Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. С. Пугачев

(Москва)

Излагается метод определения собственных значений и собственных функций линейного интегрального уравнения Фредгольма с определенно положительным симметричным ядром, представляющим собой корреляционную функцию случайной функции, связанной с белым шумом линейным дифференциальным уравнением. Этот метод представляет собой видоизменение данного в [1] метода решения линейного интегрального уравнения первого рода, встречающегося в статистической теории оптимальных систем.

1. Краткое изложение метода решения интегрального уравнения первого рода. В [1] был дан метод решения интегрального уравнения первого рода с конечными пределами, которое всегда может быть приведено к виду

$$\int_0^T K(t, u)\, g(t)\, dt = f(u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant T) \tag{1.1}$$

в случае, когда действительное определенно положительное симметричное ядро $K(t, u)$ представляет собой корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, связанной с белым шумом $V(t)$ линейным дифференциальным уравнением

$$FX = HV \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.2}$$

где F и H — полиномы относительно оператора D с произвольными действительными переменными коэффициентами

$$F = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k, \qquad H = \sum_{k=0}^{m} b_k D^k \qquad (m < n) \tag{1.3}$$

В этом случае ядро уравнения (1.1) выражается формулой [2,3]

$$K(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau)\, w(u, \tau)\, d\tau \tag{1.4}$$

де $w(t, \tau)$ представляет собой интеграл дифференциального уравнения

$$F_t\, w(t, \tau) = H_t\, \delta(t - \tau) \tag{1.5}$$

равный нулю при $\tau > t$.

Решение уравнения (1.1), полученное в [1], выражается формулой

$$g(t) = F^* \eta(t) \tag{1.6}$$

где функция $\eta(t)$ и другая функция $\xi(t)$ определяются в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ линейными дифференциальными уравнениями

$$H^* \eta(t) = \xi(t) \tag{1.7}$$

$$H\xi(t) = F f(t) \tag{1.8}$$

Для отрицательных t функция $\eta(t)$ определяется линейным дифференциальным уравнением

$$F^* \eta(t) = 0 \qquad (t < 0) \tag{1.9}$$

функция $\xi(t)$ — формулой (1.7), а функция $f(t)$ — дифференциальным уравнением (1.8). При всех значениях $t \leqslant T$, функции ξ и η представляют собой интегралы уравнений (1.8) и (1.7), определяемые формулами

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} w^-(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad \eta(t) = \int\limits_{t}^{T} p(\lambda, t)\, \xi(\lambda)\, d\lambda \tag{1.10}$$

где $w^-(t, \tau)$ и $p(\lambda, t)$ — соответствующие весовые функции [1,2]. Формулы (1.10) дают необходимые условия для определения всех постоянных интегрирования, после чего функции ξ и η и решение (1.6) уравнения (1.1) полностью определяются.

2. Применение метода для нахождения собственных значений и собственных функций. Изложенный метод можно применить, видоизменив его соответствующим образом, для нахождения собственных значений и собственных функций однородного линейного интегрального уравнения

$$\int\limits_{0}^{T} K(u, t)\, \varphi(t)\, \rho(t)\, dt = \lambda \varphi(u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant T) \tag{2.1}$$

ядро которого определяется формулой (1.4) и уравнением (1.5). Уравнение (2.1) при любой заданной неотрицательной функции $\rho(t)$ формально отличается от уравнения (1.2) только тем, что его правая часть представляет собой произведение неизвестного собственного значения на неизвестную функцию. Поэтому, положив в формулах предыдущего пункта

$$g(t) = \varphi(t)\, \rho(t), \qquad f(t) = \lambda \varphi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.2}$$

и произведя соответствующие изменения, мы можем получить алгоритм для определения собственных значений и собственных функций.

