Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. Е. Кузмак

(Москва)

В работе рассматриваются асимптотические решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon f(\tau, y)\frac{dy}{dt} + F(\tau, y) = 0 \tag{0.1}$$

Здесь ε — малый параметр, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время; под асимптотическими решениями подразумеваются главные члены асимптотических разложений.

Исследованию асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений посвящен ряд работ [1-5] и др. Непосредственно исследованию асимптотического поведения решения уравнения (0.1) для некоторых случаев посвящены работы [6-9].

§ 1. Методика вычисления асимптотических решений. Будем искать решение уравнения (0.1) в виде

$$y = y(\tau, \omega) \tag{1.1}$$

имея в виду уравнения, связывающие τ и ω с t:

$$\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \varphi(\tau) \tag{1.2}$$

Для того чтобы переменная ω возрастала вместе с возрастанием t, будем требовать, чтобы функция $\varphi(\tau)$ не принимала отрицательных значений. Отметим, что в случае, когда t изменяется в интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau_0 / \varepsilon$, то τ и ω, в соответствии с (1.2), изменяются в интервалах $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant \omega \leqslant \tau_0 \max\varphi(\tau) / \varepsilon < \infty$. Вычислим производные от $y(\tau, \omega)$ по t. Пользуясь (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \omega}\varphi(\tau) + \frac{\partial y}{\partial \tau}\varepsilon \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2}\varphi^2(\tau) + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \omega\, \partial \tau}\varphi(\tau)\varepsilon + \frac{\partial y}{\partial \omega}\varphi'(\tau)\varepsilon + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\varepsilon^2\end{gathered} \tag{1.3}$$

Штрихом здесь обозначено дифференцирование по τ. Уравнение (0.1) с учетом (1.3) принимает вид:

$$\begin{gathered}\varphi^2(\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} + F(\tau, y) + \varepsilon\left[2\varphi(\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial \omega\, \partial \tau} + \varphi'(\tau)\frac{\partial y}{\partial \omega} + \right. \\ \left. + f(\tau, y)\varphi(\tau)\frac{\partial y}{\partial \omega}\right] + \varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + f(\tau, y)\frac{\partial y}{\partial \tau}\right] = 0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Таким образом, обыкновенное уравнение (0.1) приведено к уравнению в частных производных. Такой прием ранее применялся в работах [2] и [5] для исследования квазилинейных уравнений. К нелинейному уравнению, представляющему собой частный случай уравнения (0.1), этот прием был применен в работе [9].

В ряде случаев, в частности в рассматриваемом случае, такой подход позволяет существенно сократить выкладки.

Для того чтобы удовлетворить уравнению (1.4) с точностью до членов $0(\varepsilon^2)$, представим $y(\tau, \omega)$ в виде

$$y(\tau, \omega) = y_0(\tau, \omega) + \varepsilon y_1(\tau, \omega) \tag{1.5}$$

Можно написать

$$F(\tau, y_0 + \varepsilon y_1) = F(\tau, y_0) + F_y(\tau, y_0) y_1 \varepsilon + \tfrac{1}{2} F_{yy}(\tau, y_0 + \xi y_1) y_1^2 \varepsilon^2 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon)$$

$$f(\tau, y_0 + \varepsilon y_1) = f(\tau, y_0) + f_y(\tau, y_0 + \eta y_1) y_1 \varepsilon \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant \varepsilon) \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.4), получим

$$\begin{gathered}\varphi_2(\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega^2} + F(\tau, y_0) + \varepsilon \left\{ \varphi^2(\tau) \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega^2} + F_y(\tau, y_0) y_1 + 2\varphi(\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau\, \partial \omega} + \right. \\ \left. + [\varphi'(\tau) + f(\tau, y_0) \varphi(\tau)] \frac{\partial y_0}{\partial \omega} \right\} + \varepsilon \Delta \left(\tau, \frac{\partial^{k+l} y_0}{\partial \tau^k \partial \omega^l}, \frac{\partial^{k+l} y_1}{\partial \tau^k \partial \omega^l}, \varepsilon \right) = 0 \\ (k, l = 0, 1, 2)\end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta \left(\tau, \frac{\partial^{k+l} y_0}{\partial \tau^k \partial \omega^l}, \frac{\partial^{k+l} y_1}{\partial \tau^k \partial \omega^l}, \varepsilon \right) = \frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau^2} + f(\tau, y_0) \frac{\partial y_0}{\partial \tau} + 2\varphi(\tau) \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega\, \partial \tau} + \\ + [\varphi'(\tau) + f(\tau, y_0) \varphi(\tau)] \frac{\partial y_1}{\partial \omega} + f_y(\tau, y_0 + \eta y_1) y_1 \varphi(\tau) \frac{\partial y_0}{\partial \omega} + \\ + \frac{1}{2} F_{yy}(\tau, y_0 + \xi y_1) y_1^2 + \varepsilon \left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial \tau^2} + f(\tau, y_0) \frac{\partial y_1}{\partial \tau} + f_y(\tau, y_0 + \eta y_1) y_1 \frac{\partial y_0}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + f_y(\tau, y_0 + \eta y_1) y_1 \varphi(\tau) \frac{\partial y_1}{\partial \omega} \right] + \varepsilon^2 f_y(\tau, y_0 + \eta y_1) y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \tau}\end{gathered}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε° и ε, будем иметь

$$\varphi^2(\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega^2} + F(\tau, y_0) = 0 \tag{1.9}$$

$$\varphi^2(\tau) \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega^2} + F_y(\tau, y_0) y_1 = -2\varphi(\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega\, \partial \tau} - [\varphi'(\tau) + f(\tau, y_0) \varphi(\tau)] \frac{\partial y_0}{\partial \omega} \tag{1.10}$$

Предположим, что функции $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ могут быть определены из уравнений (1.9) — (1.10) периодическими функциями ω с периодом T_ω, не зависящим от τ. Докажем, что при таком условии функция (1.8) при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant \omega < \infty$ ограничена константой, не зависящей от ε.

