Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

О. И. Комарницкая

(Ленинград)

Существует много способов исследования устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Отправной точкой для многих работ в этой области послужили работы А. И. Лурье [3], применившего к уравнениям, описывающим движение нелинейных систем автоматического регулирования, специальное преобразование и указавшего способ построения для них функции Ляпунова. Метод Лурье сводит рассмотрение вопросов устойчивости положения равновесия систем автоматического регулирования к исследованию разрешимости алгебраической системы квадратных уравнений. Этот метод дает весьма широкие области устойчивости и удобен при небольшом числе уравнений. С ростом числа степеней свободы системы применение метода становится более сложным в связи с трудностью установления критериев разрешимости систем квадратных уравнений высокого порядка.

И. Г. Малкиным [2,4] предложен другой способ построения функции Ляпунова для уравнений, описывающих движение систем автоматического регулирования, в результате чего получаются более простые условия устойчивости.

Метод И. Г. Малкина заключается в следующем. Пусть движение системы автоматического регулирования с одним регулирующим органом описывается дифференциальными уравнениями, которые в канонических переменных имеют вид:

$$\dot{x} = \lambda x + f(\sigma)\, e \qquad \dot{\sigma} = \beta x - r f(\sigma) \tag{0.1}$$

где x, β, e — матрицы-столбцы порядка n, состоящие соответственно из элементов x_i, β_i, $e_i = 1$, $(i=1, \ldots, n)$, и λ — диагональная матрица с элементами λ_i. Скалярные величины, входящие в уравнения (0.1), имеют следующий смысл: β_i — постоянные, характеризующие систему, λ_i — корни характеристического уравнения, причем $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $r > 0$ — постоянная, называемая коэффициентом обратной связи, σ — параметр, определяющий положение регулирующего органа, $f(\sigma)$ — функция, удовлетворяющая условиям:

а) $f(\sigma)$ — непрерывна и такова, что при заданных начальных данных уравнения (0.1) имеют единственное решение;

б) $f(0) = 0$, $f(\sigma)\sigma > 0$ при $\sigma \neq 0$. Функция Ляпунова для системы берется в виде

$$V = \frac{1}{2} Axx + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma \tag{0.2}$$

где A — симметричная матрица определенно-положительной квадратичной формы — находится из условия

$$\theta = \frac{1}{2}(A\lambda + \lambda' A) \tag{0.3}$$

(λ' — матрица транспонирования с λ) и матрица θ — любая матрица определенно-отрицательной квадратичной формы.

Вычислив производную от V в силу (0.1) и учитывая выбор θ, получим условия асимптотической устойчивости положения равновесия для уравнений (0.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\theta & g \\ g' & r \end{vmatrix} > 0 \tag{0.4}$$

где матрица-столбец g находится по формуле $2g = -\beta - Ae$ (0.5)

И. Г. Малкин нигде не останавливается на том, как нужно подобрать матрицу θ, чтобы метод дал хорошие практические результаты; кроме того, он применил этот метод только для случая различных корней характеристического уравнения и для одного нулевого корня второй кратности, не простого относительно элементарных делителей. В настоящей работе дается вид матрицы θ, исследуются области устойчивости, а также метод М. Г. Малкина применяется в случае кратных нулевых корней, простых и не простых относительно элементарных делителей.

1. Рассмотрим пример, который покажет, как можно выбрать матрицу θ, и позволит в то же время сравнить результаты, полученные методом И. Г. Малкина, с результатами других методов.

Пусть нелинейная система автоматического регулирования описывается следующими уравнениями в канонической форме:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f(\sigma), \qquad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f(\sigma), \ \dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - rf(\sigma);$$

Все величины, входящие в уравнения, те же, что и в уравнениях (0.1), и $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ — вещественные. Выберем матрицу θ в виде

$$\theta = \begin{Vmatrix} -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{Vmatrix}$$

где ε_1 и ε_2 — любые положительные числа. Согласно общей теории симметричную матрицу A будем искать из условия (0.3). Тогда

$$a_{11} = -\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}, \qquad a_{12} = 0, \qquad a_{22} = -\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}, \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Пользуясь (0.5), составим матрицу-столбец g:

$$g = \begin{Vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} & -\frac{\beta_1}{2} \\ \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_2} & -\frac{\beta_2}{2} \end{Vmatrix}$$

Выпишем теперь определитель Δ и потребуем, чтобы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} - \frac{\beta_1}{2} \\ 0 & \varepsilon_2 & \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_2} - \frac{\beta_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} - \frac{\beta_1}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_2} - \frac{\beta_2}{2} & r \end{vmatrix} > 0$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} - \frac{\beta_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon_2}{2\lambda_2} - \frac{\beta_2}{2}\right)^2 < r \tag{1.1}$$

Это неравенство в прямоугольных координатах $^1/_2\beta_1$ и $^1/_2\beta_2$ определяет внутренность эллипса (по условию $r > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$), параметры которого зависят от ε_1 и ε_2. Введем обозначения

$$\frac{\beta_1}{2} = y, \qquad \frac{\beta_2}{2} = z, \qquad \frac{1}{2\lambda_1} = -y_*, \qquad \frac{1}{2\lambda_2} = -z_*$$

Тогда (1.1) примет вид:

