что при $M = N$, наоборот, давление за волной падает при движении вдоль поляры от $\sigma = 1/2 \pi$ до $\sigma = \pi$. Можно показать, что при некотором числе $M = M_d$, где $1 < M_d < N$, давление за скачком вдоль всей поляры постоянно и равно давлению в обычном прямом скачке. При меньших числах Маха давление за скачком вдоль поляры растет (при возрастании σ от $1/2 \pi$ до π), при больших — падает. При $M = N$ появляются слабые ударные волны второго рода, поляра которых изображается окружностью. Начиная с $M = N$ и до $M = M_c$ (см. § 5), ветви ударной поляры нигде не пересекаются. При $M = M_c$ их точки, соответствующие $\sigma = \pi$, $\vartheta = \pi$, сливаются. При еще больших числах Маха точка слияния ветвей поляры переходит на меньшие углы ϑ (уменьшается предельный угол поворота потока в ударной волне). Поляра постепенно деформируется, переходя при $M \geq M_b$ в поляру, подобную поляре обычной газодинамики.

Отметим, что при $N \leq M \leq M_c$ за скачком вдоль ветви, начинающейся со слабой ударной волны ($\sigma = \sigma_0$), давление и энтропийные потери растут. Вдоль второй ветви при движении от прямого скачка к волнам с $\sigma = \pi$ давление падает, а энтропийные потери растут. Поэтому после соединения обеих ветвей в одну поляру (при $M > M_c$) давление за скачком непрерывно растет (при движении от $\sigma = \sigma_0$ к предельному углу поворота вектора скорости и далее к прямому скачку), а энтропийные потери имеют максимум в точке соединения поляр.

Наряду с полярой скоростей можно построить поляру для магнитного поля. Характерной особенностью этой поляры является то, что угол, образуемый осью x (вдоль которой направлен вектор H_1) и линией, проходящей через концы векторов H_1 и H_2 , равен углу наклона волны σ .

Таким образом, анализ поведения ударных поляр магнитогидродинамических ударных [волн позволил выявить ряд интересных их свойств, которым нет аналога в обычной газодинамике. Наличие этих свойств открывает новые возможности практических применений.

Поступила 7 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. Н. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
2. К о г а н М. Н. Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
3. П о л о в и н Р. В. и Л ю б а р с к и й Г. Я. Невозможность ударных волн разрежения в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, т. 35, № 2 (8), 1958.