Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Г. В. Мухина, С. Л. Соболев
(Москва)

Решаются системы уравнений

$$\Delta\Phi_1 + a_{11}\Phi_1 + a_{12}m_1 = 0, \qquad \Delta m_1 + \nu\Phi_1 + a_{22}m_1 = 0 \tag{1}$$

$$\Delta\Phi_2 + b_{11}\Phi_2 + b_{12}m_2 = 0, \qquad \Delta m_2 + b_{22}m_2 = 0 \tag{2}$$

$$\Delta\Phi_3 + c_{11}\Phi_3 + c_{12}m_3 = 0, \qquad \Delta m_3 + c_{22}m_3 = 0 \tag{3}$$

для цилиндрической области, изображенной на фигуре. Здесь Φ_i, m_i обозначают решения в i-зоне, a_{ik}, b_{ik} — заданные коэффициенты, а ν — собственное значение краевой задачи.

Условия на границах зон задаются в следующем виде:

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial z} = \frac{\partial m_i}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \quad z = \pm H \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} = \frac{\partial m_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R \tag{5}$$

$$\begin{matrix} \Phi_1 = \Phi_2, & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r} = \delta_2 \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r} \\ m_1 = \delta_1 m_2, & \dfrac{\partial m_1}{\partial r} = \delta_1\delta_2 \dfrac{\partial m_2}{\partial r} \end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{на границе зон } 1\text{-}2 \\ (r = r_0, \ -h < z < h)\end{matrix} \tag{6}$$

$$\begin{matrix} \Phi_1 = \Phi_3, & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial z} \\ m_1 = m_3, & \dfrac{\partial m_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial m_3}{\partial z} \end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{на границе зон } 1\text{-}3 \\ (z = \pm h, \ 0 < r < r_0)\end{matrix} \tag{7}$$

$$\begin{matrix} \Phi_2 = \Phi_3, & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r} = \gamma_2 \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial r} \\ m_2 = \dfrac{1}{\delta_1} m_3, & \dfrac{\partial m_2}{\partial r} = \gamma_2\gamma_1 \dfrac{\partial m_3}{\partial r} \quad \left(\gamma_1 = \dfrac{1}{\delta_1}\right) \end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{на границе зон } 2\text{-}3 \\ (r = r_0, \ h < |z| < H)\end{matrix} \tag{8}$$

Нас интересует наименьшее возможное ν.

Очевидно, такое решение не зависит от угла; кроме того, в силу симметрии достаточно ограничиться рассмотрением области *Д*.

Вводя новые функции Ψ_i, n_i так, что

$$\Psi_i = A_{11}{}^i\Phi_i + A_{12}{}^i m_i, \qquad n_i = A_{21}{}^i\Phi_i + A_{22}{}^i m_i$$

и выбирая соответствующим образом коэффициенты $A_{lk}{}^i$, приведем системы (1), (2), (3) соответственно к виду

$$\Delta\Psi_1 - \varkappa_1{}^2\Psi_1 = 0, \qquad \Delta n_1 - \sigma_1{}^2 n_1 = 0 \tag{1'}$$

$$\Delta\Psi_2 - \varkappa_2{}^2\Psi_2 = 0, \qquad \Delta n_2 - \sigma_2{}^2 n_2 = 0 \tag{2'}$$

$$\Delta\Psi_3 - \varkappa_3{}^2\Psi_3 = 0, \qquad \Delta n_3 - \sigma_3{}^2 n_3 = 0 \tag{3'}$$

Условия (4), (5) сохраняются и для новых функций. Что касается соотношений (6) — (8), то они примут вид:

