Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЛИПСОИДОВ МАКЛОРЕНА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В. В. Румянцев

(Москва)

Движение жидкости под действием сил взаимного притяжения ее частиц по закону Ньютона в случае, когда перемещения выражаются линейными функциями координат, впервые было исследовано Дирихле. Он показал, что при известных начальных условиях жидкость может двигаться таким образом, что ее свободная поверхность во время движения остается поверхностью эллипсоида, оси которого с течением времени изменяют, вообще говоря, свои величины и направления. Эти исследования были продолжены Дедекиндом, Риманом, В. А. Стекловым и рядом других авторов (библиографию см. в книге [1]). Было показано, в частности, что при этом возможны вращения всей жидкости как одного твердого тела вокруг наименьшей из осей трехосного эллипсоида (эллипсоид Якоби) или полярной оси сжатого эллипсоида (эллипсоид Маклорена), существование которых в общем случае было установлено значительно раньше опубликования работы Дирихле (1860 г.).

Вопрос об устойчивости эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся жидкости привлекал к себе пристальное внимание многих ученых, начиная с Лиувилля и Римана.

Риман [2] исследовал устойчивость эллипсоидов Маклорена и Якоби по отношению к начальным перемещениям и скоростям, удовлетворяющим предположениям Дирихле. Заметив аналогию между дифференциальными уравнениями, определяющими при некоторых дополнительных частных предположениях полуоси жидкого эллипсоида как функции времени, и дифференциальными уравнениями движения материальной точки по некоторой поверхности под действием сил, обладающих силовой функцией, Риман в качестве критерия устойчивости фигур равновесия использует теорему Лагранжа о минимуме этой силовой функции. Таким образом он установил, что эллипсоиды Якоби всегда устойчивы, а эллипсоиды Маклорена устойчивы или неустойчивы, смотря по тому, менее или более 0,9528... их эксцентрицитеты. При этом, как нетрудно видеть, под устойчивостью у Римана надлежит понимать устойчивость по отношению к длинам полуосей жидкого эллипсоида и скоростям их изменения в предположениях, помимо условия Дирихле, что в возмущенном движении момент количества движения и интенсивность вихря имеют те же значения, что и для фигуры равновесия.

Томсон и Тэт в своем трактате [3] указывают (без доказательства), что все планетарные эллипсоиды вращения устойчивы, если жидкость все время остается эллипсоидом вращения. Если же поставлено условие, чтобы жидкость всегда сохраняла форму эллипсоида, то эллипсоиды Маклорена устойчивы или неустойчивы, смотря по тому, менее или более 0,8126 . . . их эксцентриситеты, а трехосные эллипсоиды всегда устойчивы.

Строгое определение устойчивости фигуры равновесия жидкости как устойчивости ее формы, впервые дано А. М. Ляпуновым [4]; доказанная им теорема, представляющая собой по существу обобщение теоремы Рауса, дает достаточное условие устойчивости формы равновесия при данном моменте количеств движения жидкости.

Применяя свой критерий, Ляпунов доказал, что эллипсоиды вращения устойчивы, пока их эксцентрицитеты остаются меньшими 0,8126 . . ., а трехосные эллипсоиды устойчивы в некоторых тесных пределах; эллипсоид вращения Якоби устойчив. Для частного случая, когда поверхность жидкости остается эллипсоидальной, верхний предел эксцентрицитетов устойчивых эллипсоидов Маклорена остается тем же самым, что и в общем случае, а эллипсоиды Якоби при этом всегда устойчивы.

Таким образом, если ограничиться случаем эллипсоидальных возмущений, то выводы Римана, Томсона и Тэта и Ляпунова относительно устойчивости эллипсоидов Якоби совпадают, а относительно устойчивости эллипсоидов Маклорена отличаются.

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли рассмотреть задачу об устойчивости эллипсоидов Маклорена с какой-либо другой точки зрения, отличной от изложенных, и каковы будут результаты? Особенно заманчиво попытаться решить эту задачу об устойчивости в смысле и методами теории устойчивости по Ляпунову для систем с конечным числом степеней свободы.

Ниже дается решение этой задачи при условии, что начальные возмущения удовлетворяют предположениям Дирихле.

1. Рассмотрим идеальную однородную несжимаемую жидкость, частицы которой притягиваются одна к другой по закону Ньютона, а давление на ее свободной поверхности остается постоянным. При указанных условиях центр масс жидкости движется равномерно и прямолинейно; без ограничения общности будем считать его неподвижным. Эту точку примем за начало двух прямоугольных систем координат: неподвижной $Ox_1y_1z_1$ и подвижной $Oxyz$, движущейся вместе с жидкостью вокруг ее центра масс. Проекции на оси x, y, z мгновенной угловой скорости ω подвижной системы координат относительно неподвижной обозначим через p, q, r.

