Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРЯМОМ МЕТОДЕ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

А. А. Мовчан

(Москва)

Задача об устойчивости плоского состояния свободно опертой по двум сторонам упругой тонкой пластинки бесконечного размаха (балки), находящейся под действием постоянных усилий в своей плоскости, рассматривается с точки зрения применения различных методов аналитического исследования — методов непосредственного интегрирования и прямого метода Ляпунова. Для рассматриваемой задачи дается определение устойчивости по Ляпунову и применяются теоремы прямого метода Ляпунова об устойчивости и неустойчивости [1,2], для чего вводится вспомогательное метрическое пространство и строятся в нем соответствующие функционалы (см. диссертацию Н. Н. Красовского[1], а также работу [3]).

Предполагается, что уравнения движения для безразмерного прогиба $w(x, t)$, отнесенного к хорде a пластинки, можно записать в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{a^2 N}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad w(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0,1 \tag{1}$$

Здесь x — безразмерная пространственная координата, отнесенная к хорде $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, t — безразмерное время, отнесенное к величине $(\mu a^4 / D)^{1/2}$, μ — масса на единицу площади, D — жесткость, N — усилие в плоскости пластинки, положительное в случае растяжения.

1. При статическом исследовании плоское состояние упругого равновесия пластинки $w(x) \equiv 0$ считают устойчивым, если рядом с ним не существует другого состояния упругого равновесия $w(x) \not\equiv 0$, бесконечно близкого к нему ([4], стр. 94). Нетривиальные решения $w_m(x) = c_m \sin m\pi x$ $(m = 1, 2, \ldots)$ уравнений (1), близкие при малых значениях произвольных постоянных c_m к тривиальному $w(x) \equiv 0$, существуют лишь при выполнении условий $N = N_m\,(m = 1, 2, \ldots)$, где $N_m = -(m^2\pi^2 D / a^2)$ — критическое усилие Эйлера номера m.

Отсюда, используя данное выше определение, следовало бы заключить о неустойчивости при $N = N_m\,(m = 1, 2, \ldots)$] и об устойчивости при выполнении условия $N > N_1$ или любого из условий $N_{m+1} < N < N_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Последнее не согласуется с хорошо известным экспериментальным фактом выпучивания пластинки при $N < N_1$.

2. При динамическом исследовании плоское невозмущенное состояние пластинки $w(x, t) \equiv 0$ считают устойчивым, если среди решений уравнений (1) вида

$$w(x, t) = X(x)e^{\omega t}, \qquad w(x, t) = [X_1(x) + tX(x)]\, e^{\omega t},$$

или решений, получаемых из предыдущих отделением действительных и

---

[1] Красовский Н. Н. Некоторые вопросы теории устойчивости нелинейных систем. Диссертация на соискание ученой степени д-ра физ.-матем. наук, ИМЕХ АН СССР, 1956.

мнимых частей (вещественных собственных и присоединенных движений), нет отклоняющихся (с неограниченно растущей амплитудой). Все решения такого вида легко находятся:

$$w_m(x, t) = c_m \sin m\pi x \cos q_m t, \qquad q_m = m^2\pi^2 \left(1 + \frac{a^2 N}{m^2\pi^2 D}\right)^{1/2}$$

$$w_m'(x, t) = c_m' \sin m\pi x \frac{\sin q_m t}{q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

(c_m — произвольные постоянные). Среди них нет отклоняющихся, если выполнено условие $N > N_1$; при его нарушении для некоторых m имеются отклоняющиеся решения вида

$$w_m(x, t) = c_m \sin m\pi x \operatorname{ch} |q_m| t, \qquad w_m'(x, t) = c_m' \sin m\pi x \frac{\operatorname{sh} |q_m| t}{q_m}$$

$$w_m''(x, t) = c_m'' t \sin m\pi x$$

Используя данное в п. 2 определение «динамической» устойчивости, заключают об устойчивости при $N > N_1$ и неустойчивости в противном случае.

