Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

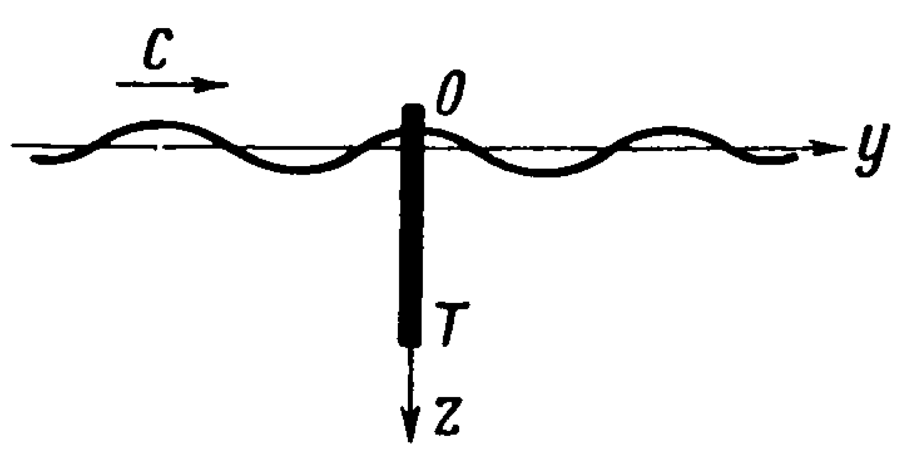
ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ВЕРТИКАЛЬНО ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНОЙ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

Рассматривается простейшая плоская задача гидродинамики судов на волнении о колебаниях вертикально плавающей пластины в взволнованной тяжелой жидкости неограниченной глубины. Решение этой задачи представляется в замкнутой форме и достигается тем же методом, что и в чисто дифракционном случае [1]. В результате определяются точные значения обобщенных коэффициентов демпфирования и присоединенных масс, содержащие цилиндрические функции, и устанавливаются формулы для средних значений гидродинамических сил за период колебаний в квадратичном приближении.

§ 1. Построение решения. Рассмотрим тяжелую несжимаемую жидкость неограниченной глубины, покрытую регулярной системой бегущих волн, определяемых при помощи потенциала скоростей



Фиг. 1

$$\Phi_0(y,\ z,\ t) = -jcr_0 \exp\left[j\sigma t - \nu(z + jy)\right]$$

где $j = \sqrt{-1}$, σ — частота колебаний, $2r_0$— высота волн, $\nu = \sigma^2 / g$ — волновое число, g —ускорение силы тяжести, $c = g/\sigma$ — фазовая скорость. И здесь и в дальнейшем в комплексных выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $\exp j\sigma t$, следует рассматривать только действительную часть.

Пусть теперь вертикально плавающая пластина (фиг. 1) совершает малые гармонические колебания частоты σ в взволнованной жидкости с горизонтальной и угловой скоростью колебаний, соответственно равными $V = v \exp j\sigma t$ и $\Omega = \omega \exp j\sigma t$. Пусть далее $\Phi = (\varphi + \varphi_0) \exp j\sigma t$ — потенциал скоростей всего волнового движения тяжелой жидкости, где $\varphi_0 = -jcr_0 \times \exp[-\nu(z + jy)]$, тогда для определения гармонической функции $\varphi(y,\ z)$ имеем граничные условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \nu\varphi = 0 \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v + \omega z + \sigma r_0 e^{-\nu z} z \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } 0 \leqslant z \leqslant T \tag{1.2}$$

К этим условиям присоединяется условие излучения расходящихся по обе стороны от пластины волн

$$\varphi(y,\ z) = jB_\pm e^{-\nu(z \pm jy)} \qquad \text{при } y \to \pm\infty \tag{1.3}$$

а также требование об ограниченности производных функций φ в области, занятой жидкостью, и стремление их к нулю при $z \to \infty$, где $B_\pm$ — комплексные по j постоянные, подлежащие определению. Отметим еще, что функцию φ можно также представить в расчлененной форме:

$$\varphi = v\varphi_2 + \omega\varphi_4 + \varphi_7, \qquad \varphi_m = jB_m^{\pm} e^{-\nu(z \pm jy)} \quad \text{при } y \to \pm\infty$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial\varphi_7}{\partial y} = \sigma r_0 e^{-\nu z} \quad \text{при } y = 0 \text{ и } 0 \leqslant z \leqslant T \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial z} + \nu\varphi_m = 0 \qquad \text{при } z = 0 \ (m = 2,\ 4,\ 7)$$

где φ_2 и φ_4 — функции излучения, характеризующие простейшие волновые движения, образующиеся при колебаниях пластины с единичными амплитудами скоростей, φ_7 — функция рассеяния, дающая решение дифракционной задачи, а $B_m^{\pm}$ $(m = 2,\ 4,\ 7)$ — асимптотические характеристики функций излучения и рассеяния, определяющие комплексные амплитуды излучаемых и рассеянных волн.