$$\Psi_1 = \mu_{11}\Psi_2 + \mu_{12}n_2, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \delta_2\left(\mu_{11}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \mu_{12}\frac{\partial n_2}{\partial r}\right)$$
$$n_1 = \mu_{21}\Psi_2 + \mu_{22}n_2, \qquad \frac{\partial n_1}{\partial r} = \delta_2\left(\mu_{21}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \mu_{22}\frac{\partial n_2}{\partial r}\right) \tag{6'}$$
$$\Psi_1 = \alpha_{11}\Psi_3 + \alpha_{12}n_3, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \beta_{11}\frac{\partial \Psi_3}{\partial z} + \beta_{12}\frac{\partial n_3}{\partial z}$$
$$n_1 = \alpha_{21}\Psi_3 + \alpha_{22}n_3, \qquad \frac{\partial n_1}{\partial z} = \beta_{21}\frac{\partial \Psi_3}{\partial z} + \beta_{22}\frac{\partial n_3}{\partial z} \tag{7'}$$
$$\Psi_2 = \Psi_3 + \varepsilon_1 n_3, \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = \gamma_2\left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial r} + \varepsilon_1\frac{\partial n_3}{\partial r}\right)$$
$$n_2 = n_3, \qquad \frac{\partial n_2}{\partial r} = \gamma_2\frac{\partial n_3}{\partial r} \tag{8'}$$

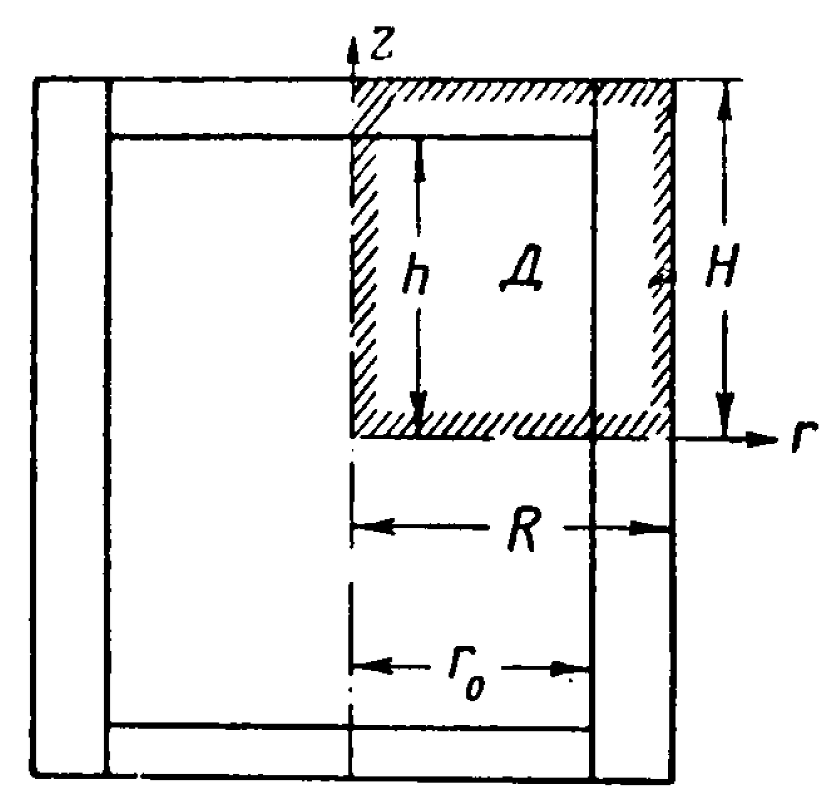
где α_{ik}, β_{ik}, μ_{ik} выражаются через δ_i, γ_i, ε_i и коэффициенты уравнений. Не выписывая эти соотношения, отметим только, что $\beta_{ik} = \varepsilon_2\alpha_{ik}$.

Очевидно, частными решениями уравнений (2′), удовлетворяющими всем условиям, кроме условий при $r = r_0$, будут функции

$$\Psi_2^{(n)} = C_2^{(n)}\left[I_0\left(\sqrt{\varkappa_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,r\right)K_1\left(\sqrt{\varkappa_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,R\right) + \right.$$
$$\left. + I_1\left(\sqrt{\varkappa_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,R\right)K_0\left(\sqrt{\varkappa_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,r\right)\right]\cos\frac{\pi n}{H}z$$

$$n_2^{(n)} = C_3^{n)}\left[I_0\left(\sqrt{\sigma_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,r\right)K_1\left(\sqrt{\sigma_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,R\right) + \right.$$
$$\left. + I_1\left(\sqrt{\sigma_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,R\right)K_0\left(\sqrt{\sigma_2^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}\,r\right)\right]\cos\frac{\pi n}{H}z, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Поставим задачу: в зонах *1—3* построить систему собственных функций $Z(z)$, используя условия при $z = 0$, $z = H$, $z = h$. Будем рассматривать $Z(z)$ как вектор с компонентами Y и U, причем введем обозначения



$$Y = \begin{cases} y_1 & (0 \leqslant z < h), \\ y_3 & (h < z \leqslant H), \end{cases} \qquad U = \begin{cases} u_1 & (0 \leqslant z < h) \\ u_3 & (h < z \leqslant H) \end{cases}$$