Предыдущее рассмотрение ограничено решениями определенного вида. Дополнительные сведения об устойчивости можно получить, рассматривая произвольного вида достаточно гладкие решения $w(x, t)$, которые вместе с производными, входящими в уравнения (1), представимы равномерно сходящимися рядами по собственным и присоединенным движениям:

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\pi x \left(c_m \cos q_m t + c_m' \frac{\sin q_m t}{q_m}\right)$$

Оценивая коэффициенты рядов, можно показать, что при выполнении $N > N_1$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что всякое достаточно гладкое решение $w(x, t)$, удовлетворяющее в начальный момент времени t_0 условию

$$\rho_2(0, w(x, t_0)) = \sup_x \left|\frac{\partial^4 w(x, t_0)}{\partial x^4}\right| + \sup_x \left|\frac{\partial^3 w(x, t_0)}{\partial x^2 \partial t}\right| < \delta$$

при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условию [1]

$$\rho_1(0, w(x, t)) = \sup_x |w(x, t)| + \sup_x \left|\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}\right| < \varepsilon$$

Подчеркнем, что динамическая устойчивость пластинки при $N > N_1$ не означает возможности выбора по заданному $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$, зависящего только от ε, что всякое решение $w(x, t)$, удовлетворяющее в начальный момент времени t_0 условию $\rho_1(0, w(x, t_0)) < \delta$, при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условию $\rho_1(0, w(x, t)) < \varepsilon$.

Действительно, рассмотрим совокупность аналитических решений

$$w_n(x, t) = c \sin n\pi x \cos q_n t \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

где c — произвольные числа. Легко подсчитать, что для заданного $\varepsilon > 0$ решение $w_n(x, t)$ удовлетворяет условию $\rho_1(0, w_n(x, t)) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда в начальный момент времени $t = 0$ выполняется условие

$$\rho_1(0, w_n(x, 0)) < \delta_n = \varepsilon / (1 + q_n^2)^{1/2}$$

[1] Ср. с определением корректности ([5], стр. 80—83).

Так как $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\rho_1(0, w_n(x, 0)) = |c|$, то как бы мало ни было фиксированное $\delta > 0$, любое решение $w_n(x, t)$ при $0 < c < \delta$ удовлетворяет условию $\rho_1(0, w_n(x, 0)) < \delta$, однако решения $w_n(x, t)$ с достаточно большими номерами n, для которых $\delta_n < c$, удовлетворяют условию $\rho_1(0, w(x, t)) < \varepsilon$ не при всех $t \geqslant 0$.

Подчеркнутую особенность, характерную для упругих систем, можно истолковать следующим образом: условие $\rho_1(0, w(x, t_0)) < \delta$, стесняя начальные прогибы и скорости точек пластинки, не ограничивает начальной потенциальной энергии деформации [1], которая в процессе движения переходит в кинетическую и дает в отдельные моменты времени «всплески» величины $\rho_1(0, w(x, t))$. Чтобы не допустить эти всплески, достаточно на начальное состояние пластинки наложить более жесткое стеснение $\rho_2(0, w(x, t_0)) < \delta$, ограничивающее не только начальные прогибы и скорости, но и соответствующую начальную энергию изгибных деформаций и скоростей деформаций.

3. Прежде чем прилагать к рассматриваемой задаче прямой метод Ляпунова, рассмотрим один из возможных вариантов определений и доказательств основных теорем, который для некоторых приложений может оказаться более удобным, чем имеющийся [2] в [3].

В метрическом [6] пространстве $R(a, \rho)$, элементы которого обозначаются $a, a_0, a', \ldots$, задана непрерывная кривая $a(a_0, t_0, t)$, начинающаяся в точке a_0 в момент времени t_0, если каждому определенному значению вещественного параметра (времени) t из промежутка $t_0 \leqslant t < \infty$ отвечает в $R(a, \rho)$ определенная точка $a(a_0, t_0, t)$, причем $a(a_0, t_0, t_0) = a_0$ и отображение $a(a_0, t_0, t)$ непрерывно [3] при любом $t \geqslant t_0$. Рассматриваются также укороченные непрерывные кривые $a(a_0, t_0, t)$, заданные в конечном промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (для каждой кривой свой промежуток). Если в точке a_0 в момент времени t_0 начинается не одна кривая, напишем $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, отмечая различные кривые различными значениями индекса α и называя пучком кривых $a_\alpha(a_0, t_0, t)$ множество всех кривых, начинающихся в точке a_0 в момент времени t_0. Рассматриваются различные пучки кривых $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающихся в различных точках a_0 в различные моменты времени $t_0 \geqslant 0$.

Среди рассматриваемых кривых выделяется класс L кривых, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Эти дополнительные условия, которые в конкретных задачах могут быть дифференциальными уравнениями обыкновенными и с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, краевыми условиями, условиями гладкости и т. п., запишем в виде $L(a, t) = 0$ и назовем условно уравнениями краевой задачи. Предполагается, что существует кривая класса L, которой при любом $t \geqslant 0$ отвечает в $R(a, \rho)$ одна фиксированная точка a'.

---

[1] Легко подсчитать, что потенциальная энергия деформации, соответствующая начальному прогибу $w_n(x, 0) = c \sin n\pi x$ пластинки, с ростом n растет неограниченно.