Уравнения в форме Эйлера движения жидкости запишем в подвижных осях:

$$\begin{gathered}
\frac{dv_x}{dt}+qv_z-rv_y=-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x}\\
\frac{dv_y}{dt}+rv_x-pv_z=-\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y}\\
\frac{dv_z}{dt}+pv_y-qv_x=-\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z}\\
\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь v_x, v_y, v_z обозначают проекции на подвижные оси вектора $\mathbf{v}$ скорости жидкости в ее движении относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, ρ — плотность жидкости, p_1 — гидродинамическое давление, U — потенциал притяжения.

Ограничимся рассмотрением только таких движений жидкости, при которых ее свободная поверхность остается все время эллипсоидом [2,5]

$$F(x,y,z,t)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{1.2}$$

с переменными осями $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, и предположим, что

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\omega_2 z-\omega_3 y,\qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\omega_3 x-\omega_1 z,\qquad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\omega_1 y-\omega_2 x \tag{1.3}$$

Здесь ω_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ — функции только времени t, а $\varphi(x,y,z,t)$ — гармоническая функция координат в области τ, ограниченной поверхностью (1.2).

Граничное условие для функции $\varphi(x, y, z, t)$ получим из кинематического условия для свободной поверхности

$$\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

где u, v, w обозначают проекции скорости жидкости относительно системы координат $Oxyz$ на оси последней. Это условие с учетом уравнений (1.3) принимает на поверхности (1.2) вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{x}{a^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{y}{b^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{z}{c^2} &= \frac{x^2}{a^3}a' + \frac{y^2}{b^3}b' + \frac{z^2}{c^3}c' + \\ &+ (\omega_1 - p)\frac{c^2 - b^2}{b^2c^2}yz + (\omega_2 - q)\frac{a^2 - c^2}{a^2c^2}xz + (\omega_3 - r)\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}xy \qquad (1.4)\end{aligned}$$

где для сокращения введены обозначения

$$a' = \frac{da}{dt}, \qquad b' = \frac{db}{dt}, \qquad c' = \frac{dc}{dt}$$

Легко видеть, что гармоническая функция

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}x^2 + \frac{b'}{b}y^2 + \frac{c'}{c}z^2\right) + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}(p - \omega_1)yz + \\ &+ \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}(q - \omega_2)xz + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(r - \omega_3)xy \qquad (1.5)\end{aligned}$$

удовлетворяет условию (1.4); при этом $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 0 \qquad (1.6)$$

являющемуся следствием уравнения несжимаемости.

С учетом (1.5) равенства (1.3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{a'}{a}x + \frac{(a^2 - b^2)r - 2a^2\omega_3}{a^2 + b^2}y + \frac{(c^2 - a^2)q + 2a^2\omega_2}{a^2 + c^2}z \\ v_y &= \frac{b'}{b}y + \frac{(b^2 - c^2)p - 2b^2\omega_1}{b^2 + c^2}z + \frac{(a^2 - b^2)r + 2b^2\omega_3}{a^2 + b^2}x \qquad (1.7) \\ v_z &= \frac{c'}{c}z + \frac{(c^2 - a^2)q - 2c^2\omega_2}{c^2 + a^2}x + \frac{(b^2 - c^2)p + 2c^2\omega_1}{c^2 + b^2}y\end{aligned}$$

Для определения функций $\omega_i(t)$ воспользуемся уравнением Гельмгольца для вихря

$$\frac{d\Omega}{dt} + \omega \times \Omega = (\Omega\nabla)\mathbf{v}$$

где $\Omega = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ в рассматриваемом случае имеет следующие проекции на подвижные оси:

$$\Omega_x = 2\omega_1, \qquad \Omega_y = 2\omega_2, \qquad \Omega_z = 2\omega_3$$

Учитывая формулы (1.7), уравнения Гельмгольца в подвижных осях запишем в виде (1.8)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\omega_1}{a} - \frac{2a}{a^2 + b^2}r\omega_2 + \frac{2a}{a^2 + c^2}q\omega_3 + \frac{2a(c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)}\omega_2\omega_3 = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\omega_2}{b} - \frac{2b}{b^2 + c^2}p\omega_3 + \frac{2b}{a^2 + b^2}r\omega_1 + \frac{2b(a^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}\omega_3\omega_1 = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\omega_3}{c} - \frac{2c}{c^2 + a^2}q\omega_1 + \frac{2c}{b^2 + c^2}p\omega_2 + \frac{2c(b^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}\omega_1\omega_2 = 0\end{aligned}$$

Для составления дифференциальных уравнений для $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ воспользуемся теоремой о моменте количеств движения системы, согласно которой будем иметь

$$\frac{dG_x}{dt} + qG_z - rG_y = 0, \quad \frac{dG_y}{dt} + rG_x - pG_z = 0 \quad \frac{dG_z}{dt} + pG_y - qG_x = 0 \tag{1.9}$$

Здесь G_x, G_y, G_z обозначают проекции на оси координат x, y, z момента количеств движения жидкой массы относительно точки O.