Очевидно, эти функции разрывны при $z = h$ и удовлетворяют условиям

$$Z|_{h-0} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} Z|_{h+0}, \qquad Z'|_{h-0} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} Z'|_{h+0} \tag{9}$$

а также условиям

$$Z' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = H \tag{10}$$

В принятых обозначениях частные решения уравнений (1′) и (3′), удовлетворяющие условиям при $z = 0$, $z = H$ и $z = h$, запишем в виде

$$\Psi_1^{(k)} = C_1^{(k)} I_0(\mu_k r)\, y_1^{(k)}(z), \qquad n_1^{(k)} = C_1^{(k)} I_0(\mu_k r)\, u_1^{(k)}(z)$$
$$\Psi_3^{(k)} = C_1^{(k)} I_0(\mu_k r)\, y_3^{(k)}(z), \qquad n_3^{(k)} = C_1^{(k)} I_0(\mu_k r)\, u_3^{(k)}(z) \tag{11}$$

где μ_k — корни характеристического уравнения $\Delta(\mu) = 0$, полученного из условия (7′), если вместо $y_i^{(k)}$, $u_i^{(k)}$ подставить их явные выражения через $\cos\sqrt{\mu_k^2 - \varkappa_1^2}\,z$, $\cos\sqrt{\mu_k^2 - \sigma_1^2}\,z$, $\cos\sqrt{\mu_k^2 - \varkappa_3^2}\,(H - z)$, $\cos\sqrt{\mu_k^2 - \sigma_3^2}\,(H - z)$

Если функции $Z(z)$ действительно удовлетворяют требованиям, предъявляемым к собственным функциям, то мы сможем построить общее решение как в зоне *2*, так и в зонах *1—3*. Наконец, применение условий при $r = r_0$ позволит определить собственное значение краевой задачи и (с точностью до постоянной) неизвестные коэффициенты $C_1^{(k)}$, $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$.

Остановимся подробнее на функциях $Z(z)$. Введем оператор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Область определения Λ есть множество векторных функций Φ аргумента z с непрерывными производными до второго порядка и удовлетворяющих условиям (9) и (10). Здесь и в дальнейшем непрерывность производных Φ требуется всюду в области, кроме точки $z = h$. L и M определяются из соотношений (12)

$$LY = \begin{cases} Y'' - \varkappa_1^2 Y & (0 < z < h), \\ B(Y'' - \varkappa_3^2 Y) & (h < z < H), \end{cases} \qquad MU = \begin{cases} A(U'' - \sigma_1^2 U) & (0 < z < h) \\ C(U'' - \sigma_3^2 U) & (h < z < H) \end{cases}$$

A, B, C — пока неопределенные коэффициенты, Y, U — компоненты векторной функции. Если в качестве Y, U взять компоненты собственной функции $Z(z)$, то, очевидно,

$$LY = \begin{cases} -\mu^2 Y & (0 < z < h), \\ -B\mu^2 Y & (h < z < H), \end{cases} \qquad MU = \begin{cases} -A\mu^2 U & (0 < z < h) \\ -C\mu^2 U & (h < z < H) \end{cases} \tag{13}$$

Постоянные A, B, C мы выберем таким образом, чтобы оператор Λ оказался самосопряженным, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$(\Phi_1, \Lambda\Phi_2) = (\Lambda\Phi_1, \Phi_2) \tag{14}$$

Покажем, как можно это осуществить. Рассмотрим выражение

$$Q = \int_0^H [\Phi_1 \Lambda \Phi_2 - \Phi_2 \Lambda \Phi_1]\, dz \tag{15}$$

Компоненты Φ_i обозначим по-прежнему через Y^i и U^i, причем

$$Y^i = \begin{cases} y_1^i & (0 \leqslant z < h), \\ y_3^i & (h < z \leqslant H), \end{cases} \qquad U^i = \begin{cases} u_1^i & (0 \leqslant z < h) \\ u_3^i & (h < z \leqslant H) \end{cases}$$