На основании равенств (2.2) формула (1.6) и уравнение (1.8) могут быть переписаны в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{\rho(t)} F^* \eta(t) \tag{2.3}$$

$$H\xi(t) = \lambda F \varphi(t) \tag{2.4}$$

Подставляя в уравнение (2.4) выражение (2.3) функции φ и выражение функции ξ из (1.7), получим следующее уравнение, определяющее функцию η в интервале $0 < t < T$:

$$F\left(\frac{1}{\rho} F^* \eta\right) - \frac{1}{\lambda} H H^* \eta = 0 \qquad (0 < t < T) \tag{2.5}$$

Это — линейное дифференциальное уравнение порядка $2n$, содержащее неизвестный параметр λ. Обозначим через $v_1(t, \lambda), \ldots, v_{2n}(t, \lambda)$ какие-нибудь $2n$ линейно независимых интегралов уравнения (2.5). Тогда общий интеграл уравнения (2.5) выразится формулой

$$\eta(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_\nu v_\nu(t, \lambda) \qquad (0 < t < T) \tag{2.6}$$

Подставляя это выражение в (2.3), получим

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_\nu \omega_\nu(t, \lambda) \qquad (0 < t < T) \tag{2.7}$$

где

$$\omega_\nu(t, \lambda) = \frac{1}{\rho(t)} F_t^* v_\nu(t, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, 2n) \tag{2.8}$$

Для определения неизвестных постоянных $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ в формулах (2.6) и (2.7) следует определить функции η и f при $t < 0$ интегрированием уравнений (1.9) и (1.8) и после этого подчинить функции η и f соответствующим условиям на концах интервала $0 < t < T$, вытекающим из формул (1.10). Общий интеграл уравнения (1.9) и соответствующее выражение функции f при $t < 0$ определяются формулами [1]

$$\eta(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r \eta_r(t), \qquad f(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r f_r(t) \qquad (t < 0) \tag{2.9}$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — какие-нибудь линейно независимые интегралы уравнения (1.9), а

$$f_r(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t, \tau) H^* \eta_r(\tau)\, d\tau \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

Для определения постоянных интегрирования $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$, $c_1, \ldots, c_n$ имеем следующие условия.

Во-первых, решение интегрального уравнения (2.1) не может содержать δ-функций. Формула (2.3) показывает, что для этого необходимо, чтобы функции $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ были непрерывны в точках $t = 0$ и $t = T$. Это условие дает $2n$ уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_\nu v_\nu^{(k)}(0, \lambda) - \sum_{r=1}^{n} c_r \eta_r^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2.11}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_\nu v_\nu^{(k)}(T, \lambda) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2.12}$$

Во-вторых, функция $f(t)$, определяемая второй формулой (2.2) при $0 \leqslant t \leqslant T$ и второй формулой (2.9) при $t < 0$, должна удовлетворять уравнению (1.8) в точке $t = 0$. Это условие вместе с уравнением (1.7) выражает разрывы функций $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ в точке $t = 0$ через разрывы производных функции η, т. е. дает n уравнений. Однако эти уравнения мы выведем несколько иным путем. Заменим уравнение (1.8), рассматриваемое как дифференциальное уравнение с неизвестной функцией $f(t)$, равноценной системой уравнений первого порядка, определив новые неизвестные функции $z_1, \ldots, z_n$ формулами

$$
\begin{aligned}
&z_1 = f, \qquad z_{k+1} = f^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, n-m-1) \\
&z_{k+1} = f^{(k)} - \sum_{h=0}^{k-n+m} (q_k \quad \xi)^{(h)} \qquad (k = n-m, \ldots, n-1)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&q_{n-m} = \frac{b_m}{a_n} \qquad (k = n-m+1, \ldots, n) \\
&q_k = \frac{1}{a_n}\left[b_{n-k} - \sum_{h=n-m}^{k-1} \sum_{=0}^{h} C_{n+l-k}^{n-k} \, a_{n+l+h-k} \, q_h^{(L)}\right]
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Тогда уравнение (1.8) заменится системой уравнений:

$$
z_k' = z_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-m-1), \qquad z_k' = z_{k+1} + q_k\xi \quad (k = n-m, \ldots, n-1)
$$

$$
z'_n = -\sum_{l=1}^{n} \frac{a_{l-1}}{a_n} z_l + q_n\xi \tag{2.15}
$$

В силу условия (2.11) и формулы (1.7) функция ξ непрерывна в точке $t = 0$. Следовательно, и интеграл системы уравнений (2.15) непрерывен в точке $t = 0$. Это условие на основании формул (2.13), (2.2), (2.7) и (2.9) дает следующие n уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\lambda \sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_\nu \omega_\nu^{(k)}(0, \lambda) - \sum_{r=1}^{n} c_r f_r^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-m-1) \\
&\lambda \sum_{\nu=1}^{2n} \gamma_\nu \left[\omega_\nu^{(k)}(0, \lambda) - \sum_{h=0}^{k-n+m} \sum_{l=0}^{h} C_h^l \, q_{k-h}^{(h-l)}(0) \, w_\nu^{(l)}(0, \lambda)\right] - \\
&\quad - \sum_{r=1}^{n} c_r \left[f_r^{(k)}(0) - \sum_{h=0}^{k-n+m} \sum_{l=0}^{h} C_h^l \, q_{k-h}^{(h-l)}(0) \, \xi_r^{(l)}(0)\right] = 0 \\
&\qquad (k = n-m, \ldots, n-1)
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