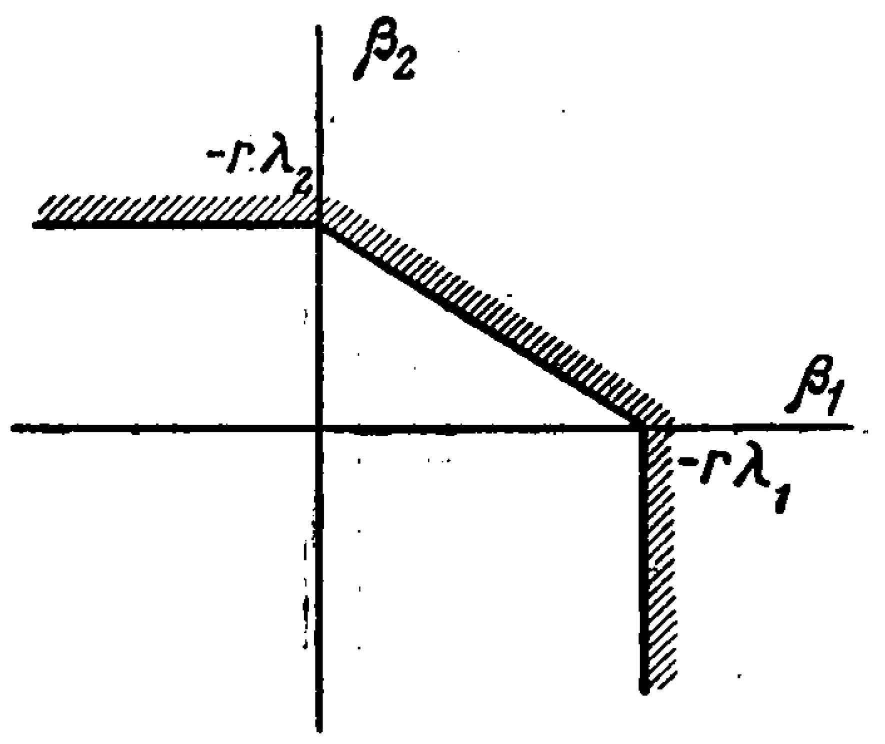
$$\varepsilon_1^{-1}(y + y_*\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^{-1}(z + z_*\varepsilon_2)^2 < r \tag{1.2}$$

Пользуясь произвольностью ε_1 и ε_2, установим максимальную для данного выбора θ область устойчивости.

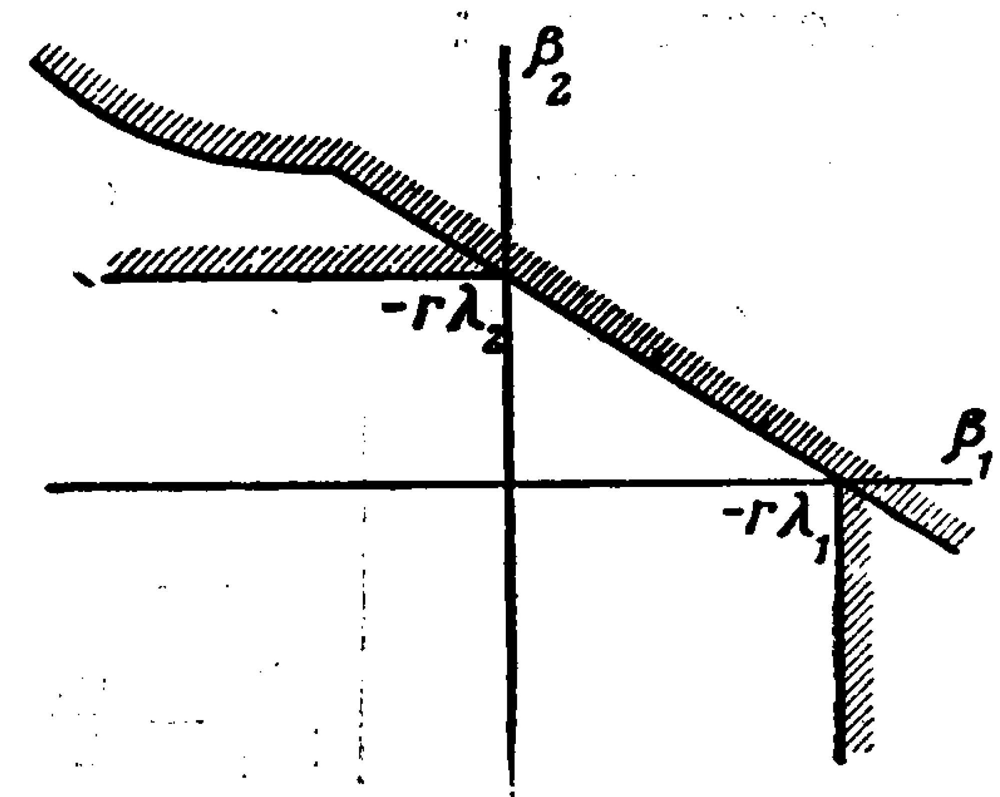
Пусть $y + y_*\varepsilon_1 = 0$ и $z + z_*\varepsilon_2 = 0$ (это всегда можно получить за счет подбора ε_1 и ε_2), при этом условие (1.2) будет выполнено. Отсюда

$y = -\varepsilon_1 y_*$, $z = -\varepsilon_2 z_*$, и так как y_*, z_*, ε_1 и ε_2 положительны, причем ε_1 и ε_2 произвольны, то y и z могут принимать любые отрицательные значения.