Преобразуем выражение (15):

$$Q = \int_0^H [Y^{(1)} LY^{(2)} - Y^{(2)} LY^{(1)}]\, dz + \int_0^H [U^{(1)} MU^{(2)} - U^{(2)} MU^{(1)}]\, dz =$$

$$= (y_1^{(1)} y_1'^{(2)} - y_1'^{(1)} y_1^{(2)}) \Big|_0^h + B (y_3^{(1)} y_3'^{(2)} - y_3'^{(1)} y_3^{(2)}) \Big|_h^H +$$

$$+ A (u_1^{(1)} u_1'^{(2)} - u_1^{(2)} u_1'^{(1)}) \Big|_0^h + C (u_3^{(1)} u_3'^{(2)} - u_3^{(2)} u_3'^{(1)}) \Big|_h^H$$

Используя условия при $z = 0$, $z = H$, $z = h$, получим

$$Q = (\alpha_{11} y_3^{(1)} + \alpha_{12} u_3^{(1)})_{z=h}\, y_1'^{(2)}|_{z=h} - y_1^{(2)}|_{z=h} (\beta_{11} y_3'^{(1)} + \beta_{12} u_3'^{(1)})_{z=h} -$$
$$- B y_3^{(1)}|_{z=h} y_3'^{(2)}|_{z=h} + \beta\, y'^{(2)}_3|_{z=h} y_3^{(1)}|_{z=h} + A u_1'^{(2)}|_{z=h} (\alpha_{21} y_3^{(1)} + \alpha_{22} u_3^{(1)})_{z=h} -$$
$$- A u_1^{(2)} (\beta_{21} y_3'^{(1)} + \beta_{22} u_3'^{(1)})|_{z=h} - C u_3^{(1)}|_{z=h} u_3'^{(2)}|_{z=h} + C u_3^{(2)}|_{z=h} u_3'^{(1)}|_{z=h}$$

Попытаемся найти такие значения A, B, C, при которых Q обратится в нуль. Для этого должны выполняться условия при $z = h$

$$\alpha_{11}y_1'^{(2)} - By_3'^{(2)} + A\alpha_{21}u_1'^{(2)} = 0, \qquad -\beta_{11}y_1^{(2)} + By_3^{(2)} - A\beta_{21}u_1^{(2)} = 0 \quad (16)$$

$$\alpha_{12}y_1'^{(2)} + A\alpha_{22}u_1'^{(2)} - Cu_3'^{(2)} = 0, \qquad -\beta_{21}y_1^{(2)} - A\beta_{22}u_1^{(2)} + Cu_3^{(2)} = 0$$

или

$$y_1^{(2)} = \frac{\beta_{22}B}{\Delta\beta}y_3^{(2)} - \frac{\beta_{21}C}{\Delta\beta}u_3^{(2)} \qquad u_1^{(2)} = -\frac{\beta_{21}B}{\Delta\beta A}y_3^{(2)} + \frac{\beta_{11}C}{A\Delta\beta}u_3^{(2)} \quad (17)$$

$$y_1'^{(2)} = \frac{\alpha_{22}B}{\Delta\alpha}y_3'^{(2)} - \frac{C\alpha_{21}}{\Delta\alpha}u_3'^{(2)} \qquad u_1'^{(2)} = -\frac{\alpha_{21}B}{A\Delta\alpha}y_3'^{(2)} + \frac{\alpha_{11}C}{A\Delta\alpha}u_3'^{(2)}$$

где

$$\Delta\alpha = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}, \qquad \Delta\beta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}$$

Так как функции $Y^{(2)}$, $U^{(2)}$ удовлетворяют тем же условиям, что и $Y^{(1)}$, $U^{(1)}$, то получаем следующие соотношения между A, B, C:

$$\frac{\alpha_{22}B}{\Delta\alpha} = \beta_{11}, \qquad -\frac{C\alpha_{21}}{\Delta\alpha} = \beta_{12}, \qquad -\frac{\alpha_{12}B}{A\Delta\alpha} = \beta_{21}, \qquad \frac{\alpha_{11}C}{A\Delta\alpha} = \beta_{22} \quad (18)$$

$$\frac{\beta_{22}B}{\Delta\beta} = \alpha_{11}, \qquad \frac{-\beta_{21}C}{\Delta\beta} = \alpha_{12}, \qquad \frac{-\beta_{12}B}{\Delta\beta A} = \alpha_{21}, \qquad \frac{\beta_{11}C}{\Delta\beta A} = \alpha_{22} \quad (19)$$