Учитывая равенства (1.7), легко найдем

$$G_x = A_1 p + A_2 \omega_1, \qquad G_y = B_1 q + B_2 \omega_2, \qquad G_z = C_1 r + C_2 \omega_3 \tag{1.10}$$

где для сокращения введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{M}{5}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}, & B_1 &= \frac{M}{5}\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2}, & C_1 &= \frac{M}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \\ A_2 &= \frac{4M}{5}\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}, & B_2 &= \frac{4M}{5}\frac{c^2a^2}{c^2+a^2}, & C_2 &= \frac{4M}{5}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

причем $M = {}^4/_3\, \pi\rho abc$ — масса жидкости.

Составим, наконец, дифференциальные уравнения для $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Легко видеть [5], что в рассматриваемом случае потенциал притяжения для внутренних точек

$$U = \tfrac{1}{2} f(Px^2 + Qy^2 + Rz^2) - fH$$

где

$$H = \frac{3}{4}M\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \qquad \varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$

$$P = -\frac{2}{a}\frac{\partial H}{\partial a}, \qquad Q = -\frac{2}{b}\frac{\partial H}{\partial b}, \qquad R = -\frac{2}{c}\frac{\partial H}{\partial c} \tag{1.12}$$

f — постоянная притяжения; без уменьшения общности будем далее считать $f = 1$.

Подставляя в уравнения (1.1) вместо v_x, v_y, v_z правые части равенств (1.7) и принимая во внимание уравнения (1.8) и (1.9), а также (1.12), получаем

$$(P + w_x)x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad (Q + w_y)y + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0 \quad (R + w_y)z + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \tag{1.13}$$

где w_x, w_y, w_z — величины, не зависящие от координат частиц жидкости:

$$\begin{aligned} w_x = {} & \frac{a''}{a} - \frac{a^2-c^2}{(a^2+c^2)^2}(a^2+3c^2)q^2 - \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}(a^2+3b^2)r^2 + \\ & + \frac{4(a^2-c^2)c^2}{(a^2+c^2)^2}q\omega_2 + \frac{4(a^2-b^2)b^2}{(a^2+b^2)^2}r\omega_3 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}{\omega_3}^2 - \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}{\omega_2}^2 \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} w_y = {} & \frac{b''}{b} - \frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}(b^2+3a^2)r^2 - \frac{b^2-c^2}{(b^2+c^2)^2}(b^2+3c^2)p^2 + \\ & + \frac{4(b^2-a^2)a^2}{(a^2+b^2)^2}r\omega_3 + \frac{4(b^2-c^2)c^2}{(b^2+c^2)^2}p\omega_1 - \frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}{\omega_1}^2 - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}{\omega_3}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_z = {} & \frac{c''}{c} - \frac{c^2-b^2}{(c^2+b^2)^2}(c^2+3b^2)p^2 - \frac{c^2-a^2}{(c^2+a^2)^2}(c^2+3a^2)q^2 + \frac{4(c^2-b^2)b^2}{(c^2+b^2)^2}p\omega_1 + \\ & + \frac{4(c^2-a^2)a^2}{(c^2+a^2)^2}q\omega_2 - \frac{4c^2a^2}{(c^2+a^2)^2}{\omega_2}^2 - \frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}{\omega_1}^2 \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (1.13), находим

$$\frac{1}{2}\left[(P+w_x)x^2+(Q+w_y)y^2+(R+w_z)z^2\right]+\frac{p_1-p_0}{\rho}=\sigma(t)$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция времени.

Но на свободной поверхности жидкости давление p_0 по условию постоянно, поэтому, для того чтобы эта поверхность имела форму эллипсоида (1.2), необходимо и достаточно совпадение ее с поверхностью постоянного давления. Следовательно, функция $\sigma(t)$ должна быть определена таким образом, чтобы поверхность постоянного давления совпала с поверхностью (1.2). Приравнивая коэффициенты, получаем

$$(P+w_x)a^2=(Q+w_y)b^2=(R+w_z)c^2=2\sigma(t) \tag{1.15}$$

При этом гидродинамическое давление будет определяться формулой

$$\frac{p_1-p_0}{\rho}=\sigma(t)\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right) \tag{1.16}$$

Отсюда следует, что функция $\sigma(t)$ не должна принимать отрицательные значения.

Из соотношений (1.15) находим уравнения для $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$:

$$w_x=\frac{2\sigma}{a^2}-P, \qquad w_y=\frac{2\sigma}{b^2}-Q, \qquad w_z=\frac{2\sigma}{c^2}-R \tag{1.17}$$

в левые части которых вместо w_x, w_y, w_z надлежит подставить выражения этих величин согласно (1.14).