Введем в рассмотрение функцию $w = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $x = z + iy$, где мнимая единица $i = \sqrt{-1}$ не взаимодействует с мнимой единицей j. При помощи этой функции условие (1.1) принимает вид:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dx} + \nu w\right) = 0 \qquad \text{при } x = iy \tag{1.5}$$

на основании которого функцию $dw/dx + \nu w$ продолжаем в верхнюю полуплоскость и в результате получаем, что указанная функция голоморфна и однозначна вне отрезка $(-T,\ T)$ оси z, причем в симметричных относительно оси y точках $\operatorname{Re}(dw/dx + \nu w)$ принимает одинаковые по величине значения, но противоположные по знаку, а $\operatorname{Im}(dw/dx + \nu w)$ в этих точках имеет одинаковые значения. Кроме того, так как $\partial\varphi/\partial y$ и ψ изменяются непрерывно при переходе через отрезок $(0,\ T)$ оси z, то и $\operatorname{Im}(dw/dx + \nu w)$ изменяется непрерывно при этом же переходе. Поэтому

$$\int_{C_0} \left(\frac{dw}{dx} + \nu w\right) dx = 0 \tag{1.6}$$

где C_0 — контур, охватывающий отрезок $(-T, T)$. Учитывая равенство (1.6), убеждаемся, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место следующее разложение:

$$\frac{dw}{dx} + \nu w = \frac{ic_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots \tag{1.7}$$

где $c_1,\ c_2, \ldots$ — действительные относительно i постоянные.

Рассмотрим теперь другую функцию $f(x) = r + is$, связанную с $w(x)$ дифференциальным соотношением

$$f = \frac{dw}{dx} + \nu w \tag{1.8}$$

Из (1.8) имеем

$$-s = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \nu\psi$$

и так как на отрезке $(0,\ T)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = v + \omega z + \sigma r_0 e^{-\nu z}$$

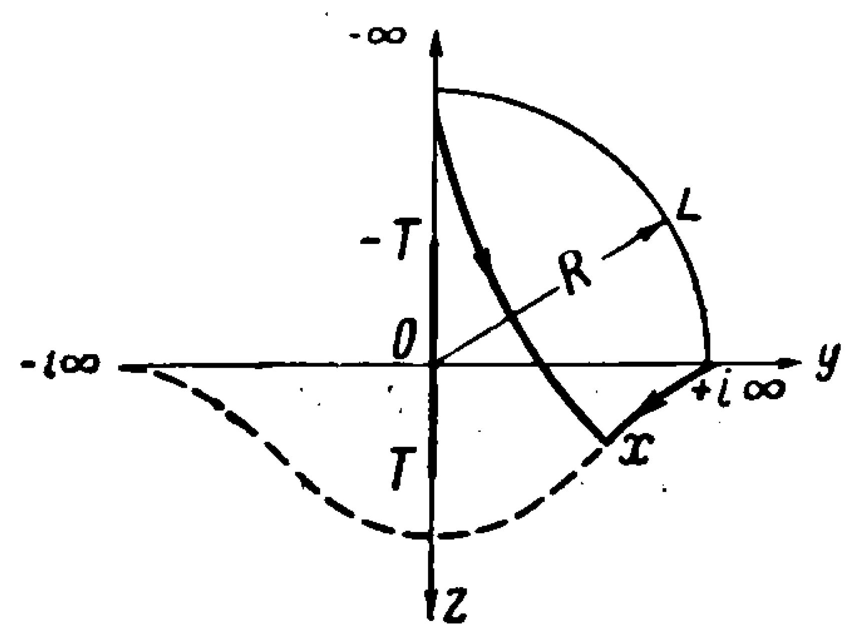
$$\psi = \psi_1 - v(z - T) - \frac{\omega}{2}(z^2 - T^2) + \frac{\sigma r_0}{\nu}(e^{-\nu z} - e^{-\nu T})$$

где ψ_1 — значение ψ в точке $z = T$, то для s на отрезке $(0,\ T)$ получим условие

$$-s = A + Bz + Cz^2 \tag{1.9}$$

$$A = \sigma r_0 e^{-\nu T} - \nu\psi_1 + v(1 - \nu T) - \tfrac{1}{2}\nu T^2\omega, \qquad B = \omega + \nu v, \qquad C = \tfrac{1}{2}\nu\omega \tag{1.10}$$

Согласно аналитическому продолжению по условию (1.5) значения s на отрезке $(0,\ -T)$ следует взять равными соответствующим значениям s на отрезке $(0,\ T)$. Функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям (1.6) и (1.9), определяется в виде [2]



Фиг. 2

$$f(x) = -\frac{1}{\pi i\sqrt{x^2 - T^2}}\int_{-T}^{T}\frac{s\sqrt{T^2 - z^2}}{z - x}\,dz$$

Учитывая вид функции s на отрезке $(-T,\ T)$ и проведя вычисления, найдем

$$f(x) = iA\frac{x - \sqrt{x^2 - T^2}}{\sqrt{x^2 - T^2}} + i\frac{2BT}{\pi}\frac{x}{\sqrt{x^2 - T^2}}\left(1 - \frac{1}{T}\sqrt{x^2 - T^2}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{T}{\sqrt{x^2 - T^2}}\right) +$$
$$+ iC\left(\frac{x^3 - {}^1\!/_2 T^2 x}{\sqrt{x^2 - T^2}} - x^2\right) \tag{1.11}$$