Теперь выясним, какие положительные значения допустимы для y и z. Для этого положим $y + y_*\varepsilon_1 = 0$, тогда $\varepsilon_2^{-1}(z + z_*\varepsilon_2)^2 < r$. Отсюда



Фиг. 1



Фиг. 2

$-\sqrt{r\varepsilon_2} - z_*\varepsilon_2 < z < \sqrt{r\varepsilon_2} - z_*\varepsilon_2$, при $\varepsilon_2 = r / 4z_*^2$ правая часть этого неравенства достигает максимума. Следовательно, (1.2) выполняется при $y < 0$ и $z < r / 4z_*$. Аналогично можно показать, что (1.2) выполняется при $z < 0$ и $y < r / 4y_*$. Остается выяснить, что будет при $y > 0$ и $z > 0$. Для этого введем число k $(0 \leqslant k \leqslant r)$ и положим $\varepsilon_1^{-1}(y + y_*\varepsilon_1)^2 < k$; тогда из (1.2) имеем $\varepsilon_2^{-1}(z + z_*\varepsilon_2)^2 < r - k$. Отсюда

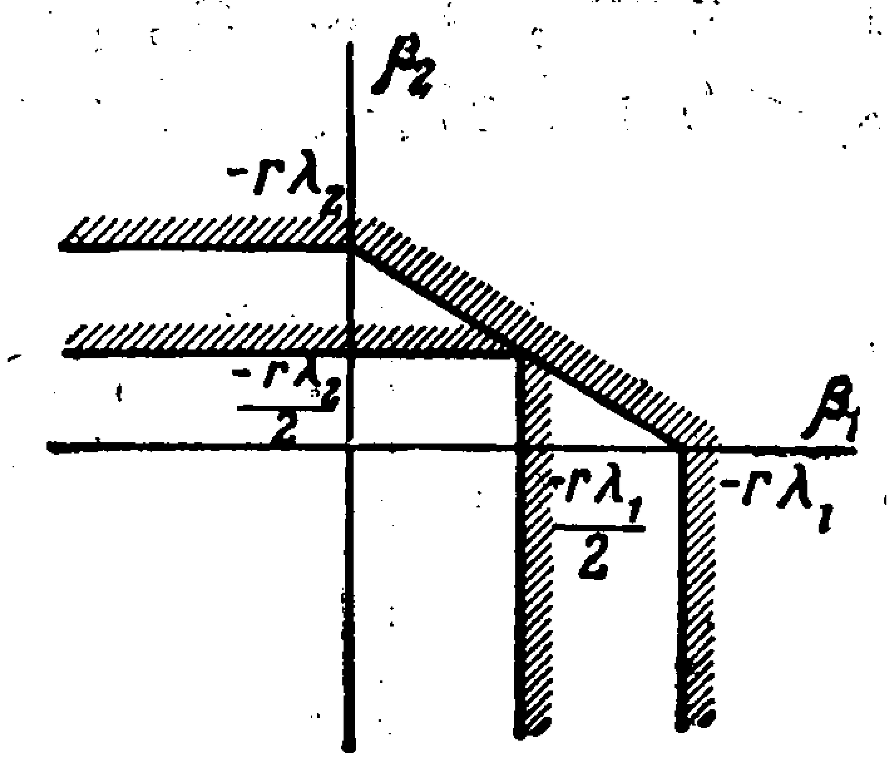
$$y < \frac{k}{4y_*}, \qquad z < \frac{r-k}{4z_*}$$

Исключив k, будем иметь границу для положительных значений y и z:

$$4y_*y + 4z_*z = r$$

Возвращаясь к исходным параметрам, получим следующие неравенства, определяющие область устойчивости системы:

$$\beta_1 < -r\lambda_1, \qquad \begin{cases} \beta_2 < -r\lambda_2 & (\beta_1 < 0) \\ \beta_2 < -r\lambda_2 - (\lambda_2 / \lambda_1)\,\beta_1 & (\beta_1 \geqslant 0) \end{cases}$$



Фиг. 3

Можно показать, что изменением матрицы θ область асимптотической устойчивости при данном методе построения функции Ляпунова расширить нельзя. На фиг. 1 показана область устойчивости. Сравним эту область с результатами, которые получаются для данного примера другими методами.

На фиг. 2 изображены границы областей, полученных данным методом и методом А. И. Лурье, а на фиг. 3 эта область сравнивается с областью, полученной в [5]. Очевидно, что полученная здесь область уже, чем область, полученная методом А. И. Лурье, но шире области Р. А. Спасского. Несмотря на то что другие методы дают более широкую область устойчивости, изложенный здесь метод имеет то преимущество, что рассуждения для $n = 2$ могут быть повторены и для любого n. Действительно, рассмотрим систему (0.1) и будем считать, что ее характеристическое уравнение имеет различные отрицательные вещественные корни.