Таким образом, задача изучения движения жидкой массы, имеющей форму эллипсоида (1.2) с переменными осями, приводится к исследованию системы десяти уравнений (1.17), (1.6), (1.8) и (1.9) с таким же числом неизвестных a, b, c, ω_1, ω_2, ω_3, p, q, r, σ.

Эта система уравнений допускает ряд первых интегралов.

Умножим уравнения (1.17) на $a'a$, $b'b$, $c'c$ соответственно и сложим их, результат умножим на $^1/_5\, \rho d\tau$ и проинтегрируем по всему объему жидкости; полученное уравнение сложим с суммой произведений уравнений (1.9) на p, q, r соответственно, откуда с учетом уравнений (1.6) и (1.8) получим интеграл энергии

$$\frac{M}{10}(a'^2+b'^2+c'^2)+\frac{1}{2}(A_1p^2+B_1q^2+C_1r^2+A_2\omega_1{}^2+B_2\omega_2{}^2+C_2\omega_3{}^2)+$$
$$+W=\text{const} \tag{1.18}$$

где потенциальная энергия системы

$$W=\frac{1}{2}\rho\int\limits_\tau U d\tau=-\frac{2}{5}MH$$

Умножая уравнения (1.9) на G_x, G_y, G_z соответственно и складывая, получаем уравнение, из которого немедленно следует интеграл постоянства момента количеств движения системы

$$(A_1p+A_2\omega_1)^2+(B_1q+B_2\omega_2)^2+(C_1r+C_2\omega_3)^2=\text{const} \tag{1.19}$$

Умножим теперь уравнения (1.8) на ω_1/a, ω_2/b ω_3/c соответственно и сложим, легко получим интеграл постоянства интенсивности вихря

$$\left(\frac{\omega_1}{a}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega_3}{c}\right)^2=\text{const} \tag{1.20}$$

Наконец, умножая уравнение (1.6) на abc, получаем интеграл постоянства массы жидкости

$$abc = \mathrm{const} \tag{1.21}$$

2. Система уравнений движения жидкой массы допускает частное решение

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0, \quad a' = b' = c' = 0$$
$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \sigma = \sigma_0 \tag{2.1}$$

описывающее равномерное вращение всей жидкости как одного твердого тела вокруг оси Oz с угловой скоростью ω. Постоянные a_0, b_0, c_0, ω, σ_0 должны при этом удовлетворять уравнениям (1.17), принимающим вид:

$$-\omega^2 = \frac{2\sigma_0}{a_0^2} - P, \qquad -\omega^2 = \frac{2\sigma_0}{b_0^2} - Q, \qquad 0 = \frac{2\sigma_0}{c_0^2} - R$$

Отсюда получаем

$$(P - \omega^2) a_0^2 = (Q - \omega^2) b_0^2 = R c_0^2 \tag{2.2}$$

Исследование этих уравнений приводит, как известно [6], к следующим выводам: существуют фигуры равновесия вращающейся жидкости, имеющие форму эллипсоидов вращения (эллипсоиды Маклорена), когда $a_0 = b_0 > c_0$, и трехосных эллипсоидов (эллипсоиды Якоби), когда ось c является наименьшей осью эллипсоида (1.2).

Каждому значению ω, если $0 < {}^1/_2\ \omega^2/\pi f\rho < 0.225\ldots$, отвечают два эллипсоида Маклорена, отличающиеся один от другого сжатиями. При ${}^1/_2\omega^2/\pi f\rho = 0.225\ldots$ оба эллипсоида вращения совпадают, превращаясь в один предельный эллипсоид Маклорена. При ${}^1/_2\omega^2/\pi f\rho > 0.225\ \ldots$ эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся жидкости не существует.

В случае трехосных эллипсоидов каждому значению ω, если $0 < {}^1/_2\omega^2/\pi f\rho < 0.1871$, соответствуют два одинаковых эллипсоида Якоби, в которых лишь переставлены оси x и y. При ${}^1/_2\ \omega^2/\pi f\rho = 0.1871$ оси a_0 и b_0 становятся равными и эллипсоид Якоби превращается в эллипсоид вращения E, который одновременно является и эллипсоидом Маклорена. При ${}^1/_2\omega^2/\pi f\rho > 0{,}1871$ трехосные эллипсоиды равновесия вращающейся жидкости не существуют.

Эллипсоид E, принадлежа одновременно двум сериям фигур равновевесия, является эллипсоидом бифуркации.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости эллипсоидов Маклорена, ограничиваясь рассмотрением лишь возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле, при которых свободная поверхность жидкости остается эллипсоидом (1.2).

Такие возмущения естественно назвать эллипсоидальными [5]; при сообщении их фигуре равновесия последующее движение жидкости будет описываться уравнениями (1.17), (1.6), (1.8) и (1.9).