Условия (19) являются следствиями (18), так как

$$\beta_{ik} = \varepsilon_2\alpha_{ik}$$

Из трех первых соотношений (18) найдем неизвестные A, B, C, получим

$$B = \frac{\beta_{11}}{\alpha_{22}}\Delta\alpha, \qquad C = -\frac{\beta_{12}}{\alpha_{21}}\Delta\alpha, \qquad A = -\frac{\alpha_{12}}{\beta_{21}}\frac{\beta_{11}}{\alpha_{22}} \quad (20)$$

Подставляя найденные A, B, C в последнее из соотношений (18), убеждаемся, что оно выполняется автоматически, так как

$$\beta_{ik} = \varepsilon_2\alpha_{ik}$$

Таким образом, для A, B, C, рассчитанных по формулам (20), выражение (15) обращается в нуль.

Если в качестве функций Φ_1 и Φ_2 взять Z_1 и Z_2 — решения уравнения $\Lambda Z = -\mu^2 Z$, соответствующие двум различным собственным значениям, то, учитывая, что

$$LY^i = \begin{cases} -\mu^2 y_1^i & (0 < z < h), \\ -B\mu^2 y_3^i & (h < z < H), \end{cases} \qquad MU^i = \begin{cases} -A\mu^2 u_1^i & (0 < z < h) \\ -C\mu^2 u_3^i & (h < z < H) \end{cases}$$

получим

$$\int_0^h y_1^{(1)}y_1^{(2)}dz + B\int_h^H y_3^{(1)}y_3^{(2)}dz + A\int_0^h u_1^{(1)}u_1^{(2)}dz + C\int_h^H u_3^{(1)}u_3^{(2)}dz = 0 \quad (21)$$

Таким образом, собственные функции Z_1 и Z_2 оказываются ортогональными в смысле (21).

Для доказательства других свойств собственных функций воспользуемся теорией интегральных уравнений. С этой целью построим функцию Грин $G(z,z_0)$. Такая функция будет, очевидно, тензором второго ранга:

$$G(z, z_0) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Как известно, собственные функции определяются из соотношения

$$Z = -\mu^2 \int_0^H G(z, \zeta) Z(\zeta)\, d\zeta \tag{23}$$

Функция G удовлетворяет уравнению

$$\Lambda G = \begin{pmatrix} \delta(z - z_0) & 0 \\ 0 & \delta(z - z_0) \end{pmatrix} \tag{24}$$

Компоненты G_{12} и G_{21} непрерывны в точке $z = z_0$ вместе со своими первыми производными, а компоненты G_{11} и G_{22}, будучи сами непрерывны в точке $z = z_0$, обладают скачком в производных

$$\frac{dG_{11}}{dz}(z_0 + 0,\ z_0) - \frac{dG_{11}}{dz}(z_0 - 0,\ z_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } z_0 < h \\ \dfrac{1}{B} & \text{при } z_0 > h \end{cases} \tag{25}$$

$$\frac{dG_{22}}{dz}(z_0 + 0,\ z_0) - \frac{dG_{22}}{dz}(z_0 - 0,\ z_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} & \text{при } z_0 < h \\ \dfrac{1}{C} & \text{при } z_0 > h \end{cases} \tag{26}$$

Далее, функция G должна удовлетворять краевым условиям

$$\frac{dG}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = H \tag{27}$$

$$G\big|_{h-0} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} G\big|_{h+0}, \qquad \frac{dG}{dz}\bigg|_{h-0} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \frac{dG'}{dz}\bigg|_{h+0} \tag{28}$$

Как известно, решение уравнения

$$\Lambda\Phi = F$$

(где Φ — вектор с компонентами Y, U, а F — вектор с компонентами f_1, f_2) представляется как

$$\Phi = \int_0^H G(z, \zeta) F(\zeta)\, d\zeta, \quad Y = \int_0^H (G_{11} f_1 + G_{12} f_2)\, d\zeta, \quad U = \int_0^H (G_{21} f_1 + G_{22} f_2)\, d\zeta$$