Для доказательства предположим, что функции $F(\tau, y)$ и $f(\tau, y)$ имеют достаточное количество производных по τ и по y при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant |y| \leqslant h$. Из известных теорем о существовании и дифференцируемости решений дифференциальных уравнений следует, что при таком условии функции $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$, а также их производные по τ и по ω, по крайней мере до второго порядка включительно, при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant \omega \leqslant T_\omega$ ограничены константами, не зависящими от ε, если только функция $\varphi(\tau)$ не обращается в нуль и имеет достаточное количество производных. Из того, что период функций $y_0(\tau, \omega)$ и

$y_1(\tau, \omega)$ не зависит от τ следует, что все их производные по τ и по ω также периодичны по ω с тем же периодом. Поэтому из ограниченности функций

$$\frac{\partial^{k+l} y_0}{\partial \tau^k \partial \omega^l}, \qquad \frac{\partial^{k+l} y_1}{\partial \tau^k \partial \omega^l} \qquad (k, l = 0, 1, 2) \tag{1.11}$$

при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant \omega \leqslant T_\omega$ следует ограниченность их при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant \omega < \infty$ и, следовательно, при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0 / \varepsilon$.

Из того, что коэффициент при ε^2 в (1.7) выражается через функции (1.11), следует, что он ограничен при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0 / \varepsilon$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Если при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ и $0 \leqslant |y| \leqslant h$ функции $f(\tau, y)$ и $F(\tau, y)$ достаточно гладкие, функция $\varphi(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ не обращается в нуль и имеет достаточное количество производных, функции $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ могут быть определены из уравнений (1.9)—(1.10) периодическими функциями ω с периодом, не зависящим от τ, то функция

$$y(t) = y_0\left(\varepsilon t, \int \varphi(\varepsilon t)\, dt\right) + \varepsilon y_1\left(\varepsilon t, \int \varphi(\varepsilon t)\, dt\right) \tag{1.12}$$

при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0 / \varepsilon$ удовлетворяет уравнению (0.1) с точностью до членов порядка ε^2.

Перейдем к решению уравнений (1.9)—(1.10). В соответствии с доказанной теоремой функции $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ должны быть определены периодическими функциями ω с периодом, не зависящим от τ. Относительно уравнения (1.9) просто предположим, что оно имеет решение $y_0(\tau, \omega)$ с периодом T_ω по ω, не зависящим от τ. Таким образом, мы ограничиваемся случаями, в которых в первом приближении уравнение (0.1) имеет семейство периодических решений. Обозначим через a_1 и a_2 последовательные нули производной $\partial y_0 / \partial \omega$. Отметим равенства

$$\begin{gathered} y_0(\tau, \omega)\big|_{\omega = a_i - \rho} = y_0(\tau, \omega)\big|_{\omega = a_i + \rho} \\ \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2\bigg|_{\omega = a_i - \rho} = \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2\bigg|_{\omega = a_i + \rho} \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant {}^1\!/_2\, T_\omega) \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega\, \partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial \omega}\bigg|_{\omega = a_i - \rho} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega\, \partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial \omega}\bigg|_{\omega = a_i + \rho} \end{gathered} \tag{1.13}$$

Для доказательства этих равенств необходимо установить справедливость лишь первого из них, так как остальные получаются из первого при помощи простого дифференцирования. Умножая уравнение (1.9) на $\partial y_0 / \partial \omega$ и интегрируя по ω от a_i до ω, получим

$$\frac{\varphi^2(\tau)}{2} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2 + \int\limits_{y_0(a_i)}^{y_0} F(\tau, y_0)\, dy_0 = 0$$

Откуда

$$\omega - a_i = \pm \rho = \pm \left| \int\limits_{y_0(a_i)}^{y_0} \frac{dy_0}{\sqrt{\Phi(\tau, y_0)}} \right|, \qquad \Phi(\tau, y_0) = \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2$$

Если ω заключено между a_1 и a_2, то очевидно, что интеграл в последнем равенстве представляет собой монотонную функцию y_0 при, y_0

заключенном между $y_0(a_1)$ и $y_0(a_2)$. Причем, когда y_0 изменяется в этом интервале, то ρ, очевидно, заключено между 0 и $a_2 - a_1 = {}^1/_2 T_\omega$. В силу этого каждому значению y_0 из этого интервала соответствуют два значения ω, равные $a_i + \rho$ и $a_i - \rho$. Это утверждение, очевидно, эквивалентно первому из равенств (1.13), которое, таким образом, можно считать доказанным.

Будем искать выражение для $y_1(\tau, \omega)$ в виде

$$y_1(\tau, \omega) = \frac{\partial y_0}{\partial \omega} \int\limits_{a_1 - {}^1/_2 T_\omega}^{\omega} E(\tau, \omega)\, d\omega \tag{1.14}$$

Здесь $E(\tau, \omega)$ — новая неизвестная функция. Подставляя (1.14) в (1.10), получим

$$E(\tau, \omega) = -\frac{1}{\varphi^2(\tau)(\partial y_0 / \partial \omega)^2} \int\limits_{a_1}^{\omega} \left\{ 2\varphi(\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega\, \partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial \omega} + \right.$$
$$\left. + [\varphi'(\tau) + f(\tau, y_0)\varphi(\tau)] \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2 \right\} d\omega \tag{1.15}$$

Для того чтобы в соответствии с доказанной теоремой определить функцию $y_1(\tau, \omega)$ периодической функцией ω с периодом T_ω, потребуем, чтобы $E(\tau, \omega) = E(\tau, \omega + T_\omega)$. В силу периодичности подынтегрального выражения в (1.15) и симметрии его относительно точки $\omega = a_2$ [см. (1.13)] для этого достаточно выполнения равенства

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \left[2\varphi(\tau) \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega\, \partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial \omega} + \varphi'(\tau) \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2 + f(\tau, y_0)\varphi(\tau) \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega}\right)^2 \right] d\omega = 0 \tag{1.16}$$

Докажем теперь, что функция $E(\tau, \omega)$ ограничена. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что она ограничена при $\omega = a_1$ и $\omega = a_2$, когда знаменатель в (1.15) обращается в нуль.