где

$$
w_\nu(t, \lambda) = H_t^* v_\nu(t, \lambda) \quad (\nu = 1, \ldots, 2n), \qquad \xi_r(t) = H_t^* \eta_r(t) \quad (r = 1, \ldots, n)
$$

Уравнения (2.11), (2.12) и (2.16) представляют собой систему $3n$ однородных линейных алгебраических уравнений относительно $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$, $c_1, \ldots, c_n$, коэффициенты которой зависят от неизвестного собственного значения λ. Для существования отличного от нуля решения этой системы уравнений необходимо, чтобы ее определитель $\Delta(\lambda)$ был равен нулю:

$$
\Delta(\lambda) = 0 \tag{2.17}
$$

Это уравнение определяет собственные значения. После определения собственных значений уравнения (2.11), (2.12) и (2.16) дадут возможность выразить величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$, $c_1, \ldots, c_n$, соответствующие каждому собственному значению λ, через какую-нибудь одну из них. Последняя определится условием нормирования

$$\int_0^T |\varphi(t)|^2 \rho(t)\,dt = 1 \tag{2.18}$$

Если для какого-нибудь собственного значения λ ранг матрицы коэффициентов системы уравнений (2.11), (2.12) и (2.16) будет ниже $2n-1$ и равен, например, $2n-s$, то это будет означать, что данное собственное значение λ является s-кратным. В этом случае уравнения (2.11), (2.12) и (2.16) дадут выражения всех коэффициентов γ_ν, c_r через какие-нибудь s из них, которые могут быть выбраны произвольно. Этим обстоятельством можно воспользоваться для того, чтобы определить такие s систем значений этих s коэффициентов, чтобы получить s ортонормированных собственных функций.

Изложенный метод легко распространяется на случай комплексного симметричного ядра (эрмитовского).

В случае, когда все коэффициенты операторов F и H постоянны и $\rho(t)\equiv 1$, уравнение (2.5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. В этом случае легко находятся аналитические выражения функций η_r, v_ν и ω_ν, и задача до конца решается аналитически. Таким образом, в случае, когда ядром уравнения (2.1) является корреляционная функция стационарной случайной функции, имеющей дробно-рациональную спектральную плотность, изложенный метод дает полное аналитическое решение задачи определения собственных значений и собственных функций. Это решение ранее было получено другим методом в [5] и [6].

Пример 1. Найти собственные значения и собственные функции уравнения (2.1) в случае, когда F и H определяются формулами

$$F = a_1(t)\,D + a_0(t), \qquad H = 1 \tag{2.19}$$

а $\rho(t)\equiv 1$. В этом случае уравнение (1.5), определяющее функцию $w(t,\tau)$, представляет собой уравнение первого порядка, которое легко интегрируется, после чего формула (1.4) дает

$$K(t,t') = \begin{cases} q_1(t)\,q_2(t') & \text{при } t > t' \\ q_1(t')\,q_2(t) & \text{при } t < t' \end{cases} \tag{2.20}$$

где

$$q_1(t) = \exp\left\{-\int_0^t \frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\right\}, \qquad q_2(t) = q_1(t)\int_{-\infty}^t \frac{d\tau}{a_1^2(\tau)\,q_1^2(\tau)} \tag{2.21}$$

Уравнение (2.5) имеет в данном случае вид:

$$(a_1^2\eta')' - \left(a_0^2 + a_0'a_1 - a_0a_1' - a_1a_1'' - \frac{1}{\lambda}\right)\eta = 0 \tag{2.22}$$

Обозначим через $v_1(t,\lambda)$, $v_2(t,\lambda)$ какие-нибудь два линейно независимых интеграла уравнения (2.22). Тогда формула (2.8) даст

$$\omega_\nu(t,\lambda) = -\frac{d}{dt}\left[a_1(t)\,v_\nu(t,\lambda)\right] + a_0(t)v_\nu(t,\lambda) \qquad (\nu = 1, 2) \tag{2.23}$$