Под устойчивостью фигур равновесия будем понимать устойчивость в смысле Ляпунова по отношению к переменным a, b, c, a', b', c', ω_1, ω_2, ω_3, p, q, r.

Итак, положим $a_0 = b_0$ и примем за невозмущенное движение частное решение (2.1) уравнений движения. В возмущенном движении положим

$$a = a_0 + \alpha, \quad b = a_0 + \beta, \quad c = c_0 + \gamma, \quad r = \omega + \xi, \quad \omega_3 = \omega + \eta$$

а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Подставляя эти величины в уравнения (1.17) (1.6), (1.8), (1.9), получим систему уравнений возмущенного движения; последнюю явно выписывать не будем. Очевидно, что точные уравнения возмущенного движения допускают следующие первые интегралы, соответствующие интегралам (1.18)—(1.21):

$$\begin{aligned} V_1 = {} & A_{10}(p^2+q^2) + A_{20}(\omega_1^2+\omega_2^2) + C_{20}\eta^2 + 2C_{20}\omega\eta\left(1+\frac{\alpha+\beta}{a_0}\right) + \\ & + \frac{M}{5}\{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+2\omega^2 a_0(\alpha+\beta)+\omega^2(\alpha^2+\beta^2)+2P_0a_0(\alpha+\beta) + \\ & + 2R_0c_0\gamma\} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\right)_0\alpha^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial b^2}\right)_0\beta^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}\right)_0\gamma^2 + 2\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial b\,\partial c}\right)_0\beta\gamma + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}\right)_0\gamma\alpha + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}\right)_0\alpha\beta\right] + \ldots = \mathrm{const} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 = {} & A_{10}^2(p^2+q^2) + 2A_{10}A_{20}(p\omega_1+q\omega_2) + A_{20}^2(\omega_1^2+\omega_2^2) + C_{20}^2\eta^2 + \\ & + \frac{4M}{5}C_0\omega^2[a_0(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta] + 2C_{20}\omega\eta\left(C_0+2C_0\frac{\alpha+\beta}{a_0}\right) + \ldots = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$V_3 = \frac{\omega_1^2}{a_0^2} + \frac{\omega_2^2}{a_0^2} + \frac{2\omega}{c_0^2}\eta - \frac{2\omega^2}{c_0^3}\gamma + \frac{\eta^2}{c_0^2} + \frac{3\omega^2}{c_0^4}\gamma^2 - \frac{4\omega}{c_0^3}\eta\gamma + \ldots = \mathrm{const}$$

$$V_4 = a_0c_0(\alpha+\beta) + a_0^2\gamma + a_0\gamma(\alpha+\beta) + c_0\alpha\beta + \alpha\beta\gamma = 0$$

Многоточия здесь и ниже обозначают невыписанные члены, порядок которых выше второго; индекс 0 указывает, что соответствующая величина должна быть вычислена для значений $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$, $C_0 = C_{10} + C_{20}$. Исключим переменную γ из первых интегралов $V_1 = \mathrm{const}$ и $V_3 = \mathrm{const}$, используя интеграл $V_4 = 0$. Разрешая последнее уравнение относительно γ, получаем

$$\gamma = -\frac{c_0}{a_0}\left(\alpha+\beta-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{a_0}\right) + \ldots$$

и, подставляя в первые, будем иметь с учетом уравнений (2.2)

$$\begin{aligned} V_1^* = {} & A_{10}(p^2+q^2) + A_{20}(\omega_1^2+\omega_2^2) + C_{20}\eta^2 + 2C_{20}\omega\eta\left(1+\frac{\alpha+\beta}{a_0}\right) + \\ & + \frac{M}{5}\left\{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+4\omega^2a_0(\alpha+\beta)+\left(2R_0\frac{c_0^2}{a_0^2}+\omega^2\right)(\alpha^2+\beta^2)\right\} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}+\frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}-2\frac{c}{a}\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}\right]_0(\alpha^2+\beta^2) + \\ & + 2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}-2\frac{c}{a}\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}+\frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}+\frac{M}{5}R\frac{c^2}{a^2}\right]_0\alpha\beta + \ldots = \mathrm{const} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3^* = {} & \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{a_0^2} + \frac{2\omega}{c_0^2}\eta + \frac{2\omega^2}{a_0c_0^2}(\alpha+\beta) + \frac{\eta^2}{c_0^2} + \\ & + \frac{4\omega}{a_0c_0^2}\eta(\alpha+\beta) + \frac{\omega^2}{a_0^2c_0^2}(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2) + \ldots = \mathrm{const} \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$V = V_1^* - \frac{1}{C_0} V_2 + \mu \frac{c_0^4}{4\omega^2} V_3^{*2} =$$

$$= A_{10} \frac{C_0 - A_{10}}{C_0} (p^2 + q^2) - 2A_{10}A_{20} \frac{1}{C_0} (p\omega_1 + q\omega_2) + A_{20} \frac{C_0 - A_{20}}{C_0} (\omega_1^2 + \omega_2^2) +$$
$$+ \frac{M}{5} (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + \left(A_{11} + \mu \frac{\omega^2}{a_0^2}\right)(\alpha^2 + \beta^2) + 2\left(A_{12} + \mu \frac{\omega^2}{a_0^2}\right)\alpha\beta +$$
$$+ 2(\mu - C_{20}) \frac{\omega}{a_0} \eta (\alpha + \beta) + \mu\eta^2 + \ldots \tag{2.4}$$