[2] В работе [3] в силу чрезмерной общности некоторые доказательства (например, достаточность в теореме об устойчивости) не доведены до такого состояния, чтобы простая ссылка на них могла полностью удовлетворить читателя.

[3] Это значит, что $\rho(a(a_0, t_0, t), a(a_0, t_0, t_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ по всякой сходящейся к t последовательности t_n, $t_n \geqslant t_0$.

Эту кривую назовем невозмущенным движением a', остальные кривые класса L — возмущенными движениями. Предполагается также, что для любого $\delta > 0$ найдется по крайней мере одно возмущенное движение $a(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$.

На каком-либо множестве пар (a, t) определен вещественный функционал $f(a, t)$, если каждой паре (a, t) этого множества отвечает определенное (одно для данной пары и конечное) вещественное число $f(a, t)$.

Пусть пара (a, t) такова, что $\rho(a', a) < R$, где R — положительное фиксированное число, и пусть существует возмущенное движение $a(a, t, t+\tau)$, $\tau \geqslant 0$, начинающееся в точке a в момент времени t. Множество всех таких пар (a, t) обозначим LRT. Рассматриваются функционалы $f(a, t)$, определенные на множестве LRT и обладающие на LRT некоторыми свойствами. Этими свойствами функционалы $f(a, t)$ могут не обладать вне LRT, где они также могут быть определены. Так как каждая пара $(a, t) \in LRT$ отвечает точке на некотором возмущенном движении краевой задачи $L(a, t) = 0$, будем иногда говорить о том или ином свойстве функционалов $f(a, t)$, справедливом на LRT, как о свойстве, справедливом в силу уравнений краевой задачи $L(a, t) = 0$ (или как о свойстве, справедливом вдоль возмущенных движений).

Функционал $f(a, t)$ называется определенно-положительным в силу уравнений краевой задачи $L(a, t) = 0$, если для любого положительного числа $\varepsilon < R$ и для любой пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей условию $\rho(a', a) \geqslant \varepsilon$, найдется такое $\mu > 0$, зависящее только от ε, что выполняется условие $f(a, t) \geqslant \mu$.

Функционал $f(a, t)$ допускает в силу уравнений краевой задачи $L(a, t) = 0$ бесконечно малый высший предел, если для любого $\mu > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от μ, что $|f(a, t)| < \mu$ для любой пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей условию $\rho(a', a) < \delta$.

Функционал $f(a, t)$ называется невозрастающим в силу уравнений краевой задачи $L(a, t) = 0$, если на LRT вдоль любого возмущенного движения $a_\alpha(a_0, t_0, t)$ не возрастает с ростом t функция $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t)$,

Функционал $f(a, t)$ называется исчезающим вдоль кривой $a_\alpha(a_0, t_0, t)$. если функция $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t)$ существует при всех $t \geqslant t_0$ и стремится к нулю при $t \to \infty$.

Областью $f(a, t) > 0$ называется множество пар $(a, t) \in LRT$, для которых $f(a, t) > 0$. Функционал $f(a, t)$ называется ограниченным в области $f(a, t) > 0$, если на LRT для некоторого $N > 0$ из неравенства $f(a, t) > 0$ следует неравенство $f(a, t) < N$.

Функционал $f(a, t)$ имеет в силу уравнений краевой задачи $L(a, t) = 0$ определенно-положительную в области $f(a, t) > 0$ производную $f'(a, t)$, если при $\mu > 0$ и для любого возмущенного движения $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, удовлетворяющего на LRT условию $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) \geqslant \mu$, найдется такое $\nu > 0$, зависящее только от μ и, возможно, от взятого возмущенного движения $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, что на LRT выполняется $df(a_\alpha(a_0, t_0, t), t)/dt \geqslant \nu$.

Множество всех точек метрического пространства $R(a, \rho)$, принадлежащих всевозможным кривым пучка возмущенных движений, начинающихся в точке a_0 в момент времени t_0, обозначим $A(a_0, t_0)$. Каждой паре $(a, t) \in LRT$ отвечает свой пучок возмущенных движений (начинающихся в точке a в момент времени t) и, следовательно, свое множество $A(a, t)$. Верхнюю грань расстояний от точки a' до точек множества $A(a, t)$ обозначим $\rho^\circ(a', A(a, t))$. Так как $a \in A(a, t)$, то $\rho^\circ(a', A(a, t)) \geqslant \rho(a', a)$.

Определение. Невозмущенное движение a' называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что всякое возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0$ в области своего определения[1] условию $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < \varepsilon$. В противном случае невозмущенное движение a' называется неустойчивым.