Формула (2.7), выражающая неизвестные собственные функции, примет вид:

$$\varphi(t) = \gamma_1\omega_1(t,\lambda) + \gamma_2\omega_2(t,\lambda) \tag{2.24}$$

При $t < 0$ функции η и f выражаются, как и в примере 1 статьи [1], формулами

$$\eta(t) = \frac{c_1}{a_1(t)\, q_1(t)}, \qquad f(t) = c_1 q_2(t) \qquad (t < 0) \tag{2.25}$$

Так как в данном случае $n = 1$, $m = 0$, то для определения неизвестных постоянных γ_1, γ_2 и c_1 имеем одно уравнение (2.16), одно уравнение (2.11) и одно уравнение (2.12):

$$\begin{gathered} \lambda\left[\gamma_1\omega_1(0, \lambda) + \gamma_2\omega_2(0, \lambda)\right] - c_1 q_2(0) = 0 \\ \gamma_1 v_1(0, \lambda) + \gamma_2 v_2(0, \lambda) - \frac{c_1}{a_1(0)\, q_1(0)} = 0 \\ \gamma_1 v_1(T, \lambda) + \gamma_2 v_2(T, \lambda) = 0 \end{gathered} \tag{2.26}$$

Следовательно, уравнение (2.17), определяющее собственные значения, имеет в данном случае вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\omega_1(0, \lambda) & \lambda\omega_2(0, \lambda) & q_2(0) \\ v_1(0, \lambda) & v_2(0, \lambda) & \dfrac{1}{a_1(0)\, q_2(0)} \\ v_1(T, \lambda) & v_2(T, \lambda) & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.27}$$

Определив собственные значения путем решения уравнения (2.27), мы выразим два из неизвестных коэффициентов γ_1, γ_2, c_1 через третий. Последний определится из условия нормирования (2.18).

Пример 2. Рассмотреть более подробно частный случай предыдущего примера, когда коэффициенты a_0 и a_1 постоянны и равны соответственно

$$a_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

В данном случае

$$q_1(t) = \frac{1}{q_2(t)} = e^{-\alpha t} \tag{2.28}$$

и формула (2.20) принимает вид:

$$K(t, t') = e^{-\alpha|t-t'|} \tag{2.29}$$

Уравнение (2.22) имеет в данном случае вид:

$$\eta'' + \left(\frac{2\alpha}{\lambda} - \alpha^2\right)\eta = 0 \tag{2.30}$$

Это уравнение с постоянными коэффициентами имеет два линейно независимых интеграла вида

$$v_1(t, \lambda) = e^{i\omega t}, \qquad v_2(t, \lambda) = e^{-i\omega t} \tag{2.31}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda} - \alpha^2} \tag{2.32}$$

Формулы (2.23) дают

$$\omega_1(t, \lambda) = \frac{\alpha - i\omega}{2\alpha} e^{i\omega t}, \qquad \omega_2(t, \lambda) = \frac{\alpha + i\omega}{2\alpha} e^{-i\omega t} \tag{2.33}$$