На основании дифференциального соотношения (1.8) получаем

$$w(x) = e^{-\nu x}\left(A_1 + iA_2 + \int_{-\infty}^{x} f(x)\,e^{\nu x}\,dx\right) \tag{1.12}$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования; контур интегрирования $(-\infty,\ x)$ представлен на фиг. 2. Легко видеть, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_L f(x)\,e^{\nu x}\,dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{x} f(x)\,e^{\nu x}\,dx = \int_{i\infty}^{x} f(x)\,e^{\nu x}\,dx$$

где L — четверть окружности радиуса R (фиг. 2). Воспользовавшись последним из этих равенств, находим следующие асимптотические соотношения:

$$w(x) = (A_1 + iA_2)\,e^{-\nu x} \quad \text{при } x \to i\infty, \qquad w(x) = (B_1 + iB_2)\,e^{-\nu x} \quad \text{при } x \to -i\infty$$

где B_1 и B_2 определяются при помощи выражения

$$B_1 + iB_2 = A_1 + iA_2 + \int_{i\infty}^{-i\infty} f(x)\,e^{\nu x}\,dx$$

Заменяя в этой формуле контур интегрирования контуром C_0, охватывающим отрезок $(-T,\ T)$, и стягивая затем контур C_0 к этому отрезку, будем иметь

$$B_1 + iB_2 = A_1 + iA_2 + 2\int_{-T}^{T} r_+ e^{\nu z}\,dz \tag{1.13}$$

где r_+ — значение функции r при подходе к отрезку $(-T,\ T)$ со стороны $y > 0$.

Для того чтобы удовлетворить условие (1.3) об излучении расходящихся волн, следует положить

$$A_1 = jA_2 = jB_+, \qquad B_1 = -jB_2 = jB_- \tag{1.14}$$

Поэтому, заменив в (1.13) i на j и затем на $-j$, получаем

$$jB_\pm = \mp\int_{-T}^{T} r_+ e^{\nu z}\,dz \tag{1.15}$$

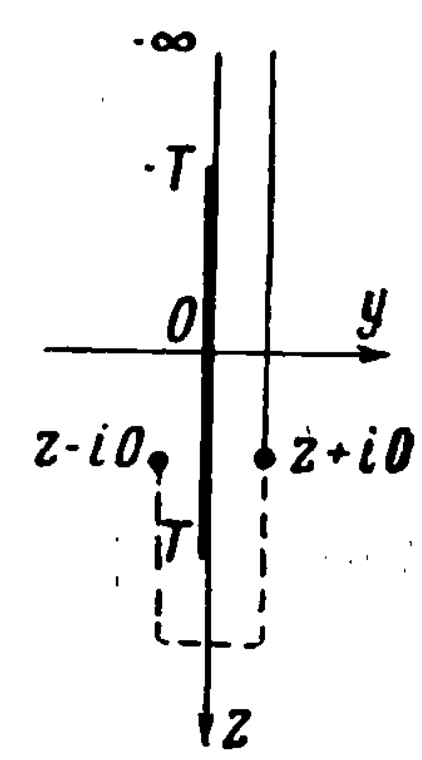
Из соотношения (1.11) имеем

$$r_+ = A\frac{z}{\sqrt{T^2 - z^2}} + \frac{2BT}{\pi}\left(\frac{z}{\sqrt{T^2 - z^2}} - \frac{z}{2T}\ln\frac{T + \sqrt{T^2 - z^2}}{T - \sqrt{T^2 - z^2}}\right) + C\frac{z^3 - \frac{1}{2}T^2 z}{\sqrt{T^2 - z^2}} \tag{1.16}$$

Подставив это выражение в (1.15) и воспользовавшись интегральным предоставлением функций Бесселя от мнимого аргумента, найдем

$$jB_\pm = \mp\left[AT\pi I_1(\mu) + \frac{2BT^2}{\pi}b_2 + CT^3 b_4\right] \qquad (\mu = \nu T) \tag{1.17}$$

$$b_2 = \pi\left[I_1(\mu) + \frac{1}{\mu^2}I_0^{-1}(\mu) - \frac{1}{\mu}I_0(\mu)\right]$$
$$b_4 = \pi\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\mu^2}\right)I_1(\mu) - \frac{1}{\mu}I_0(\mu)\right] \tag{1.18}$$



Фиг. 3

Здесь $I_n(\mu)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента:

$$I_n(\mu) = \frac{\mu^n}{\sqrt{\pi}\,(2n-1)!!}\int_{-1}^{1}(1 - u^2)^{n - 1/2} e^{\mu u}\,du$$

$$I_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sh}\mu u\,du}{u\sqrt{1 - u^2}} = \int_0^{\mu} I_0(\mu)\,d\mu \tag{1.19}$$

В выражении для A входит неизвестная постоянная ψ_1. Для ее определения положим $x = z$ в (1.12) и примем во внимание соотношения (1.14) и (1.15), тогда получим

$$\varphi + i\psi = e^{-\nu z}\left[\pm\int_T^z r_+ e^{\nu z}\,dz + iB_+ + i\int_{-T}^{T} s e^{\nu z}\,dz + i\int_T^z s e^{\nu z}\,dz + \int_{-\infty}^{-T} f e^{\nu x}\,dx\right] \tag{1.20}$$