Тогда, как и в рассмотренном примере, возьмем матрицу θ в виде

$$\theta = \begin{Vmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_n \end{Vmatrix}$$

где $\varepsilon_i > 0$ — любые. Пользуясь (0.3) и (0.5), найдем элементы матрицы A и матрицы-столбца g:

$$a_{ii} = -\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i}, \qquad a_{ik} = 0\,(i \neq k), \qquad g_i = \frac{\varepsilon_i}{2\lambda_i} - \frac{\beta_i}{2}$$

Выпишем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & \frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} - \frac{\beta_1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} - \frac{\beta_1}{2} & \frac{\varepsilon_2}{2\lambda_2} - \frac{\beta_2}{2} & \dots & r \end{vmatrix}$$

Из условия $\Delta > 0$ получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_1} - \frac{\beta_1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\frac{\varepsilon_n}{2\lambda_n} - \frac{\beta_n}{2}\right)^2 < r$$

После рассуждений, аналогичных проведенным в примере, получим неравенства, определяющие область устойчивости для уравнений (0.1)

$$\beta_i < -\lambda_i r, \qquad \begin{cases} \beta_k < -\lambda_k r & (\beta_i < 0) \\ \beta_k < -\lambda_k (r - S_k) & (\beta_i \geqslant 0) \end{cases} \qquad \left(S_k = \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right)$$

$$(k = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

Изложенное относится к случаю вещественных отрицательных корней.

2. Теперь предположим, что характеристическое уравнение системы (0.1) имеет, кроме вещественных отрицательных корней, комплексные сопряженные корни с отрицательной вещественной частью.

Пусть λ_i, x_i, β_i $(i = 1, \dots, 2s)$ — комплексные, попарно сопряженные величины, а λ_j, x_j, β_j $(j = 2s+1, \dots n)$ — вещественные величины, причем $\lambda_j < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Матрицу θ в этом случае выберем в такой форме:

$$\theta = \begin{Vmatrix} 0 & -\varepsilon_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon_{2s-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\varepsilon_{2s-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2\varepsilon_{2s+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -2\varepsilon_n \end{Vmatrix} \qquad (2.1)$$

где $\varepsilon_i > 0$ — любые. Функцию Ляпунова возьмем в прежней форме (0.2), а производная от нее в силу системы (0.1) будет

$$\dot{V} = \theta xx + (Ae + \beta)\,xf(\sigma) - rf^2(\sigma) \qquad (2.2)$$

Элементы матрицы A, найденные из (0.3), в данном случае будут

$$a_{ii} = 0 \quad (i = 1, \dots, 2s), \qquad a_{ii+1} = -\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, 2s-1)$$

$$a_{ii} = -\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i} \quad (i = 2s+1, \dots, n)$$

остальные $a_{ik} = 0$.

Перейдем в выражении (2.2) к вещественным переменным:

$$x_k = u_k + u_{k+1} i, \quad \beta_k = \gamma_k + \gamma_{k+1} i$$
$$x_{k+1} = u_k - u_{k+1} i, \quad \beta_{k+1} = \gamma_k - \gamma_{k+1} i \quad (k = 1, 3, \ldots, 2s-1)$$

В новых обозначениях производная (2.2) запишется так:

$$\dot{V} = -\sum_{k=1,3\ldots}^{2s-1}{}' \varepsilon_k (u_k^2 + u_{k+1}^2) - \sum_{k=2s+1}^{n} \varepsilon_k x_k^2 + \sum_{k=2s+1}^{n} \left(\beta_k - \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k}\right) x_k f(\sigma) +$$
$$+ 2 \sum_{k=1}^{s} \left[\left(\gamma_{2k-1} - \frac{\varepsilon_{2k-1}}{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}\right) u_{2k-1} + \gamma_{2k} u_{2k}\right] f(\sigma) - r f^2(\sigma)$$

Отсюда согласно (0,4) получим следующее условие асимптотической устойчивости:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_1^* \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_2^* \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \ldots & 0 & \gamma_3^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_n & \beta_n^* \\ \gamma_1^* & \gamma_2^* & \gamma_3^* & \ldots & \beta_n^* & r \end{vmatrix} > 0$$

Здесь

$$\gamma_1^* = \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \gamma_1, \quad \gamma_2^* = -\gamma_2,$$

$$\gamma_3^* = \frac{\varepsilon_3}{\lambda_3 + \lambda_4} - \gamma_3, \ldots, \quad \beta_n^* = \frac{\varepsilon_n}{2\lambda_n} - \frac{\beta_n}{2}$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \gamma_1\right)^2 + \frac{\gamma_2^2}{\varepsilon_1} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_{2s-1}}\left(\frac{\varepsilon_{2s-1}}{\lambda_{2s-1} + \lambda_{2s}} - \gamma_{2s-1}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\gamma_{2s}^2}{\varepsilon_{2s-1}} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\frac{\varepsilon_n}{2\lambda_n} - \frac{\beta_n}{2}\right)^2 < r$$