Очевидно, что

$$LY = f_1, \qquad MU = f_2 \tag{29}$$

Применим далее к рассматриваемым интегральным уравнениям общую теорию уравнений с симметрическим ядром. Для этого докажем симметрию функции Грина, т. е. установим, что

$$(\Phi_2,\ A\Phi_1) = (A\Phi_2,\ \Phi_1) \tag{30}$$

где Φ_1, Φ_2 — две векторные функции, а оператор A определяется из следующих соотношений

$$\begin{aligned} AY(z_1) &= \int_0^H [G_{11}(z_1,\ z_2) Y(z_2) + G_{12}(z_1,\ z_2) U(z_2)]\, dz_2 \\ AU(z_1) &= \int_0^H [G_{21}(z_1,\ z_2) Y(z_2) + G_{22}(z_1,\ z_2) U(z_2)]\, dz_2 \end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом, доказательство формулы (30) сводится к доказательству следующих соотношений

$$G_{11}(z_1,\ z_2) = G_{11}(z_2,\ z_1), \quad G_{12}(z_1,\ z_2) = G_{21}(z_2,\ z_1), \quad G_{22}(z_1,\ z_2) = G_{22}(z_2,\ z_1) \tag{32}$$

Установим формулы (32) для функции Грина, введенной согласно (22).

Как было показано выше (см. формулу (15)), для векторных функций Φ_1 и Φ_2, удовлетворяющих уравнениям

$$\Lambda\Phi_1 = F_1, \qquad \Lambda\Phi_2 = F_2$$

и граничным условиям (9) и (10), справедливо соотношение

$$\int_0^H (\Phi_1\Lambda\Phi_2 - \Phi_2\Lambda\Phi_1)\,dz = 0$$

Возьмем в качестве функций Φ_1 и Φ_2 векторы, входящие в состав тензоров $G(z, z_1) = G^{(1)}$ и $G(z,z_2) = G^{(2)}$. Очевидно,

$$\Lambda G^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta(z-z_1) & 0 \\ 0 & \delta(z-z_1) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda G^{(2)} = \begin{pmatrix} \delta(z-z_2) & 0 \\ 0 & \delta(z-z_2) \end{pmatrix} \tag{33}$$

Применяя формулу (15) к векторам

$$\begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} G_{11}^{(2)} \\ G_{21}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} G_{12}^{(2)} \\ G_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} G_{12}^{(1)} \\ G_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} G_{11}^{(2)} \\ G_{21}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} G_{12}^{(1)} \\ G_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} G_{12}^{(2)} \\ G_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

получим формулы (32).

Симметрия функции Грина позволяет сразу заключить, что все собственные значения нашей задачи $\lambda = -\mu^2$ вещественные, а собственные функции образуют ортонормальные системы в смысле (21), как это уже было установлено ранее.

Докажем теперь, что собственные функции образуют полную систему. Для этого воспользуемся теорией Гильберта — Шмидта.

Нужно лишь показать, что любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям, представима истокообразно через ядро, т. е. что любой вектор Φ может быть представлен в виде интеграла

$$\Phi(z) = \int_0^H G(z, \zeta)\,h(\zeta)\,d\zeta \tag{34}$$

Чтобы получить такое представление, подставим вектор Φ в левую часть уравнения

$$\Lambda\Phi = h \tag{35}$$

Получим функцию h. Можно убедиться в том, что $\lambda = 0$ не является собственным значением нашей задачи. Поэтому решение уравнения (35) единственно и выражается, очевидно, формулой (34), что и требовалось доказать. После того как построена система собственных функций $Z(z)$, легко получить решение краевой задачи в виде ряда.

Авторами были решены несколько вариантов поставленной выше краевой задачи, причем достаточно было ограничиться шестью членами в функциях $\Psi_2^{(n)}$, $n_2^{(2)}$ и девятью — в функциях $\Psi_1^{(k)}$, $\Psi_3^{(k)}$ и $n_1^{(k)}$, $n_3^{(k)}$. При решении задачи использовалась электронная машина БЭСМ.

Поступила 16 II 1959