где знак плюс соответствует подходу к отрезку $(0,\ T)$ со стороны $y > 0$, а знак минус — со стороны $y < 0$ (фиг. 3). Положив в (1.20) $z = T$ и отделяя мнимую часть, будем иметь

$$e^{\mu}\psi_1 = B_+ + \int_{-T}^{T} s e^{\nu z}\,dz + \eta, \qquad \eta = -i\int_{-\infty}^{-T} f(x)\,e^{\nu x}\,dx \tag{1.21}$$

где η — действительная постоянная. Учитывая, что при $z < -T$ имеет место равенство $(z^2 - T^2)^{1/2} = -(|z^2 - T^2|)^{1/2}$, и воспользовавшись интегральным представлением модифицированных функций Ганкеля

$$K_n(\mu) = \frac{\mu^n}{(2n-1)!!}\int_1^\infty e^{-\mu u}(u^2-1)^{n-\frac{1}{2}}du$$

для величины η находим

$$\eta = AT\left(K_1(\mu) - \frac{e^{-\mu}}{\mu}\right) + \frac{2BT^2}{\pi}\left[K_1(\mu) - \frac{\pi}{2\mu^2}(1+\mu)e^{-\mu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu}K_0(\mu) - \frac{1}{\mu^2}K_0^{-1}(\mu)\right] +$$
$$+ CT^3\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\mu^2}\right)K_1(\mu) + \frac{1}{\mu}K_0(\mu) - \frac{e^{-\mu}}{\mu^3}(\mu^2 + 2\mu + 2)\right] \tag{1.22}$$
$$\left(K_0^{-1}(\mu) = \int_0^\mu K_0(\mu)\,d\mu\right)$$

Таким образом, на основании (1.9), (1.10), (1.17), (1.21) и (1.22) для постоянной ϕ_1 получаем выражение

$$\phi_1 = \frac{A_0T}{\mu}\left(1 - \frac{e^\mu}{a}\right) + \frac{2BT^2}{\pi}\frac{b_1 + jb_2}{a} + CT^3\frac{b_3 + jb_4}{a} \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered} a = a_1 + ja_2 = \mu\left[K_1(\mu) + \pi j I_1(\mu)\right], \\ A_0 = \sigma r_0 e^{-\mu} + v(1-\mu) - \frac{1}{2}\mu T\omega \end{gathered} \tag{1.24}$$

$$b_1 = K_1(\mu) + \frac{1}{\mu}K_0(\mu) - \frac{1}{\mu^2}K_0^{-1}(\mu) - \frac{\pi}{2\mu^2}(1 + (\mu - 1)e^\mu) \tag{1.25}$$

$$b_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\mu^2}\right)K_1(\mu) + \frac{1}{\mu}K_0(\mu) - \frac{e^\mu}{\mu^3}(\mu^2 - 2\mu + 2) \tag{1.26}$$

Соотношения (1.10) и (1.23) полностью определяют постоянную A, для которой имеем

$$A = \frac{1}{a}\left[A_0e^\mu - \frac{2B\mu T}{\pi}(b_1 + jb_2) - C\mu T^2(b_3 + jb_4)\right] \tag{1.27}$$

Подставив теперь значения постоянных A, B и C из (1.10) и (1.24)—(1.27) в (1.17) и приняв во внимание тождество

$$I_0(\mu)K_1(\mu) + K_0(\mu)I_1(\mu) = \frac{1}{\mu} \tag{1.28}$$

находим окончательные формулы для асимптотических характеристик $B_m^\pm$ функций излучения и рассеяния:

$$\begin{gathered} B_2^\pm = \pm\frac{2TS_1}{\pi I_1(\mu) - jK_1(\mu)}, \quad B_4^\pm = \pm\frac{2T^2(S_1 - {}^1/_4\,\pi)}{\mu\left[\pi I_1(\mu) - jK_1(\mu)\right]} \\ B_7^\pm = \pm\frac{\pi\sigma r_0 T I_1(\mu)}{\mu\left[\pi I_1(\mu) - jK_1(\mu)\right]} \end{gathered} \tag{1.29}$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2\mu}\left[I_1(\mu) + L_1(\mu)\right], \qquad L_1(\mu) = \frac{2}{\pi}\left[I_0^{-1}(\mu)K_1(\mu) + K_0^{-1}(\mu)I_1(\mu) - 1\right] \tag{1.30}$$

Покажем, что $L_1(\mu)$ представляет собой функцию Струве первого порядка от мнимого аргумента. Действительно, из (1.30) легко установить, что

$$\frac{d^2L_1}{d\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{dL_1}{d\mu}-\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)L_1=\frac{2}{\pi}, \qquad L_1(0)=0, \qquad \left(\frac{dL_1}{d\mu}\right)_{\mu=0}=0$$

Этому же уравнению при указанных начальных условиях удовлетворяет функция Струве, имеющая следующее интегральное представление [3]:

$$L_1(\mu)=\frac{2}{\pi}\mu\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,\operatorname{sh}\mu u\,du \tag{1.31}$$

Поэтому выражение для S_1 можно также представить в форме

$$S_1=\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,e^{\mu u}\,du \tag{1.32}$$

Установим еще одно соотношение для функции Струве $L_0(\mu)$ нулевого порядка, определяемой при помощи выражения [3]

$$L_0(\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\operatorname{sh}\mu u\,du}{\sqrt{1-u^2}} \tag{1.33}$$