Отсюда, пользуясь произвольностью $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, легко получить условия, при выполнении которых система будет асимптотически устойчива:

$$\beta_i < -\frac{m_i \lambda_i}{2}, \quad \left\{\begin{array}{ll} \gamma_{j+1}^2 < l_j (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \gamma_j + \frac{1}{4} (\lambda_j + \lambda_{j+1})^2 l_j^2 & \\ & \beta_i < 0 \\ \gamma_{2k+2}^2 < \left(r - \sum\limits_j l_j\right)(\lambda_{2k+1} + \lambda_{2k+2}) \gamma_{2k+1} + & \\ \qquad + \frac{1}{4} (\lambda_{2k+1} + \lambda_{2k+2})^2 \left(r - \sum\limits_j l_j\right)^2 & \\ & \\ \gamma_{j+1}^2 < l_j (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \gamma_j + \frac{1}{4} (\lambda_j + \lambda_{j+1})^2 l_j^2 & \\ & \beta_i \geqslant 0 \\ \gamma_{2k+2}^2 < \left(r - \sum\limits_j l_j - \sum\limits_i m_i\right)(\lambda_{2k+1} + \lambda_{2k+2}) \gamma_{2k+1} + & \\ \qquad + \frac{1}{4} (\lambda_{2k+1} + \lambda_{2k+2})^2 \left(r - \sum\limits_j l_j - \sum\limits_i m_i\right)^2 & \end{array}\right.$$

$(i = 2s + 1, \ldots, n; \quad j = 1, 3, \ldots, 2k - 1, 2k + 3, \ldots, 2s - 1; \quad k = 1, \ldots, s - 1)$

Причем

$$l_j = -\frac{2}{\lambda_j+\lambda_{j+1}}(\gamma_j+\sqrt{\gamma_j^2+\gamma_{j+1}^2}), \qquad m_i = -\frac{2\beta_i}{\lambda_i}$$

положительные числа, для которых

$$\sum_i m_i + \sum_j l_j \leqslant r$$

Пример. Рассмотрим систему автоматического регулирования, которая описывается дифференциальными уравнениями, имеющими после приведения к каноническим переменным такой вид:

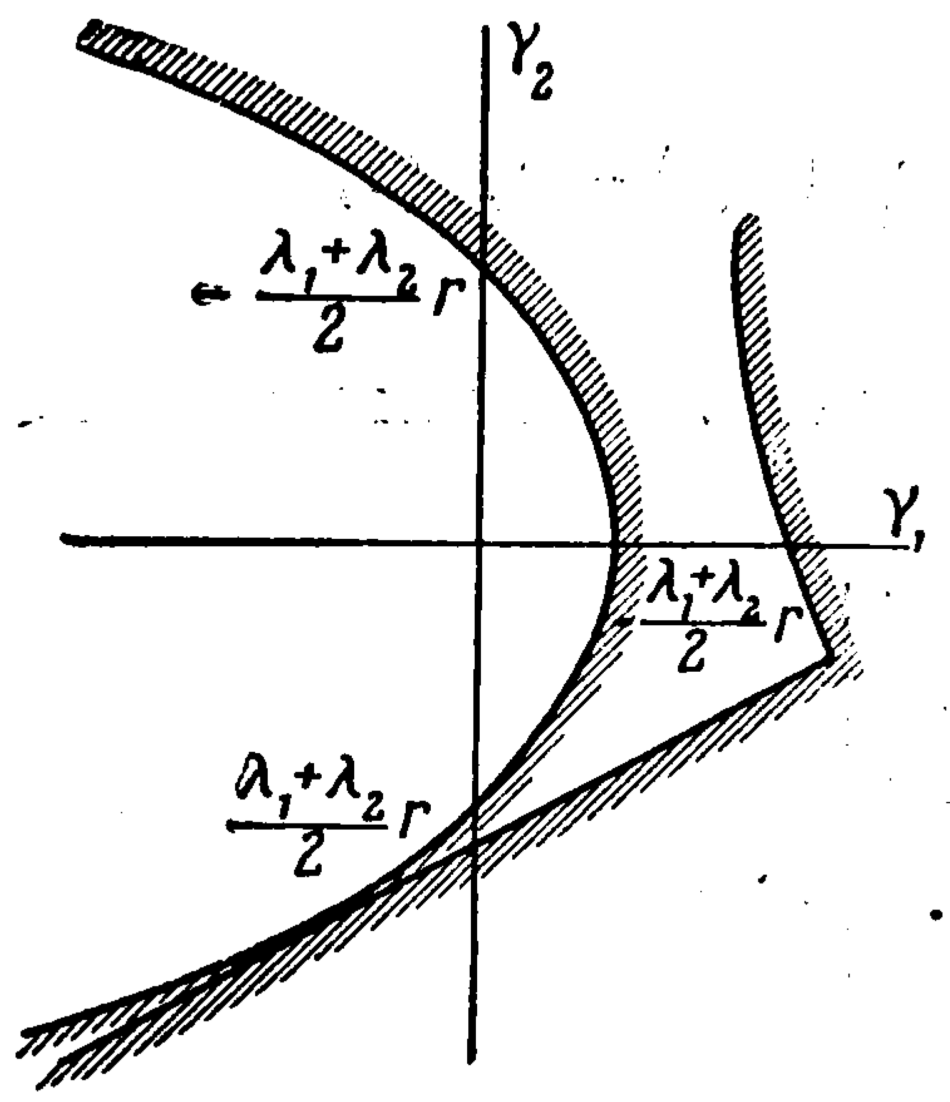
$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f(\sigma) \qquad \left(\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 i\right)$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f(\sigma) \qquad \left(\lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 i\right)$$

$$\sigma = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - rf(\sigma) \quad (\beta_1 = \gamma_1 + \gamma_2 i, \ \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2 i)$$

Здесь $\mu_1 < 0$, μ_2 и $\gamma_2 \neq 0$, относительно остальных величин сохраняются те же предположения, что и в общем случае.