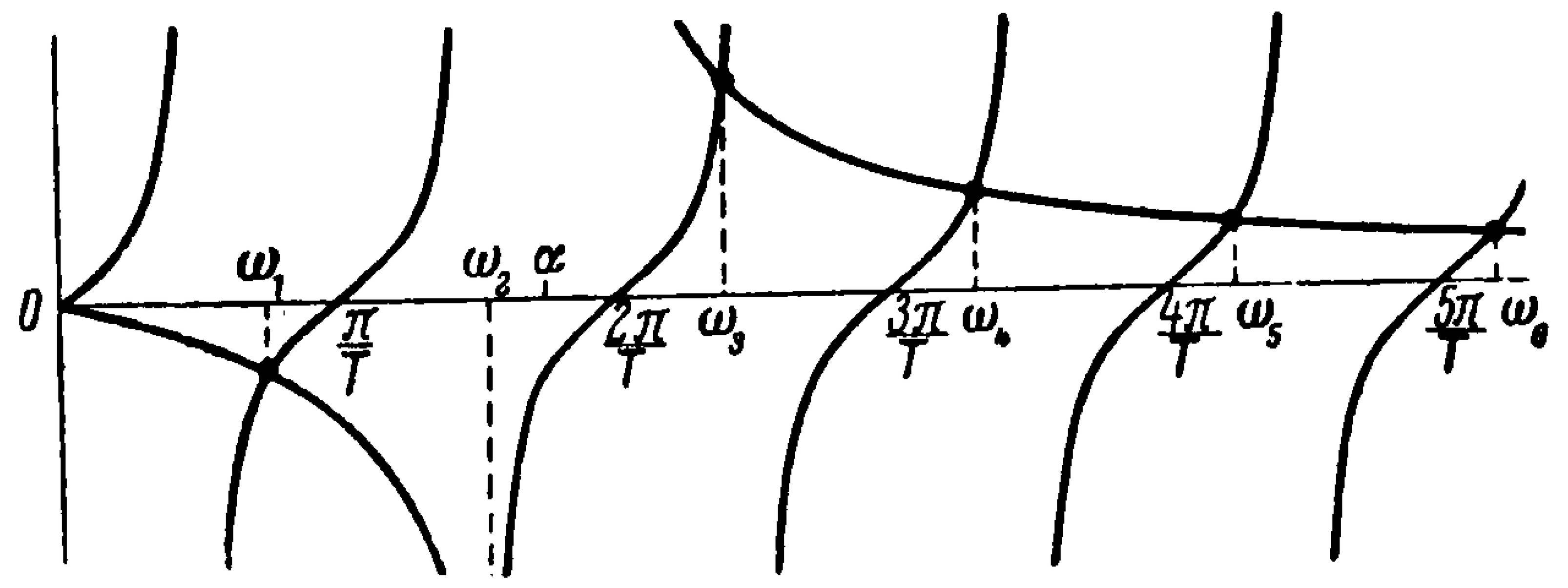
Уравнение (22.7) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda\dfrac{\alpha - i\omega}{2\alpha} & \lambda\dfrac{\alpha + i\omega}{2\alpha} & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2\alpha} \\ e^{i\omega T} & e^{-i\omega T} & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.34}$$

Раскрывая определитель, принимая во внимание (2.32) и производя элементарные преобразования, приведем уравнение (2.34) к виду

$$\operatorname{tg} \omega T = -\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 - \omega^2} \tag{2.35}$$

Это уравнение определяет неограниченную возрастающую последовательность значений $\omega = \omega_1, \omega_2, \ldots$ На прилагаемой фигуре изображено графическое решение уравнения (2.35) для случая, когда $\alpha = {}^7/_4\, \pi / T$.



Подставив значение $\omega = \omega_\nu$, определяемое уравнением (2.35), в (2.32) и решая полученное уравнение относительно λ, найдем соответствующее собственное значение

$$\lambda_\nu = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_\nu^2} \qquad (\nu=1,2,\ldots) \tag{2.36}$$

Эта формула дает неограниченную убывающую последовательность собственных значений.

Система уравнений (2.26) имеет в данном случае вид:

$$\lambda\left[(\alpha - i\omega)\gamma_1 + (\alpha + i\omega)\gamma_2\right] - \sqrt{2\alpha}\, c_1 = 0$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \sqrt{2\alpha}\, c_1 = 0, \qquad \gamma_1 e^{i\omega T} + \gamma_2 e^{-i\omega T} = 0$$

Последнее из этих уравнений дает $\gamma_2 = -\gamma_1 e^{2i\omega T}$. Подставляя это выражение в любое из двух оставшихся уравнений (2.37), можем также выразить c_1 через γ_1. Однако в этом нет необходимости, поскольку постоянные c_r являются вспомогательными и в решение задачи непосредственно не входят.

Подставляя найденные выражения (2.33) и γ_2 в формулу (2.24), производя элементарные преобразования и определив после этого γ_1 из условия нормирования (2.18), найдем собственные функции:

$$\varphi_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{T + \lambda_\nu}} \sin\left[\omega_\nu\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{\nu\pi}{2}\right] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2.38}$$

Поступила 17 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев. В. С. Метод решения основного интегрального уравнения статистической теории оптимальных систем в конечной форме. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
2. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Гостехиздат, 1968.
3. Пугачев В. С. Интегральные канонические представления случайных функций и их применение к определению оптимальных линейных систем. Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 11, стр. 971—984, 1957.
4. Сансоне Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. ИЛ, 1953.
5. Slepian D. Estimation of signal parameters in the presence of noise. Trans. IRE, PGIT-3, pp. 68—89, 1954.