Из (1.33) и (1.31) имеем

$$L_0(\mu)=\frac{2}{\pi}\mu+\int_0^{\mu}L_1(\mu)\,d\mu$$

Подставляя сюда выражение (1.30) и интегрируя по частям, найдем

$$L_0(\mu)=-\frac{2}{\pi}\left[I_0^{-1}(\mu)\,K_0(\mu)-K_0^{-1}(\mu)\,I_0(\mu)\right] \tag{1.34}$$

§ 2. Линейные выражения для гидродинамических сил. Проведем вычисление суммарных гидродинамических сил, действующих на пластину на основании полученного решения данной задачи линейной теории волн. Обозначим через Y равнодействующую гидродинамических сил, а через M момент гидродинамических сил относительно начала координат; тогда имеем формулы

$$Y=\int_0^T(p_- - p_+)\,dz, \qquad M=\int_0^T z\,(p_- - p_+)\,dz \tag{2.1}$$

где p_- — давление на пластину со стороны $y<0$, а p_+ — давление со стороны $y>0$. Давление в жидкости определяется при помощи следующего линеаризованного выражения:

$$p-p_0=-\rho j\sigma(\varphi+\varphi_0)e^{j\sigma t}+\rho g z$$

где p_0 — атмосферное давление и ρ — плотность жидкости. Пользуясь этим выражением и соотношением (1.20), найдем

$$p_- - p_+=\rho j\sigma(\varphi_+ - \varphi_-)\,e^{j\sigma t}=2\rho j\sigma e^{j\sigma t-\nu z}\int_T^z r_+e^{\nu z}\,dz \tag{2.2}$$

Подставив далее (2.2) в (2.1) и интегрируя по частям, получим

$$Y=-\frac{2}{\nu}\rho j\sigma e^{j\sigma t}\int_0^T r_+(e^{\nu z}-1)\,dz \quad M=-\frac{2}{\nu}\rho j\sigma e^{j\sigma t}\int_0^T r_+\left(\frac{e^{\nu z}-1}{\nu}-z\right)dz \tag{2.3}$$

Из соотношений (1.16) и (2.3) находим окончательные выражения:

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{2T}{\nu}\rho j\sigma e^{j\sigma t}\left(\mu A S_1 + \frac{2}{\pi}BTY_B + CT^2 Y_C\right) \\ M &= -\frac{2T^2}{\nu}\rho j\sigma e^{j\sigma t}\left(A\left(S_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi}BTM_B + CT^2 M_C\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь через Y_B, Y_C, M_B и M_C обозначены следующие величины:

$$Y_B = \mu S_1 - \frac{1}{\mu}S_0 + \frac{1}{\mu^2}S_0^{-1} + \frac{1}{2}, \qquad Y_C = \left(\frac{1}{2}\mu + \frac{2}{\mu}\right)S_1 - \frac{1}{\mu}S_0 + \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} M_B &= S_1 - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\mu^2}S_0 + \frac{1}{\mu^3}S_0^{-1} + \frac{1}{2\mu} \\ M_C &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\mu^2}\right)S_1 - \frac{1}{\mu^2}S_0 + \frac{1}{3\mu} - \frac{\pi}{16} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$S_0 = \int_0^1 \frac{e^{\mu u}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}\left(I_0(\mu) + L_0(\mu)\right), \qquad S_0^{-1} = \int_0^1 \frac{e^{\mu u}-1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_0^\mu S_0(\mu)\,d\mu$$

Воспользовавшись теперь значениями постоянных A, B и C, определяемых из (1.10), (1.18) и (1.24) — (1.27), можем выражения (2.4) представить в расчлененной форме:

$$Y = Y_g + Y_u, \qquad M = M_g + M_u \tag{2.6}$$

где Y_g и M_g — возмущающая сила и ее момент, обусловленные дифракцией бегущих волн вокруг пластины:

$$Y_g = -2\rho g r_0 T\frac{S_1}{\pi I_1(\mu) - jK_1(\mu)}e^{j\sigma t}, \qquad M_g = -2\rho g r_0 T^2\frac{S_1 - 1/4\pi}{\mu\left[\pi I_1(\mu) - jK_1(\mu)\right]}e^{j\sigma t} \tag{2.7}$$

а Y_u и M_u — гидродинамическая сила и ее момент, обусловленные излучением волн в тяжелой жидкости при горизонтальных и вращательных колебаниях пластины:

$$\begin{aligned} Y_u &= -\mu_{22}\frac{dV}{dt} - \lambda_{22}V - \mu_{24}\frac{d\Omega}{dt} - \lambda_{24}\Omega \\ M_u &= -\mu_{42}\frac{dV}{dt} - \lambda_{42}V - \mu_{44}\frac{d\Omega}{dt} - \lambda_{44}\Omega \end{aligned} \qquad (V = ve^{j\sigma t},\ \Omega = \omega e^{j\sigma t}) \tag{2.8}$$