Согласно выведенным формулам область устойчивости для данного примера определяется следующим неравенством:

$$\gamma_2^2 < r(\lambda_1+\lambda_2)\gamma_1 + \frac{1}{4}(\lambda_1+\lambda_2)^2 r^2$$



Фиг. 4

На фиг. 4 приведена область устойчивости, причем, как и в случае вещественных корней характеристического уравнения, область, полученная методом А. И. Лурье, шире области, которую дает этот метод, но зато последняя может быть записана при любом числе степеней свободы системы.

3. Рассмотрим теперь уравнения системы прямого автоматического регулирования с m регулирующими органами, характеристическое уравнение которой имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, причем $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ и корень $\lambda = 0$ кратности $2k$, которому отвечает k групп решений, т. е. корень $\lambda = 0$ повторяется k раз и каждый раз имеет вторую кратность относительно элементарных делителей.

В канонических переменных при данной структуре корней уравнения запишутся так:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \sum\limits_{s=1}^{m} \beta_{s1} f_s(\sigma_s) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + \sum\limits_{s=1}^{m} \beta_{sn} f_s(\sigma_s) \end{cases} \qquad \mathrm{II}\ \begin{cases} \dot{y}_1 = \sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_{s1} f_s(\sigma_s) \\ \dot{y}_2 = y_1 + \sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_{s2} f_s(\sigma_s) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_{2k} = y_{2k-1} + \sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_{s2k} f_s(\sigma_s) \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\sigma_s = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + q_{s1}y_1 + \cdots + q_{s2k}y_{2k}$$

Такая структура корней характеристического уравнения может быть, например, в том случае, когда в систему автоматического регулирования в качестве независимых элементов [1] входят тела, вращающиеся вокруг неподвижной оси под действием момента, создаваемого регулятором.

Единственность положения равновесия определяется следующими теоремами.

Теорема 1. Для единственности положения равновесия необходимо, чтобы число регулирующих органов было не меньше числа пар нулевых корней ($m \geqslant k$) (количества независимых элементов).

Теорема 2. Если число регулирующих органов не меньше числа пар нулевых корней ($m \geqslant k$), то для единственности положения равновесий достаточно, чтобы ранг матриц

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{m1} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{12k-1} & \gamma_{22k-1} & \cdots & \gamma_{m2k-1} \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} q_{12} & q_{14} & \cdots & q_{12k} \\ q_{22} & q_{24} & \cdots & q_{22k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m2} & q_{m4} & \cdots & q_{m2k} \end{Vmatrix}$$

был равен k.

Теорема 3. Если число регулирующих органов равно числу пар нулевых корней, то для единственности положения равновесия необходимо и достаточно, чтобы определители

$$\gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{k1} \\ \gamma_{13} & \gamma_{2k} & \cdots & \gamma_{k3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{12k-1} & \gamma_{22k-1} & \cdots & \gamma_{k2k-1} \end{vmatrix} \qquad q = \begin{vmatrix} q_{12} & q_{14} & \cdots & q_{12k} \\ q_{22} & q_{24} & \cdots & q_{22k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k2} & q_{k4} & \cdots & q_{k2k} \end{vmatrix}$$

были отличны от нуля.

Все три теоремы доказываются аналогично. Поэтому приведем доказательство только последней.

В положении равновесия $x_i = c_i$ и $y_j = d_j$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, 2k$), где c_i и d_j — некоторые постоянные. Подставим эти значения в (3.1).

Вторая (II) группа этих уравнений удовлетворяется при $\sigma_s = 0$ ($s = 1, \ldots, m$) и $d_1 = d_3 = \ldots = d_{2k-1} = 0$.

Первая (I) группа уравнений (3.1) удовлетворяется при $\sigma_s = 0$ и $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Учитывая это, будем иметь

$$q_{s2}d_2 + q_{s4}d_4 + \cdots + q_{s2k}d_{2k} = 0 \qquad (s=1, \ldots, m)$$

Если предположить, что определитель $q = 0$, то последняя система допускает ненулевое решение и, следовательно, положение равновесия не единственно. Аналогично доказывается, что $\gamma \neq 0$. Таким образом, усилия теоремы необходимы. Для доказательства достаточности учтем, что при $\gamma \neq 0$ нечетные уравнения (II) группы системы (3.1) при $x_i = c_i$, $y_j = d_j$ удовлетворяются только при $f_s(\sigma_s) = 0$. Подставим $f_s(\sigma_s) = 0$ в остальные уравнения системы (3.1) и получим, что $c_1 = \ldots = c_n = 0$, $d_1 = d_3 = \ldots = d_{2k-1} = 0$. Кроме того, из $f_s(\sigma_s) = 0$ следует, что все $\sigma_s = 0$, т. е. отсюда

$$q_{s2}d_2 + q_{s4}d_4 + \cdots + q_{s2k}d_{2k} = 0$$

Тогда из $q \neq 0$ следует $d_2 = d_4 = \ldots = d_{2k} = 0$, что доказывает достаточность.