Пусть при $\omega = a_1$ и $\omega = a_2$ функция $\partial y_0 / \partial \omega$ имеет нули соответственно порядка r_1 и r_2. Тогда числитель в формуле (1.15) будет в этих точках иметь нули порядка $2r_1 + 1$ и $2r_2 + 1$ [см. (1.16)], в то время как знаменатель имеет нули лишь порядка $2r_1$ и $2r_2$. Поэтому $E(\tau, \omega)$ при $\omega = a_1$ и $\omega = a_2$ не только ограничена, но и обращается в нуль.

В силу ограниченности и периодичности функции $E(\tau, \omega)$ из (1.14) следует, что для доказательства периодичности $y_1(\tau, \omega)$ по ω достаточно установить справедливость равенства

$$\int\limits_{a_1 - {}^1/_2 T_\omega}^{a_1 + {}^1/_2 T_\omega} E(\tau, \omega)\, d\omega = 0 \tag{1.17}$$

Из формул (1.13) и (1.15) имеем

$$E(\tau, a_1 - \rho) = -E(\tau, a_1 + \rho) \qquad \left(0 \leqslant \rho \leqslant \tfrac{1}{2} T_\omega\right)$$

Отсюда, очевидно, и следует (1.17). Таким образом, доказано, что если выполняется соотношение (1.16), то функция $y_1(\tau, \omega)$ периодична по ω с периодом T_ω, не зависящим от τ.

Соотношение (1.16) далее будем называть условием периодичности. Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\left[\varphi(\tau)\int\limits_{a_1}^{a_2}\left(\frac{\partial y_0}{\partial\omega}\right)^2 d\omega\right]+\varphi(\tau)\int\limits_{a_1}^{a_2} f(\tau, y_0)\left(\frac{\partial y_0}{\partial\omega}\right)^2 d\omega=0 \tag{1.18}$$

Отметим один частный случай, когда $f(\tau, y)=f(\tau)$. В этом случае (1.18) интегрируется и может быть записано в виде

$$\varphi(\tau)\int\limits_{a_1}^{a_2}\left(\frac{\partial y_0}{\partial\omega}\right)^2 d\omega = D\exp\left(-\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(\tau)\,d\tau\right) \tag{1.19}$$

Здесь D — произвольная постоянная.

В силу того, что члены порядка ε в (1.12) и (1.3) представляют собой небольшие колеблющиеся поправки к главным членам, их обычно можно не учитывать. Поэтому асимптотические формулы для решения уравнения (0.1) и его производной [см. (1.15)] имеют вид:

$$y_0(t)=y_0(\tau,\omega),\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0=\varphi(\tau)\frac{\partial y_0}{\partial\omega}\qquad \left(\tau=\varepsilon t,\quad \omega=\omega_0+\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(\varepsilon t)\,dt\right) \tag{1.20}$$

где ω_0 — произвольная постоянная. Таким образом, для определения асимптотического решения необходимо решить систему, состоящую из уравнения (1.9), которое будем далее называть «эталонным» уравнением, и условия периодичности.

Отметим, что из (1.2) и равенства $y_0(\tau,\omega)=y_0(\tau,\omega+T_\omega)$ следует, что мгновенный период колебания $T(\tau)$, который для рассматриваемого класса задач определяется как расстояние между двумя последовательными максимумами или минимумами, связан с функцией $\varphi(\tau)$ так:

$$T(\tau)=T_\omega/\varphi(\tau) \tag{1.21}$$

В связи с этим функцию $\varphi(\tau)$ будем называть мгновенной частотой колебаний. Как показали произведенные сравнения асимптотических решений с точными (см. также доказанную выше теорему), основным условием близости асимптотических решений к точным является отличие мгновенной частоты колебаний $\varphi(\tau)$ от нуля.

§ 2. Вычисление асимптотических решениий в случаях, когда решение «эталонного» уравнения выражается через эллиптические функции Якоби. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a(\tau)y+b(\tau)y^3=0 \tag{2.1}$$

«Эталонное» уравнение для него имеет вид:

$$\varphi^2(\tau)\frac{\partial^2 y_0}{\partial\omega^2}+a(\tau)y_0+b(\tau)y_0^3=0 \tag{2.2}$$

Его решение может быть выражено через любую из эллиптических функций Якоби: $\mathrm{sn}\,[K(\nu)\omega,\nu]$, $\mathrm{cn}\,[K(\nu)\omega,\nu]$, $\mathrm{dn}\,[K(\nu)\omega,\nu]$. Здесь $K(\nu)$ — полный эллиптический интеграл первого рода[1].

[1] Через ν будем обозначать квадрат модуля. В связи с этим вместо принятых обозначений для эллиптических функций и интегралов $\mathrm{sn}(u,\sqrt{\nu}),\ldots,E(\sqrt{\nu})$ будем писать $\mathrm{sn}(u,\nu),\ldots,E(\nu)$; говоря о модуле, будем подразумевать его квадрат.