Здесь λ_{nm} и μ_{nm} — обобщенные коэффициенты демпфирования и присоединенных масс, зависящие от безразмерного частотного параметра $\mu = \sigma^2 T / g$. Для этих коэффициентов имеем выражения

$$\mu_{22} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{22} = 2\rho T^2\left[\frac{S_1}{a}\left((1-\mu)e^\mu - \frac{2\mu^2}{\pi}(b_1 + jb_2)\right) + \frac{2}{\pi}Y_B\right] \tag{2.9}$$

$$\mu_{24} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{24} = 2\rho T^3\left[\frac{2}{\pi\mu}Y_B + \frac{1}{2}Y_C - \frac{\mu S_1}{a}\left(\frac{1}{2}e^\mu + \frac{2}{\pi}(b_1 + jb_2) + \frac{\mu}{2}(b_3 + jb_4)\right)\right] \tag{2.10}$$

$$\mu_{12} - \frac{j}{\sigma}\lambda_{42} = 2\rho T^3\left[\frac{2}{\pi}M_B + \frac{S_1 - 1/4\pi}{\mu a}\left((1-\mu)e^\mu - \frac{2\mu^2}{\pi}(b_1 + jb_2)\right)\right] \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \mu_{44} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{44} = 2\rho T^4\Bigg[&\frac{2}{\pi\mu}M_B + \frac{1}{2}M_C - \frac{S_1 - 1/4\pi}{a}\Bigg(\frac{1}{2}e^\mu + \\ &+ \frac{2}{\pi}(b_1 + jb_2) + \frac{\mu}{2}(b_3 + jb_4)\Bigg)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Учитывая соотношения (1.28) и (1.30), получаем окончательные формулы:

$$\lambda_{22} = 4\rho\sigma T^2 \frac{S_1^2}{\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu)}, \quad \lambda_{44} = 4\rho\sigma T^4 \frac{(S_1 - {}^1/_4\pi)^2}{\mu^2(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))} \tag{2.13}$$

$$\lambda_{24} = \lambda_{42} = 4\rho\sigma T^3 \frac{S_1(S_1 - {}^1/_4\pi)}{\mu(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))} \tag{2.14}$$

$$\mu_{22} = \frac{4\rho T^2}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}S_0 + \frac{1}{\mu^2}S_0^{-1} - \frac{S_1\Gamma}{\mu(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))}\right] \tag{2.15}$$

$$\mu_{24} = \frac{4\rho T^3}{\pi}\left[\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{\mu^2}S_0 + \frac{1}{\mu^3}S_0^{-1} - \frac{S_1\Gamma - ({}^1/_4\pi)\Gamma_0'}{\mu^2(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))}\right] \tag{2.16}$$

$$\mu_{42} = \frac{4\rho T^3}{\pi}\left[\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{\mu^2}S_0 + \frac{1}{\mu^3}S_0^{-1} - \frac{(S_1 - {}^1/_4\pi)\Gamma}{\mu^2(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))}\right] \tag{2.17}$$

$$\mu_{44} = \frac{4\rho T^4}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\pi}{12\mu} - \frac{\pi^2}{64} - \left(\frac{1}{\mu^3} + \frac{\pi}{4\mu^2}\right)S_0 + \frac{1}{\mu^4}S_0^{-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{(S_1 - {}^1/_4\pi)(\mu^{-1}\Gamma - ({}^1/_4\pi)\mu\gamma_2)}{\mu^2(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))}\right] \tag{2.18}$$

Здесь через Γ, Γ_0 и γ_2 обозначены величины

$$\Gamma = \gamma_1 - \mu\gamma_2 - \frac{1}{2}\pi K_1(\mu), \qquad \gamma_1 = \pi^2 I_0^{-1}(\mu) I_1(\mu) - K_0^{-1}(\mu) K_1(\mu) \tag{2.19}$$

$$\gamma_2 = \pi^2 I_0(\mu) I_1(\mu) - K_0(\mu) K_1(\mu), \qquad \Gamma_0 = \mu^2 S_1\gamma_2 - \mu S_0(\pi^2 I_1^2(\mu) + K_1^2(\mu))$$

Выражения (2.16) и (2.17) отличаются между собой по внешнему виду. В действительности же на основании (1.28), (1.30), (1.34) и последней из формул (2.5) нетрудно показать, что $\Gamma_0 = \Gamma$. Таким образом, непосредственные вычисления в этой частной задаче соответствуют общей закономерности о симметричности тензоров обобщенных коэффициентов демпфирования и присоединенных масс [4].

Согласно общей теории обобщенные коэффициенты демпфирования выражаются через асимптотические характеристики $B_m^{\pm}$ функций излучения в следующей форме [5]:

$$\lambda_{nm} = \frac{1}{2}\rho\sigma \operatorname{Re}(B_n^+\overline{B}_m^+ + B_n^-\overline{B}_n^-) \tag{2.20}$$

которая получена на основании энергетических соображений, и черта над буквой означает переход к комплексно сопряженному значению относительно мнимой единицы j. Подставив выражение для $B_m^{\pm}$ из (1.29) в (2.20), получаем соотношения, тождественные с (2.13) и (2.14).

Наконец, известно, что возмущающие силы и моменты полностью определяются через функции излучения для произвольно заданной системы дифрагирующих волн и в случае бегущих волн эти силы и моменты выражаются только через асимптотические характеристики функций излучения [6]. Для волн, бегущих в направлении оси y и когда ось z направлена вертикально вниз, имеем формулы

$$Y_g = \rho g r_0 B_2^- e^{j\sigma t}, \qquad M_g = \rho g r_0 B_4^- e^{j\sigma t} \tag{2.21}$$

которые на основании (1.29) совпадают с (2.7).