где

$$A_{11} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2} + \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial c^2} - 2\frac{c}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial c\, \partial a}\right)_0 + \frac{M}{5}\left(2R_0 \frac{c_0^2}{a_0^2} - 3\omega^2\right)$$
$$A_{12} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a\, \partial b} - 2\frac{c}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial c\, \partial a} + \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial c^2}\right)_0 + \frac{M}{5}\left(R_0 \frac{c_0^2}{a_0^2} - 2\omega^2\right) \tag{2.5}$$

Как видно, разложение функции V в ряд начинается с членов второго порядка, представляющих собой сумму квадратичных форм переменных α', β', γ'; p, ω_1, q, ω_2; α, β, η. Функция V будет знакоопределенной, если знакоопределенны последние. Первые две из них определенно-положительные, принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $a_0 > c_0$. Найдем условия определенной положительности квадратичной формы переменных α, β, η.

Согласно критерию Сильвестра

$$A_{11} + \mu \frac{\omega^2}{a_0^2} > 0, \qquad (A_{11} - A_{12})\left(A_{11} + A_{12} + 2\mu \frac{\omega^2}{a_0^2}\right) > 0$$
$$(A_{11} - A_{12})\left[\mu \left(A_{11} + A_{12} + 4C_{20} \frac{\omega^2}{a_0^2}\right) - 2C_{20}^2 \frac{\omega^2}{a_0^2}\right] > 0$$

Очевидно, этим неравенствам всегда можно удовлетворить выбором некоторого положительного значения постоянной μ, если только выполняются условия

$$A_{11} + A_{12} + 4C_{20} \frac{\omega^2}{a_0^2} > 0, \qquad A_{11} - A_{12} > 0 \tag{2.6}$$

С учетом обозначений (1.11), (2.5) и принимая во внимание (1.12) и (2.2), имеем

$$A_{11} + A_{12} + 4C_{20} \frac{\omega^2}{a_0^2} =$$
$$= \frac{3M^2}{5a_0^2} \int_0^\infty \left[\frac{2a_0^2}{(a_0^2 + \lambda)^2} + \frac{2c_0^2(a_0^2 - c_0^2)}{(a_0^2 + \lambda)(c_0^2 + \lambda)^2} + \frac{c_0^2}{(c_0^2 + \lambda)^2}\right] \frac{\lambda\, d\lambda}{(a_0^2 + \lambda)\sqrt{c_0^2 + \lambda}}$$

$$A_{11} - A_{12} = \frac{3M^2}{5a_0^2} \int_0^\infty \left(\frac{c_0^2}{c_0^2 + \lambda} - \frac{a_0^4}{(a_0^2 + \lambda)^2}\right) \frac{d\lambda}{(a_0^2 + \lambda)\sqrt{c_0^2 + \lambda}}$$

Так как для эллипсоидов Маклорена $a_0 > c_0$, то очевидно, что первое из условий (2.6) всегда выполняется. Рассмотрим второе из этих неравенств. Выполняя интегрирование и опуская положительный множитель, приведем его к виду

$$l\,[l(13 + 3l^2) - (3 + 14l^2 + 3l^4) \operatorname{arc\,ctg} l] > 0$$
$$\left(l = \frac{c_0}{\sqrt{a_0^2 - c_0^2}}, \; \varepsilon = \frac{\sqrt{a_0^2 - c_0^2}}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + l^2}}\right) \tag{2.7}$$

Здесь l — величина, обратная второму эксцентрицитету эллипсоида (1.2); ε — его первый эксцентрицитет.

Положим [4]

$$u(l) \equiv \frac{l(13+3l^2)}{3+14l^2+3l^4} - \operatorname{arc\,ctg} l$$

и найдем

$$\frac{du}{dl} = \frac{16(3+l^2)(1-l^2)}{(1+l^2)(3+14l^2+3l^4)^2}$$

Отсюда видно, что с возрастанием l от 0 до 1 функция $u(l)$ возрастает, достигая max при $l=1$, а при дальнейшем возрастании l постоянно убывает, причем $u(0) = -{}^1/_2\pi$, $u(\infty)=0$. На основании этого заключаем, что уравнение

$$l(13+3l^2) - (3+14l^2+3l^4)\operatorname{arc\,ctg} l = 0 \tag{2.8}$$

имеет только один положительный конечный корень $l_0 < 1$, и когда $l > l_0$, условие (2.7) выполняется.