Выразим его сначала через эллиптический синус (см. [9])

$$y_{0,1} = A_1(\tau)\,\mathrm{sn}\,[K(\nu_1(\tau))\,\omega_1,\ \nu_1(\tau)] \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2), будем иметь

$$A_1(\tau)\,\psi_1^2(\tau)\frac{\partial^2 \mathrm{sn}\,u}{\partial u^2} + a(\tau)A_1(\tau)\,\mathrm{sn}\,u + b(\tau)A_1^3(\tau)\,\mathrm{sn}^3 u = 0 \tag{2.4}$$

Здесь $\psi_1(\tau) = K(\nu_1(\tau))\,\varphi_1(\tau)$, $u = K(\nu_1(\tau))\,\omega_1$. Заменяя $\partial^2 \mathrm{sn}\ u / \partial u^2$ при помощи уравнения для эллиптического синуса

$$\frac{\partial^2 \mathrm{sn}\,u}{\partial u^2} + (1+\nu)\,\mathrm{sn}\,u - 2\nu\,\mathrm{sn}^3 u = 0$$

будем иметь

$$[-\psi_1^2(\tau)(1+\nu_1(\tau)) + a(\tau)]\,\mathrm{sn}\,u + [\psi_1^2(\tau)\,2\nu_1(\tau) + b(\tau)A_1^2(\tau)]\,\mathrm{sn}^3 u = 0$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\mathrm{sn}\,u$ и $\mathrm{sn}^3 u$, получим два соотношения для трех функций $A_1(\tau)$, $\nu_1(\tau)$ и $\varphi_1(\tau)$:

$$\psi_1^2(\tau)(1+\nu_1(\tau)) = a(\tau), \qquad \psi_1^2(\tau)\,2\nu_1(\tau) = -b(\tau)A_1^2(\tau) \tag{2.5}$$

Недостающее соотношение получим из условия периодичности (1.19) Из (2.3) и [10] имеем

$$\frac{\partial y_{0,1}}{\partial \omega} = A_1(\tau)K(\nu_1(\tau))\frac{\partial\,\mathrm{sn}\,u}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\,\mathrm{sn}\,u}{\partial u} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (1.13), получим

$$\psi_1(\tau)A_1^2(\tau)L(\nu_1(\tau)) = G \qquad \left(G = \frac{D}{2}\right) \tag{2.7}$$

Здесь

$$L(\nu) = \int_0^{K(\nu)} \mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u\,du = \int_0^1 \sqrt{(1-\zeta^2)(1-\nu\zeta^2)}\,d\zeta =$$

$$= \frac{(1+\nu)E(\nu) - (1-\nu)K(\nu)}{3\nu} \qquad (\zeta = \mathrm{sn}\,u) \tag{2.8}$$

После несложных преобразований равенства (2.5) и (2.7) могут быть записаны в виде

$$\frac{4\nu_1^2(\tau)L^2(\nu_1(\tau))}{(1+\nu_1(\tau))^3} = p(\tau), \qquad p(\tau) = \frac{G^2b^2(\tau)}{a^3(\tau)}$$

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{K(\nu_1(\tau))}\sqrt{\frac{a(\tau)}{(1+\nu_1(\tau))}}, \qquad A_1(\tau) = \sqrt{-\frac{a(\tau)\,2\nu_1(\tau)}{b(\tau)[1+\nu_1(\tau)]}} \tag{2.9}$$

При помощи этих соотношений можно последовательно вычислить искомые функции $\nu_1(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$ и $A_1(\tau)$.

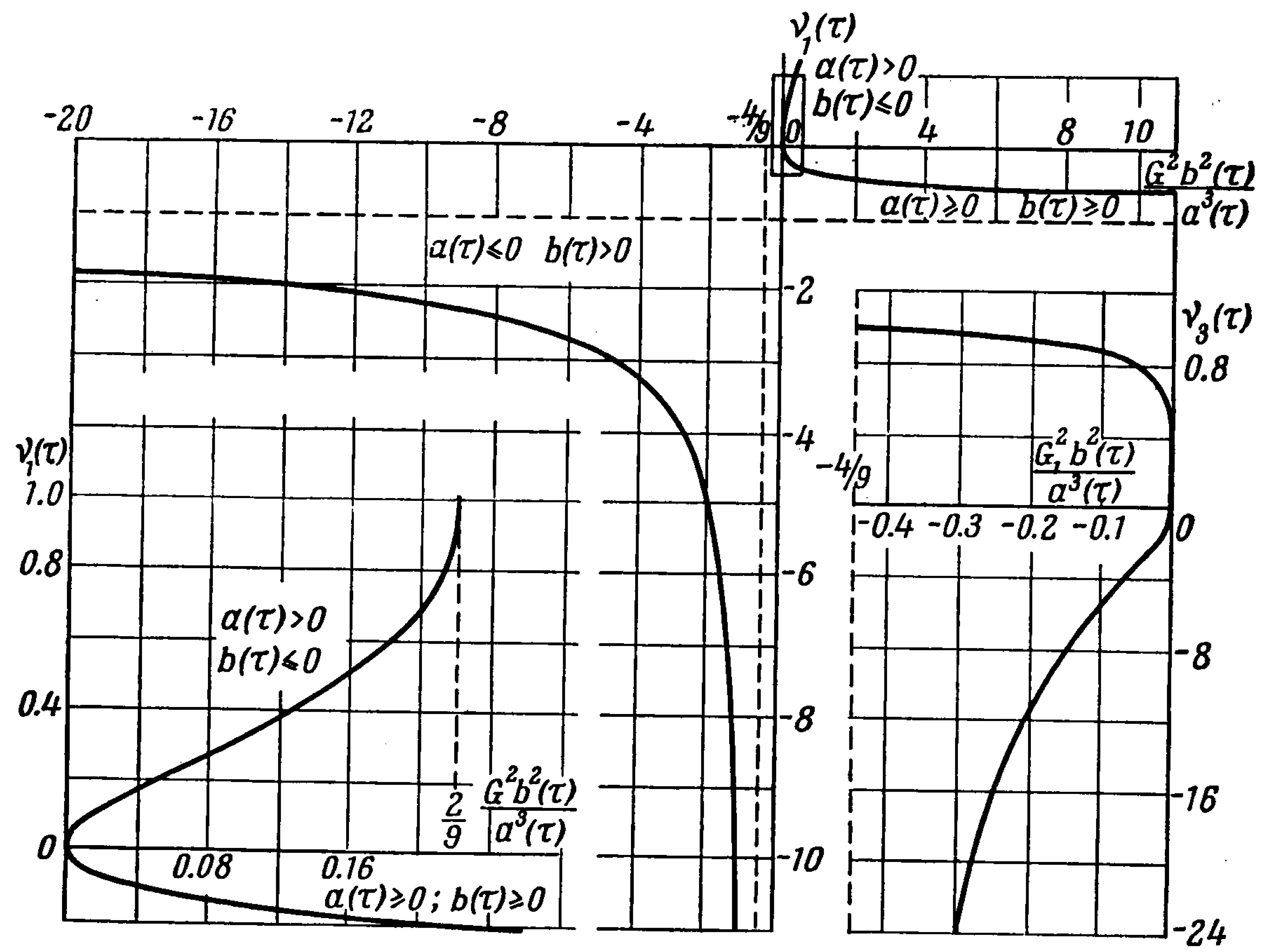
График для решения уравнения для функции $\nu_1(\tau)$ изображен на фиг. 1.