Таким образом, полученные здесь результаты полностью соответствуют основным трем закономерностям общей теории гидродинамики судов на волнении. Установление этого соответствия в рассматриваемой задаче тесно связано с полученными новыми соотношениями (1.30) и (1.34) для функций Струве $L_0(\mu)$ и $L_1(\mu)$. Отметим еще, что из общей теории следует [4,5], что $\mu_{nn}(0) > \mu_{nn}(\infty)$. В частности, из формулы (2.15) имеем,

$$\mu_{22} = \frac{\pi}{2}\rho T^2, \quad \mu_{22}(\infty) = \frac{2}{\pi}\rho T^2, \qquad \text{или} \qquad \mu_{22}(0)/\mu_{22}(\infty) = \frac{\pi^2}{4}$$

§ 3. Средние значения гидродинамических сил в квадратичном приближении. В работе [7] показано, что решение задачи, основанное на линейной теории волн, может быть использовано для вычисления средних значений нелинейных характеристик в квадратичном приближении за период колебаний, в том числе средних значений гидродинамических сил и моментов. Давление в этом случае следует определять при помощи полного выражения

$$p - p_0 = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho|\nabla\Phi|^2 + \rho g z \tag{3.1}$$

а в формулах (2.1) следует нижний предел интегрирования рассматривать от возмущенного уровня жидкости, т. е.

$$Y = \int_{\zeta_-}^{T} p_- dz - \int_{\zeta_+}^{T} p_+ dz, \qquad M = \int_{\zeta_-}^{T} z p_- dz - \int_{\zeta_+}^{T} z p_+ dz$$

где $\zeta_\pm$ — возвышение возмущенного уровня жидкости при подходе к пластине соответственно со стороны $y > 0$ и $y < 0$. В выражении для M нижний предел интегрирования можно положить равным нулю, так как соответствующие интегралы в пределах от нуля до $\zeta_\pm$ дают члены третьего порядка малости, поэтому, сохраняя только члены второго порядка малости, имеем

$$Y = Y_1 + Y_2 \tag{3.2}$$

$$Y_1 = \int_0^T (p_- - p_+)\, dz, \quad Y_2 = \int_0^{\zeta_+} p_+ dz_- - \int_0^{\zeta_-} p_- dz, \quad M = \int_0^T z(p_- - p_+)\, dz$$

При дальнейшем вычислении средних значений за период колебаний $\tau = 2\pi/\sigma$ воспользуемся правилом

$$(uv)^* = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(u\bar{v}) \qquad \left(a^* = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} a(t)\, dt\right) \tag{3.3}$$

где u и v зависят от времени через экспоненциально-временной множитель $\exp j\sigma t$. Пользуясь этим правилом и выражением (3.1), получаем

$$Y_1^* = \frac{1}{4}\rho\int_0^T (\nabla\Phi_+ \cdot \nabla\bar{\Phi}_+ - \nabla\Phi_- \nabla\bar{\Phi}_-)\, dz$$

$$M^* = \frac{1}{4}\rho\int_0^T z(\nabla\Phi_+ \cdot \nabla\bar{\Phi}_+ - \nabla\Phi_- \cdot \nabla\bar{\Phi}_-)\, dz$$

Потенциал скоростей $\Phi(y, z, t)$ состоит из суммы потенциала скоростей набегающих волн $\Phi_0 = -jcr_0 \exp[j\sigma t - \nu(z + jy)]$ и потенциала скоростей возмущенного движения жидкости $\varphi(y, z)\exp j\sigma t$, причем значения функций φ и $\partial\varphi/\partial z$ с обеих сторон отрезка $(0, T)$ одинаковы по величине, но противоположны по знаку, а значения $\partial\varphi/\partial y$ одинаковы.

Пользуясь этим, находим

$$Y_1^* = \rho\sigma r_0 \operatorname{Im} \int_0^T \frac{\partial \varphi_+}{\partial z} e^{-\nu z}\, dz, \qquad M^* = \rho\sigma r_0 \operatorname{Im} \int_0^T z \frac{\partial \varphi_+}{\partial z} e^{-\nu z}\, dz \tag{3.4}$$

Для вычисления Y_2 достаточно давление в жидкости определять при помощи линеаризированного выражения

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g z \qquad \left(\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=0}, \qquad \Phi = (\varphi + \varphi_0)\, e^{j\sigma t}\right)$$

и в пределах интегрирования величины Y_2 можно $\varphi(0, z)$ и $\varphi_0(0, z)$ заменять значениями их в точке $z = 0$. Принимая это во внимание, получим

$$Y_2^* = \rho\sigma r_0 \operatorname{Im} \varphi_+(0, 0)$$

Таким образом, для средней боковой силы имеем

$$Y^* = \rho\sigma\nu r_0 \operatorname{Im} \int_0^T \varphi_+ e^{-\nu z} dz$$

Подставив сюда значение φ_+ из (1.20) и учитывая (1.15), окончательно найдем простое выражение

$$Y^* = \frac{1}{2} \rho\sigma r_0 \operatorname{Re} B_+ \tag{3.5}$$

Это выражение можно получить и иным путем, исходя из общей формулы для средних гидродинамических сил, действующих на судно, установленной в работе [7] при помощи теоремы об изменении количества движения. Эта формула применительно к плоской задаче имеет вид:

$$Y^* = \frac{1}{2} \rho \left\{ \Bigg|_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] dz - \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2_{z=0} \right\}^*$$