Уравнение (2.8) служит, как известно [4], для определения эллипсоида Маклорена, с которым при ${}^1/_2\omega^2/\pi f\rho = 0.187$ сливается предельный эллипсоид Якоби. Эксцентрицитет этого эллипсоида $\varepsilon_0 = 0.8126\ldots$, а корень уравнения (2.8) $l_0 = 0.717$.

Таким образом, для эллипсоидов Маклорена с эксцентрицитетами $\varepsilon < \varepsilon_0$ квадратичная форма переменных p, q, ω_1, ω_2, α', β', γ', α, β, η, с которой начинается разложение в ряд функции (2.4), является определенно-положительной.

Среди членов более высокого порядка в выражении функции V имеются, однако, члены, зависящие, кроме переменных α, β, η, также и от переменной ξ. Такие члены наинизшего порядка, как легко видеть, следующие:

$$\frac{2M}{5}(\alpha-\beta)^2\left[\xi^2 - 2\omega\xi\frac{\alpha+\beta}{a_0} - 2\xi\eta\right]$$

Добавляя и вычитая в квадратных скобках члены с квадратами α, β, η, получим

$$\frac{2M}{5}(\alpha-\beta)^2\left\{\left[\xi^2 - 2\omega\xi\frac{\alpha+\beta}{a_0} - 2\xi\eta + k(\alpha^2+\beta^2+\eta^2)\right] - k(\alpha^2+\beta^2+\eta^2)\right\}$$

Если выбрать постоянную $k > 2\omega^2/a_0^2 + 1$, то квадратичная форма переменных ξ, η, α, β, стоящая в квадратных скобках, будет определенно-положительной. А теперь очевидно, что функция (2.4) будет определенно-положительной функцией относительно переменных α', β', γ', α, β, p, q, ω_1, ω_2, η в достаточно малой конечной окрестности нулевых значений этих переменных, если определенно-положительна квадратичная часть функции V.

Следовательно, доказана устойчивость в смысле Ляпунова по отношению к переменным a, b, a', b', c', p, q, ω_1, ω_2, ω_3 эллипсоидов Маклорена с эксцентрицитетами $\varepsilon < \varepsilon_0$ при условии, что начальные возмущения удовлетворяют предположениям Дирихле.

Из устойчивости по отношению к указанным переменным благодаря существованию первых интегралов уравнений возмущенного движения вида $V_4 = \text{const}$, а также $V_1 = \text{const}$ или $V_2 = \text{const}$ заключаем об устойчивости эллипсоидов Маклорена с эксцентриситетами $\varepsilon < \varepsilon_0$ также и по отношению к переменным c и r.

Заметим, что если наложить дополнительное условие, чтобы форма жидкости всегда оставалась эллипсоидом вращения, то все эллипсоиды Маклорена будут устойчивыми фигурами вращающейся жидкости. В самом деле, в этом случае надо положить $\alpha = \beta$ и вместо рассмотренной выше квадратичной формы переменных α, β, η, входящей в выражение функции V, будем иметь квадратичную форму переменных α и η вида

$$2\left(A_{11} + A_{12} + 2\mu \frac{\omega^2}{a_0^2}\right)\alpha^2 + 4(\mu - C_{20})\frac{\omega}{a_0}\alpha\eta + \mu\eta^2$$

Условия определенной положительности этой квадратичной формы имеют вид:

$$A_{11} + A_{12} + 2\mu \frac{\omega^2}{a_0^2} > 0, \qquad \left(A_{11} + A_{12} + 4C_{20}\frac{\omega^2}{a_0^2}\right)\mu - 2C_{20}^2\frac{\omega^2}{a_0^2} > 0$$

и всегда можно выбрать такую положительную постоянную μ, что они будут удовлетворены, если только выполняется первое из неравенств (2.6). Последнее, как установлено выше, всегда выполняется для эллипсоидов Маклорена, что и доказывает высказанное утверждение.

3. Рассмотрим частное решение уравнений движения

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0, \quad a' = b' = c' = 0, \quad p = q = r = 0$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \Omega, \quad \sigma = \sigma_0 \tag{3.1}$$

описывающее движение жидкости со скоростями

$$v_x = -\frac{2a_0^2\Omega}{a_0^2 + b_0^2}y, \qquad v_y = \frac{2b_0^2\Omega}{a_0^2 + b_0^2}x, \qquad v_z = 0 \tag{3.2}$$

причем поверхность (1.2) остается неподвижной. Уравнения (1.15) при этом принимают вид:

$$\left(P - \frac{4a_0^2b_0^2}{(a_0^2 + b_0^2)^2}\Omega^2\right)a_0^2 = \left(Q - \frac{4a_0^2b_0^2}{(a_0^2 + b_0^2)^2}\Omega^2\right)b_0^2 = Rc_0^2 = 2\sigma_0$$

и переходят в уравнения (2.2), если ввести обозначение

$$\omega^2 = \frac{4a_0^2b_0^2}{(a_0^2 + b_0^2)^2}\Omega^2$$

Таким образом, получаем [5] серию эллипсоидов Дедекинда, тождественную по внешней форме с серией эллипсоидов Якоби.