Рассмотрим случаи, связанные с различными сочетаниями знаков коэффициентов $a(\tau)$ и $b(\tau)$.

1. $a(\tau) > 0$, $b(\tau) \leqslant 0$. В этом случае кривая, определяющая $\nu_1(\tau)$, лежит в I квадранте, так как из (2.5) видно, что $\nu_1(\tau) \geqslant 0$. Решение для

$\nu_1(\tau)$ существует при $0 \leqslant p(\tau) \leqslant {}^2/_9$. В момент $t = t_1$, когда $p(\tau) = {}^2/_9$, асимптотическое решение теряет колебательный характер. При $p(\tau) > {}^2/_9$, так же как и в случае, когда $a(\tau) < 0$, $b(\tau) < 0$, уравнение (2.2) периодических решений не имеет.

2. $a(\tau) \geqslant 0$, $b(\tau) \geqslant 0$. Кривая, определяющая $\nu_1(\tau)$, в этом случае лежит в IV квадранте, так как $\nu_1(\tau) \leqslant 0$ в силу (2.5). Решение для $\nu_1(\tau)$ существует при $0 \leqslant p(\tau) < \infty$.



Фиг. 1

3. $a(\tau) \leqslant 0$, $b(\tau) > 0$. В этом случае кривая на фиг. 1 лежит в III квадранте, так что $\nu_1(\tau) < 0$. Решение для $\nu_1(\tau)$ в этом сучае существует при $-\infty < p(\tau) \leqslant -{}^4/_9$.

В таблицах значения эллиптических функций и эллиптических интегралов обычно даются при $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Поэтому в случаях 2 и 3, когда $\nu_1(\tau) \leqslant 0$, для того чтобы иметь возможность пользоваться асимптотическим решением (2.3), необходимо предварительно вычислить значения функций $\operatorname{sn}[K(\nu)\,\omega, \nu]$ и $K(\nu)$ при $\nu < 0$. Однако без этих расчетов можно обойтись, если искать решение «эталонного» уравнения (2.2) в виде

$$y_{0,2} = A_2(\tau)\operatorname{cn}[K(\nu_2(\tau))\,\omega_2, \nu_2(\tau)] \tag{2.10}$$

Опуская несложные выкладки, которые совершенно аналогичны проделанным выше, приведем сразу окончательные формулы для вычисления функций $\nu_2(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ и $A_2(\tau)$:

$$\frac{4\nu_2^2(\tau)\,M^2(\nu_2(\tau))}{(1-2\nu_2(\tau))^3} = p(\tau) \qquad (\nu_2(\tau)\,b(\tau) \geqslant 0) \tag{2.11}$$

$$\varphi_2(\tau) = \frac{1}{K(\nu_2(\tau))}\sqrt{\frac{a(\tau)}{1-2\nu_2(\tau)}}, \qquad A_2(\tau) = \sqrt{\frac{a(\tau)\,2\nu_2(\tau)}{b(\tau)\,[1-2\nu_2(\tau)]}}$$