Будем считать, что в уравнениях (3.1) число регулирующих органов равно числу пар нулевых корней и выполнены условия теоремы 3. Чтобы исследовать систему на устойчивость, запишем (3.1) в матричной форме:

$$\dot{x} = \lambda x + BF, \qquad \dot{y} = Jy + \Gamma F, \qquad \sigma = px + Qy \qquad (3.2)$$

Очевидно, что первое уравнение (3.2) записывает группу уравнений (3.1), а второе — (II).

Структура матриц, входящих в (3.2), ясна. Все они порядка наибольшего из чисел n и $2k$, а недостающие элементы дополнены нулями.

Построим для уравнений (3.2) функцию Ляпунова в форме

$$V = \frac{1}{2} Axx + \frac{1}{2} \Delta yy + \sum_{s=1}^{m} \int_0^{\sigma_s} f_s(\sigma_s)\, d\sigma_s$$

где симметричная матрица A находится из условия (0.3) при θ вида (2.1), а матрица

$$\Delta = \begin{Vmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (\delta_i > 0)$$

Легко видеть, что V — определенно-положительная форма переменных $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_{2k}$. В силу системы (3.2) имеем

$$\dot V = \theta x \cdot x + \frac{1}{2}[J'\Delta + \Delta J] y \cdot y + \frac{1}{2}[\Gamma'\Delta + QJ]\, y \cdot F +$$
$$+ \frac{1}{2}[B'A + P\lambda]\, x \cdot F + [PB + Q\Gamma]\, F \cdot F$$

Очевидно, что $J'\Delta + \Delta J \equiv 0$. Составим дискриминант квадратичной формы — $\dot V$

$$\begin{vmatrix} -\theta & -\frac{1}{4}[P\lambda + B'A] \\ -\frac{1}{4}[P\lambda + B'A] & -\frac{1}{2}[(PB + Q\Gamma) + (PB + Q\Gamma)'] \end{vmatrix} \qquad (3.3)$$

Потребуем, чтобы диагональные миноры этого определителя, начиная с $n+1$-го порядка, были больше нуля и, кроме того, чтобы

$$\Gamma'\Delta + QJ = 0 \qquad (3.4)$$

Последнее условие содержит $2k$ строгих равенств, но так как в матрицу Δ входит k произвольных $\delta_i > 0$, то равенств фактически только k.

При выполнении этих требований квадратичная форма

$$\dot V = \theta x \cdot x + \frac{1}{2}[B'A + P\lambda]\, x\ F + [PB + Q\Gamma]\, FF$$

определенно-отрицательна относительно переменных x и F, знакопостоянно-отрицательна относительно переменных x, y и F. Однако можно показать, что при выполнении (3.3) и (3.4) положение равновесия системы (3.2) асимптотически устойчиво. Для этого достаточно проверить, что интегральные кривые уравнений (3.2) пересекают все гиперповерхности $V = \mathrm{const}$ снаружи внутрь, т. е. что $\dot V$ всегда отрицательна либо, обратившись в какой-нибудь точке (отличной от начала координат) в нуль, в следующей точке снова становится отрицательной. Действительно, знакопостоянная форма $\dot V$ обращается в нуль на линии пересечения гиперплоскостей $\sigma_s = 0$ при $x = 0$.

Возьмем вначале на этой линии точку, для которой $x = 0$ и все $y_1 = y_3 = \ldots = y_{2k-1} = 0$. Тогда, подставив эти значения в систему $\sigma_s = 0$

$(s = 1, \ldots, m)$ при $q \neq 0$, получим, что остальные $y_2 = y_4 = \ldots = y_{2k} = 0$, т. е. в этом случае рассматриваемая точка является началом координат. Возьмем теперь на линии пересечения гиперплоскостей точку, для которой $x = 0$ и хотя бы одно $y_i \neq 0$ $(i = 1, 3, \ldots, 2k-1)$. В исследуемой точке

$$\dot{\sigma}_s = q_{s1}y_1 + q_{s3}y_3 + \cdots + q_{s2k-1}y_{2k-1} \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

Так как $q \neq 0$ и одно из $y_i \neq 0$, то хотя бы одно из $\dot{\sigma}_s(y_i) \neq 0$. Пусть $\dot{\sigma}_l(y_i) \neq 0$, тогда при возрастании t σ_l станет отличной от нуля, т. е. интегральная кривая сойдет с линии пересечения гиперплоскостей, и $\dot{V}$ сделается отрицательной; таким образом, интегральная кривая коснулась в точке гиперповерхности $V = \text{const}$, но после этого пересекает ее снаружи внутрь. Отсюда видно, что устойчивость положения равновесия (3.2) асимптотическая.