Очевидно, при

$$\frac{2a_0^2b_0^2\Omega^2}{\pi f\rho\,(a_0^2 + b_0^2)^2} = 0.1871$$

полуоси a_0 и b_0 эллипсоида (1.2) становятся равными, жидкость движется как одно твердое тело, вращающееся с угловой скоростью Ω вокруг оси z, а эллипсоид Дедекинда обращается в эллипсоид бифуркации E, принадлежащий одновременно сериям эллипсоидов Маклорена и Якоби.

Исследуем устойчивость последнего, полагая в возмущенном движении

$$a = a_0 + \alpha, \qquad b = a_0 + \beta, \qquad c = c_0 + \gamma, \qquad \omega_3 = \Omega + \eta$$

Уравнения возмущенного движения допускают интегралы вида (2.3), первые два из которых после замены в первом γ через α и β при помощи интеграла $V_4 = 0$ записываются в форме

$$V_1^* = A_{10}(p^2+q^2) + A_{20}(\omega_1^2+\omega_2^2) + C_{20}\eta^2 + 2C_{20}\Omega\eta\left(1+\frac{\alpha+\beta}{a_0}\right) + \\ + \frac{M}{5}\left\{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+4\Omega^2 a_0(\alpha+\beta) - \Omega^2(\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta) + \right. \\ \left. + 2R_0\frac{c_0^2}{a_0^2}(\alpha^2+\beta^2)\right\} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}+\frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}-2\frac{c}{a}\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}\right)_0(\alpha^2+\beta^2) + \\ + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}+\frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}-2\frac{c}{a}\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}+\frac{M}{5}R\frac{c^2}{a^2}\right)_0\alpha\beta + \ldots = \mathrm{const}$$

$$V_2 = A_{10}^2(p^2+q^2) + 2A_{10}A_{20}(p\omega_1+q\omega_2) + A_{20}^2(\omega_1^2+\omega_2^2) + C_{20}^2\eta^2 + \\ + \frac{2M}{5}C_{20}\Omega^2[2a_0(\alpha+\beta)+6\alpha\beta] + 2C_{20}\Omega\eta\left(C_{20}+2C_{20}\frac{\alpha+\beta}{a_0}\right) + \ldots = \mathrm{const}$$

а два других сохраняют свой вид с заменой ω на Ω.

Построим функцию вида

$$V = V_1^* - \frac{1}{C_{20}}V_2 + \mu\frac{c_0^4}{4\Omega^2}V_3^{*2} \tag{3.3}$$

которая в членах наинизшего измерения отличается от функции (2.4) заменой ω на Ω и коэффициентов (2.5) следующими:

$$A_{11} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}+\frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}-2\frac{c}{a}\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}+2R\frac{c^2}{a^2}\frac{M}{5}\right)_0 - \frac{M}{5}\Omega^2$$
$$A_{12} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}+\frac{c^2}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial c^2}-2\frac{c}{a}\frac{\partial^2 W}{\partial c\,\partial a}+\frac{M}{5}R\frac{c^2}{a^2}\right)_0 - \frac{4M}{5}\Omega^2 \tag{3.4}$$

Квадратичная часть функции (3.3) будет определенно-положительной по отношению к переменным α, β, α', β', γ', p, q, ω_1, ω_2, η, если выполняются условия (2.6). Сравнивая коэффициенты (2.5) и (3.4), убеждаемся, что последние получаются из первых заменой ω на Ω и добавлением соответственно слагаемых $^2/_5 M\Omega^2$ и $-^2/_5 M\Omega^2$. Поэтому первое из условий (2.6) сохраняет тот же вид, что и в $n°2$, и выполняется, а второе в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\Omega^2 > 0$$

и тоже выполняется. Тем самым доказана в первом приближении устойчивость эллипсоида бифуркации E при эллипсоидальных возмущениях по отношению к переменным p, q, ω_1, ω_2, ω_3, a, b, c, a', b', c'.

Поступила 26 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г.— Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.
2. Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen uber die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides. Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig, 1876.
3. Thomson et Tait. A Treatis e on Natural Philosophy.,Vol. I, part II, Cambridge, 1883.
4. Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости, СПб., 1884.
5. Basset A. A Treatise on Hydrodynamics. Vol. II, Cambridge, 1888.
6. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости ОНТИ, 1936.