Здесь

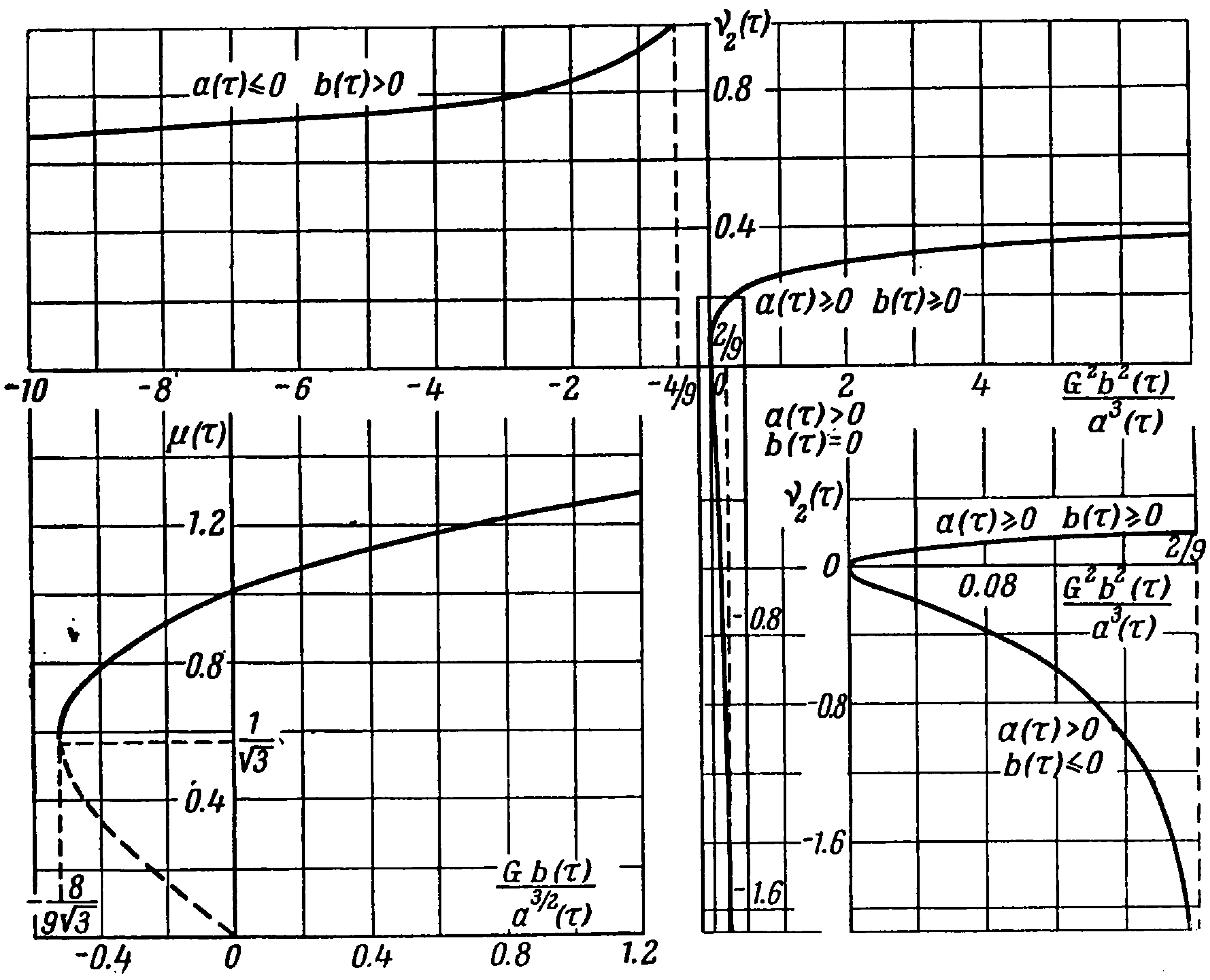
$$M(\nu) = \int_0^{K(\nu)} \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u \, du = \sqrt{(1-\nu)}\, L\left(\frac{-\nu}{1-\nu}\right)$$

График для решения уравнения для функции $\nu_2(t)$ изображен на фиг. 2. Рассмотрим случаи, связанные с различными сочетаниями знаков функций $a(\tau)$ и $b(\tau)$.

1. $a(\tau) > 0$, $b(\tau) \leqslant 0$. Кривая на фиг. 2, соответствующая этому случаю, расположена в IV квадранте, так что $\nu_2(\tau) \leqslant 0$.

2. $a(\tau) \geqslant 0$, $b(\tau) \geqslant 0$. Кривая на фиг. 2, соответствующая этому случаю, расположена в I квадранте, так что $\nu_2(\tau) \geqslant 0$.

3. $a(\tau) \leqslant 0$, $b(\tau) > 0$. Соответствующая кривая на фиг. 2 расположена во II квадранте, так что в этом случае $\nu_2(\tau) \geqslant 0$.



Фиг. 2

Сопоставляя полученные результаты, видим, что при использовании эллиптического косинуса в случаях 2 и 3 $0 \leqslant \nu_2(\tau) \leqslant 1$, так что можно пользоваться имеющимися таблицами (в то время как при использовании эллиптического синуса в этих случаях $-\infty \leqslant \nu_1(\tau) \leqslant 0$).

Поэтому в случаях 2 и 3 удобнее пользоваться асимптотическими решениями (2.10). По существу же асимптотическое решение (2.10) ничего нового по сравнению с асимптотическим решением (2.3) не дает. Более того, можно доказать, что асимптотические решения (2.3) и (2.10) совпадают.

Как видно из фиг. 1 и 2, при $-{}^4/_9 \leqslant p(\tau) < 0$ действительных решений для модуля не существует. Это связано с тем, что для значений функций $p(\tau)$, лежащих в этом интервале, решение уравнения (2.2) не может быть описано при помощи функций, колеблющихся около значения $y = 0$, каковыми являются эллиптический синус и эллиптический косинус, так как в этом случае оно колеблется в окрестности значений $y = \pm\sqrt{-a(\tau)/b(\tau)}$.

Для того чтобы получить асимптотическое решение, существующее при значениях функций $p(\tau)$, заключенных в этом интервале, следует искать решение «эталонного» уравнения в виде

$$y_{0,3} = A_3(\tau)\,\mathrm{dn}\,[K(\nu_3(\tau))\,\omega_3, \nu_3(\tau)] \tag{2.12}$$

Для функций $\nu_3(\tau)$, $\varphi_3(\tau)$ и $A_3(\tau)$ получаются следующие соотношения:

$$\frac{4N^2(\nu_3(\tau))}{(2-\nu_3(\tau))^3} = -p_1(\tau) \qquad \left(p_1(\tau) = \frac{G_1^2\,b^2(\tau)}{a^3(\tau)}\right) \tag{2.13}$$

$$\varphi_3(\tau) = \frac{1}{K(\nu_3(\tau))}\sqrt{\frac{-a(\tau)}{2-\nu_3(\tau)}}, \qquad A_3(\tau) = \pm\sqrt{\frac{-2a(\tau)}{b(\tau)\,[2-\nu_3(\tau)]}}$$

Здесь

$$N(\nu) = \nu^2\int\limits_0^{K(\nu)} \mathrm{cn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{d}u = -2\nu^2\frac{dL}{d\nu}$$

Выпишем выражение для функции $A_{3.0}(\tau)$, около которой происходят колебания, и для амплитуды колебания $A_{3.1}(\tau)$. Известно, что функция $\mathrm{dn}\,u$ колеблется между 1 и $\sqrt{1-\nu}$. В силу этого из (2.12) имеем

$$A_{3.0}(\tau) = A_3(\tau)\,\frac{1+\sqrt{1-\nu_3(\tau)}}{2}, \qquad A_{3.1}(\tau) = \left|A_3(\tau)\,\frac{1-\sqrt{1-\nu_3(\tau)}}{2}\right| \tag{2.14}$$

График для решения уравнения для функции $\nu_3(\tau)$ построен на фиг. 1. Из рассмотрения его следует, что для каждого значения функции $p_1(\tau)$, расположенного в интервале $-4/9 \leqslant p_1(\tau) \leqslant 0$, существуют два значения для $\nu_3(\tau)$: положительное и отрицательное. Можно доказать, что асимптотические решения, соответствующие этим значениям, совпадают.