Пример. Рассмотрим дифференциальные уравнения движения нелинейной системы автоматического регулирования

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \gamma_{11}f_1(\sigma_1) + \gamma_{21}f_2(\sigma_2)\\
\dot{y}_2 &= y_1 + \gamma_{12}f_1(\sigma_1) + \gamma_{22}f_2(\sigma_2)\\
\dot{y}_3 &= \gamma_{13}f_1(\sigma_1) + \gamma_{23}f_2(\sigma_2)\\
\dot{y}_4 &= y_3 + \gamma_{14}f_1(\sigma_1) + \gamma_{24}f_2(\sigma_2)\\
\sigma_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3 + q_{14}y_4\\
\sigma_2 &= q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + q_{23}y_3 + q_{24}y_4
\end{aligned}$$

Будем считать, что положение равновесия у рассматриваемой системы единственно и для нее выполнены требования теоремы 3, т. е.

$$\begin{vmatrix} q_{12} & q_{14} \\ q_{22} & q_{24} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} \end{vmatrix} \neq 0$$

Для рассматриваемой системы согласно полученным результатам условия асимптотической устойчивости запишутся так:

$$\sum_{k=1}^{4} q_{1k}\gamma_{1k} < 0, \qquad \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{4} q_{1k}\gamma_{1k} & \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{4}(q_{1k}\gamma_{2k} + q_{2k}\gamma_{1k}) \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{4}(q_{1k}\gamma_{2k} + q_{2k}\gamma_{1k}) & \sum\limits_{k=1}^{4} q_{2k}\gamma_{2k} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}q_{12} < 0, \qquad \gamma_{13}q_{14} < 0, \qquad q_{24}\gamma_{13} - q_{14}\gamma_{23} = 0\\
&\gamma_{21}q_{22} < 0, \qquad \gamma_{23}q_{24} < 0, \qquad q_{12}\gamma_{21} - \gamma_{11}q_{22} = 0
\end{aligned}$$

Первые два неравенства получаются из условия (3.3), а остальные из (3.4) после исключения $\delta_i > 0$.

4. Рассмотрим теперь уравнение системы прямого автоматического регулирования с m регулирующими органами, характеристическое уравнение которых имеет n различных корней $\lambda_i\ (i = 1, \ldots, n)$, причем $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ и корень $\lambda = 0$ кратности m — простой относительно элементарных делителей

$$\dot{x} = \lambda x + BF, \qquad \dot{y} = \Gamma F, \qquad \sigma = px + Qy \tag{4.1}$$

Матрицы, входящие в уравнения (4.1), все порядка наибольшего из чисел n и m, структура их очевидна.

Считаем, что в уравнениях (4.1) число регулирующих органов равно числу нулевых корней и для (4.1) выполнены условия единственности положения равновесия [5], т. е. $|\Gamma| \neq 0$, $|Q| \neq 0$. Применив к системе (4.1) изложенный метод построения функции Ляпунова, удается упростить критерии устойчивости, полученные для аналогичных систем в [5].

Возьмем функцию Ляпунова для (4.1) в виде

$$V = \frac{1}{2} Axx + \sum_{s=1}^{m} \int_0^{\sigma_s} f_s(\sigma_s)\, d\sigma_s$$

где A находится из условия (0.3); квадратичная форма, V — определенно-положительная, так как $|Q| \neq 0$.

Дифференцируем V в силу уравнений (4.1):

$$\dot{V} = \theta xx + [PB + Q\Gamma] FF + [B'A + P\lambda] xF$$

Введем обозначение $PB + Q\Gamma = -R$ и составим дискриминант последней квадратичной формы—$\dot{V}$:

$$\begin{vmatrix} -\theta & -\frac{1}{2}[B'A + P\lambda] \\ -\frac{1}{2}[B'A + P\lambda] & \frac{1}{2}[R + R'] \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

Для асимптотической устойчивости положения равновесия достаточно потребовать, чтобы диагональные миноры определителя (4.2), начиная с $n + 1$-го порядка, были больше нуля.

В качестве условий асимптотической устойчивости таким образом получаются неравенства, которым подчинены параметры системы. В [5] для этого случая среди условий устойчивости есть строгие равенства, что в приложениях нежелательно.

Пример. Рассмотрим уравнения движения системы автоматического регулирования

$$\dot{y}_1 = \gamma_{11} f_1(\sigma_1) + \gamma_{21} f_2(\sigma_2), \qquad \sigma_1 = q_{11} y_1 + q_{12} y_2$$
$$\dot{y}_2 = \gamma_{12} f_1(\sigma_1) + \gamma_{22} f_2(\sigma_2), \qquad \sigma_2 = q_{21} y_1 + q_{22} y_2$$

Характеристическое уравнение рассматриваемой системы имеет нулевой корень второй кратности.

Условия асимптотической устойчивости в данном случае запишутся так:

$$q_{11}\gamma_{11} + q_{12}\gamma_{12} < 0$$

$$\begin{vmatrix} q_{11}\gamma_{11} + q_{12}\gamma_{12} & q_{11}\gamma_{21} + q_{12}\gamma_{22} \\ q_{21}\gamma_{11} + q_{22}\gamma_{12} & q_{21}\gamma_{21} + q_{22}\gamma_{22} \end{vmatrix} > 0$$

Эти условия проще и шире условий, полученных в [5].

Поступила 29 X 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Вознесенский Н. И. К вопросу о выборе схемы регулирования теплофикационных турбин. Тр. Ленинградского политехнического ин-та, № 2, 1948.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Гостехиздат, 1955.
3. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
4. Малкин И. Г. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 1, 1951.
5. Спасский Р. А. Об одном классе регулируемых систем. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.