Так как при $y \to \pm\infty$ $\Phi(y, z, t) = \Phi(y, 0, t) \exp(-\nu z)$, то предыдущая формула значительно упрощается:

$$Y^* = -\frac{\rho}{8\nu} \Bigg|_{y=-\infty}^{y=\infty} \left[\nu^2 |\varphi + \varphi_0|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right|^2\right]_{z=0}$$

На основании асимптотического соотношения (1.3) для функции $\varphi(y, 0)$ находим следующее общее выражение:

$$Y^* = \frac{1}{2} \rho\sigma r_0 \operatorname{Re} B_+ + \frac{1}{4} \rho\nu \left(|B_-|^2 - |B_+|^2\right) \tag{3.6}$$

В рассматриваемой задаче, как это видно из (1.15), $B_- = -B_+$, поэтому из (3.6) получаем (3.5).

Для вычисления M^* по формуле (3.4) вначале используем равенство $\partial\varphi / \partial z = -\nu\varphi + r$, затем подставляем значение φ_+ из (1.20) в (3.4) и интегрируем по частям и после этого получаем

$$M^* = -\frac{1}{4\nu} \rho\sigma r_0 \operatorname{Re} B_+ + \frac{1}{2} \rho\sigma r_0 \operatorname{Im} \int_0^T z r_+ e^{-\nu z}\, dz \tag{3.7}$$

Второй интеграл в (3.7) при помощи (1.16) можно представить так:

$$\int_0^T z r_+ e^{-\nu z} dz = A T^2 I_A + \frac{2}{\pi} B T^3 I_B + C T^4 I_C \tag{3.8}$$

где через I_A, I_B и I_C обозначены следующие величины:

$$I_A = S_0(-\mu) - S_1(-\mu), \quad I_B = \frac{1}{\mu} + \left(1 + \frac{2}{\mu^2}\right) S_0(-\mu) - 2S_1(-\mu) + \frac{2}{\mu^3} S_0^{-1}(-\mu)$$

$$I_C = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\mu^2}\right) S_0(-\mu) - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\mu^2}\right) S_1(-\mu)$$

$$S_0(-\mu) = \int_0^1 \frac{e^{-\mu u}\, du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}\left[I_0(\mu) - L_0(\mu)\right] \tag{3.9}$$

$$S_1(-\mu) = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, e^{-\mu u}\, du = \frac{\pi}{2\mu}\left[I_1(\mu) - L_1(\mu)\right]$$

$$S_0^{-1}(-\mu) = \int_0^1 \frac{e^{-\mu u} - 1}{u\sqrt{1-u^2}}\, du = -\int_0^{\mu} S_0(-\mu)\, d\mu$$

Из формул (1.8) и (1.11) следует, что в точке $x = T$ скорость частиц жидкости обращается, вообще говоря, в бесконечность и вблизи этой точки функция скоростей имеет вид:

$$\frac{dw}{dx} e^{j\sigma t} = i \sqrt{\frac{T}{2(x-T)}}\left(A + \frac{2}{\pi} BT + \frac{1}{2} CT^2\right) e^{j\sigma t} + F(x)\, e^{j\sigma t}$$

где функция $F(x)$ остается конечной при $x = T$.

Наличие бесконечной скорости или в действительности очень большой скорости указывает на то, что вблизи точки $x = T$ имеет место разрежение давления, вследствие чего жидкость воздействует сконцентрированной, тянущей вниз силой. Величина этой силы определяется формулой [2]

$$Z = -\rho\pi \left[(x - T)\left(\frac{dw}{dx} e^{j\sigma t}\right)^2\right]_{x=T}$$

На основании этой формулы и правила (3.3) получаем следующее выражение для среднего значения тянущей силы:

$$Z^* = \frac{\pi}{4} \rho T \left| A + \frac{2}{\pi} BT + \frac{1}{2} CT^2 \right|^2 \tag{3.10}$$

Приведенные здесь выражения позволяют произвести конкретные вычисления средних значений гидродинамических сил, а также вычислить среднее значение возвышения уровня свободной поверхности в квадратичном приближении на основании общих формул работы [7] (см. также [6]). Подробные расчеты основных характеристик волн и гидродинамических сил в чисто дифракционном случае содержатся в статье [1].

Поступила 25 XII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Давление волн на заграждение. Инженерный сборник АН СССР, т. IV, вып. 2, 1948.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд-во иностр. лит., 1949.
4. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля на волнении. ПММ, т. X, вып. 1, 1946.
5. Хаскинд М. Д. Приближенные методы определения гидродинамических характеристик качки. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 11, 1954.
6. Хаскинд М. Д. Возмущающие силы и заливаемость судов на волнении. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 7, 1957.
7. Хаскинд М. Д. Методы гидродинамики в проблемах мореходности корабля на волнении. Тр. ЦАГИ, № 603, 1947.