Однако вследствие того, что в таблицах значения эллиптических функций даются при положительных значениях модуля, следует пользоваться асимптотическим решением, соответствующим $0 \leqslant \nu_3(\tau) \leqslant 1$.

При помощи асимптотического решения (2.12) асимптотические решения (2.3) и (2.10) могут быть продолжены в интервал значений t, при которых $-4/9 \leqslant p(\tau) \leqslant 0$, и, наоборот, асимптотическое решение (2.12) при помощи асимптотического решения (2.3) или (2.10) может быть продолжено в интервал значений t, при которых $-\infty < p_1(\tau) \leqslant -4/9$, $0 \leqslant p_1(\tau) < \infty$. Остановимся кратко на более сложном уравнении

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_0(\tau) + a_1(\tau)\,y + a_2(\tau)\,y^2 + a_3(\tau)\,y^3 = 0 \tag{2.15}$$

В этом случае решение «эталонного» уравнения следует искать в виде

$$y_0 = \frac{\alpha(\tau)\,\sigma(\tau,\omega) + \beta(\tau)}{\gamma(\tau)\,\sigma(\tau,\omega) + 1} \quad \text{или} \quad y_0 = \frac{\alpha(\tau)\,\sigma^2(\tau,\omega) + \beta(\tau)}{\gamma(\tau)\,\sigma^2(\tau,\omega) + 1}$$

Здесь под $\sigma(\tau,\omega)$ подразумевается любая из функций

$$\mathrm{sn}\,[K(\nu)\,\omega, \nu], \qquad \mathrm{cn}\,[K(\nu)\,\omega, \nu], \qquad \mathrm{dn}\,[K(\nu)\,\omega, \nu]$$

Особенно простые формулы могут быть получены в случае, когда $a_3(\tau) \equiv 0$. Решение «эталонного» уравнения в этом случае следует искать в форме $y_0 = \alpha(\tau)\,\sigma^2(\tau, \omega) + \beta(\tau)$.

В заключение настоящего параграфа отметим, что в случае, когда в уравнениях (2.1) и (2.15) имеется член $\varepsilon f(\tau, y)\, dy/dt$, асимптотические решения также могут быть выражены через эллиптические функции Якоби.

Исследование таких случаев сводится к исследованию одного дифференциального уравнения первого порядка (обычно для модуля ν), решение которого изменяется в $1/\varepsilon$ раз медленнее решения исходного уравнения и исследование которого обычно не вызывает серьезных трудностей.

§ 3. Приближенное вычисление асимптотических решений. В тех случаях, когда решение «эталонного» уравнения не может быть выражено через специальные функции, будем искать его в виде

$$y_0(\tau, \omega) = \sum_{n=0}^{N} B_n(\tau) \cos n\omega \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в уравнение (1.1), получим

$$-\varphi^2(\tau) \sum_{n=0}^{N} B_n(\tau)\, n^2 \cos n\omega + \sum_{n=0}^{\infty} F_n[\tau, B_0(\tau), \ldots, B_N(\tau)] \cos n\omega = 0$$

Здесь

$$F_n[\tau, B_0(\tau), \ldots, B_N(\tau)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F\left[\tau, \sum_{n=0}^{N} B_n(\tau)\cos n\omega\right] \cos n\omega\, d\omega \tag{3.2}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых гармониках и пренебрегая гармониками более высокого порядка, чем N, получим

$$-\varphi^2(\tau) B_n(\tau)\, n^2 + F_n[\tau, B_0(\tau), \ldots, B_N(\tau)] = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, N) \tag{3.3}$$

Эта система состоит из $N+1$ уравнения и содержит $N+2$ неизвестных: $\varphi(\tau), B_0(\tau), \ldots, B_N(\tau)$. Недостающее уравнение получается в результате подстановки (3.1) в условие периодичности (1.18):

$$\frac{d}{d\tau}\left[\varphi(\tau) \frac{1}{2}\pi \sum_{n=0}^{N} B_n^2(\tau)\, n^2\right] +$$
$$+ \varphi(\tau) \int_0^{\pi} f\left[\tau, \sum_{n=0}^{N} B_n(\tau)\cos n\omega\right] \left[\sum_{n=0}^{N} B_n(\tau)\, n \sin n\omega\right]^2 d\omega = 0 \tag{3.4}$$

При помощи системы уравнений (3.3) и (3.4) функции $\varphi(\tau)$, $B_0(\tau), \ldots$ $\ldots, B_n(\tau)$ могут быть выражены через известные функции.

Наибольший интерес представляет из-за простоты случай, когда $N = 1$. В этом случае система уравнений (3.3) и (3.4) содержит всего лишь три неизвестных: $\varphi(\tau)$, $B_0(\tau)$ и $B_1(\tau)$.

Для того чтобы проиллюстрировать эту методику и оценить ее точность в случае $N = 1$, вычислим приближенное асимптотическое решение уравнения (2.1) в случае $a(\tau) > 0$ и затем сравним его с точным асимптотическим решением. Система уравнений (3.3) и (3.4) имеет вид:

$$
\begin{gathered}
a(\tau) B_0(\tau) + b(\tau) B_0(\tau)\left[B_0^2(\tau) + \tfrac{3}{2} B_1^2(\tau)\right] = 0 \\
-\varphi^2(\tau) B_1(\tau) + a(\tau) B_1(\tau) + b(\tau) B_1(\tau)\left[3B_0^2(\tau) + \tfrac{3}{4} B_1^2(\tau)\right] = 0 \\
\varphi(\tau) B_1^2(\tau) = C
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Здесь C — произвольная постоянная. В рассматриваемом случае, когда $a(\tau) > 0$, колебания могут происходить только лишь относительно $y = 0$. Вследствие этого $B_0(\tau) \equiv 0$. С учетом этого система (3.5) принимает вид:

$$
-\varphi^2(\tau) + a(\tau) + \tfrac{3}{4} b(\tau) B_1^2(\tau) = 0, \qquad \varphi(\tau) B_1^2(\tau) = C \tag{3.6}
$$

Для того чтобы привести эту систему к более удобному виду, введем в рассмотрение функцию $\mu(\tau)$ при помощи равенства

$$
\varphi(\tau) = \sqrt{a(\tau)}\,\mu(\tau) \tag{3.7}
$$

Исключая функцию $B_1(\tau)$ и пользуясь (3.7), получим

$$
\mu^3(\tau) - \mu(\tau) - \tfrac{3}{4} q(\tau) = 0 \qquad q(\tau) = cb(\tau)\left[a(\tau)\right]^{-3/2} \tag{3.8}
$$

Физический смысл имеет положительное (см. § 1), действительное решение этого уравнения, стремящееся в силу (3.6) и (3.7) к единице, при $b(\tau)$, стремящемся к нулю. График для вычисления такого решения уравнения (3.8) изображен на фиг. 2. На этой фигуре видно, что решение для $\mu(\tau)$ существует лишь при $-{}^8/_9\sqrt{3} \leqslant q(\tau) < \infty$. В момент $t = t_1$, когда $q(\tau) = -{}^8/_9\sqrt{3}$, решение уравнения (2.1) теряет колебательный характер (в системе происходит потеря устойчивости).

После того как функция $\varphi(t)$ определена, амплитуда колебания $B_1(\tau)$ вычисляется при помощи второго из уравнений системы (3.6).

Сравним приближенные асимптотические формулы для мгновенного периода и амплитуды колебаний с точными асимптотическими формулами (см. § 2).

Рассмотрим сначала случай, когда $b(\tau) = 0$. Из (3.6) — (3.8) и (1.21) имеем

$$
T(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{a(\tau)}}, \qquad B_1(\tau) = \sqrt{\frac{C}{\sqrt{a(\tau)}}} \tag{3.9}
$$

Как показывает рассмотрение равенств (2.5) и (2.7), в этом случае точные асимптотические формулы совпадают с (3.9).

Рассмотрим далее случай, когда $b(\tau) < 0$ и $|b(\tau)|$ возрастает. В этом случае в системе возможна потеря устойчивости. Этот случай является наиболее тяжелым для приближенного метода при $N=1$, так как здесь влияние высших гармоник, которые при $N = 1$ не учитываются, должно быть наибольшим. Сравним приближенные и точные соотношения в момент потери устойчивости. Из графика на фиг. 2 и системы (3.6) имеем

$$
B_1(\tau) = \sqrt{\frac{8}{9}}\sqrt{-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}} \tag{3.10}
$$

Выражение для $B_1(\tau)$, полученное при помощи точного асимптотического решения (см. [9]), отличается от (3.10) лишь тем, что вместо коэффициента $\sqrt{8/9} = 0.943$ стоит коэффициент 1. Сравним условия устойчивости. Так же как и в [9], рассмотрим случай, когда

$$y = \alpha, \qquad dy/dt = 0, \qquad b(t) = 0 \qquad \text{при } t = 0$$

В этом случае в силу (3.1) и (3.6)

$$B_1(0) = \alpha, \qquad \varphi(0) = \sqrt{a(0)}, \qquad C = \alpha^2 \sqrt{a(0)}$$

Предположим для простоты, что

$$\min \frac{[a(\tau)]^{3/2}}{|b(\tau)|} = \frac{[\min a(\tau)]^{3/2}}{\max |b(\tau)|} \tag{3.11}$$

Условие устойчивости представляет собой неравенство

$$\frac{c\,|b(\tau)|}{a(\tau)^{3/2}} < \frac{8}{9\sqrt{3}}$$

Подставляя сюда выражение для C и пользуясь (3.11), перепишем это условие в виде

$$|\alpha| < \sqrt{\frac{8}{9\sqrt{3}}} \left(\sqrt{\frac{\min a(\tau)}{a(0)}} \frac{\min a(\tau)}{\max |b(\tau)|} \right)^{1/2} \tag{3.12}$$

Условие устойчивости, которое получается при помощи точного асимптотического решения [9], отличается от (3.12) лишь тем, что вместо коэффициента $\sqrt{8/9\sqrt{3}} = 0.716$ стоит коэффициент $\sqrt{4\sqrt{2}/3\pi} = 0.775$. Таким образом, приближенные асимптотические формулы по сравнению с точными асимптотическими формулами имеют ошибку порядка 10%.

Поступила 7 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР, 1955.
2. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Исследование продольной устойчивости аэроплана. Гос. авиац. и автотракт. изд-во, М.—Л., 1932.
3. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. УМН, т. VII, № 6, 1953.
4. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Математический сборник, № 22/64, 1949.
5. Кузмак Г. Е. К теории неавтономных квазилинейных систем со многими степенями свободы. Украинской матем. ж., т. X, № 2, 1958.
6. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Изд. АН УССР, 1955.
7. Волосов В. М. К вопросу о дифференциальных уравнениях с малым параметром при старшей производной, Докл. АН СССР, т. XXIII, № 5, 1950.
8. Волосов В. М. Дифференциальные уравнения движения, содержащие параметры медленности. Докл. АН СССР, т. 106, № 1, 1956.
9. Кузмак Г. Е. Асимптотическое решение одного нелинейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
10. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Изд-во АН СССР, 1941.