Очевидно, если невозмущенное движение a' устойчиво, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, зависящее только от ε_1, что всякий пучок возмущенных движений, начинающихся в момент времени t в точке a из окрестности $\rho(a', a) < \delta_1$, удовлетворяет условию $\rho^\circ(a', A(a, t)) < \varepsilon_1$.

Переходя к доказательству теорем, подчеркнем еще раз, что в наших рассуждениях используется факт существования возмущенных движений в любой достаточно малой окрестности невозмущенного. В тех конкретных задачах, в которых вопросы существования не выяснены, доказываемые результаты имеют условный смысл: если соответствующие решения существуют и выполнены условия теорем, то верны и их заключения. Следовательно, применяется схема, в которой вопросы существования отделяются от вопросов устойчивости так же, как это часто делается при рассмотрении вопросов существования и единственности.

Теорема об устойчивости. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовал в силу уравнений краевой задачи определенно-положительный допускающий бесконечно малый высший предел и невозрастающий функционал.

Доказательство. Необходимость. Пусть невозмущенное движение a' устойчиво. Возьмем какое-нибудь $E > 0$ и в силу устойчивости найдем такое $R > 0$, зависящее только от E, что всякий пучок возмущенных движений, начинающихся в момент времени t в точке a из окрестности $\rho(a', a) < R$, удовлетворяет условию $\rho^\circ(a', A(a, t)) < E$. Каждой паре $(a, t) \in LRT$ поставим в соответствие определенное (одно для данной пары и конечное) вещественное число $f(a, t) = \rho^\circ(a', A(a, t))$.

Функционал $f(a, t)$ определенно-положителен, так как выполняется неравенство $\rho^\circ(a', A(a, t)) \geqslant \rho(a', a)$.

Функционал $f(a, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, так как в силу устойчивости для любого $\mu > 0$ найдется такое положительное $\delta < R$, зависящее только от μ, что всякий пучок возмущенных движений, начинающихся в момент времени t в точке a из окрестности $\rho(a', a) < \delta$, удовлетворяет условию $\rho^\circ(a', A(a, t)) < \mu$, т. е. из $\rho(a', a) < \delta$ следует $|f(a, t)| < \mu$.

Пусть для любого t из промежутка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $t_1 \geqslant t_0$, точки возмущенного движения $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, включая конечные $a_1 = a_\alpha(a_0, t_0, t_1)$ и $a_2 = a_\alpha(a_0, t_0, t_2)$, удовлетворяют условию $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < R$. Так как пучки, начинающиеся в точках одной и той же кривой в более поздние моменты времени, целиком входят в состав пучков, начинающихся

[1] Допускаются также укороченные возмущенные движения.

в болое ранние моменты времени, то $A(a_1, t_1) \supseteq A(a_2, t_2)$. Отсюда $\rho^\circ(a', A(a_1, t_1)) \geqslant \rho^\circ(a', A(a_2, t_2))$, т. е. $f(a_1, t_1) \geqslant f(a_2, t_2)$ или более полно $f(a_\alpha(a_0, t_0, t_1), t_1) \geqslant f(a_\alpha(a_0, t_0, t_2), t_2)$, что и означает, что функционал $f(a, t)$ не возрастает в силу уравнений краевой задачи $L(a, t) = 0$.

Дополнение об асимптотической устойчивости. Пусть невозмущенное движение устойчиво и пусть, кроме того, всякое неукороченное возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, приближается к нему асимптотически. Тогда построенный на LRT функционал $f(a, t) = \rho^\circ(a', A(a, t))$ исчезает вдоль всякого такого возмущенного движения.

Действительно, при сделанных предположениях для некоторого положительного $\delta < R$ всякое неукороченное возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, удовлетворяет условиям $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < R$ при всех $t \geqslant t_0$ и $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) \to 0$ при $t \to \infty$. Возьмем какое-нибудь неукороченное возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$. Для него первое условие гарантирует существование функции $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Второе условие означает, что для любого $\nu_1 > 0$ найдется такое $t_1 = t_1(a_0, t_0, \alpha) \geqslant t_0$, что при всех $t > t_1$ выполняется $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < \nu_1$.

Пусть задано произвольное $\mu_1 > 0$. В силу устойчивости для заданного μ_1 найдется такое $\nu_1 > 0$, что всякий пучок возмущенных движений, начинающихся в момент времени t в точке a из окрестности $\rho(a', a) < \nu_1$, удовлетворяет условию $\rho^\circ(a', A(a, t)) < \mu_1$. Для этого ν_1 найдется, как указано выше, такое $t_1 = t_1(a_0, t_0, \alpha) \geqslant t_0$, что при всех $t > t_1$ в точках $a = a_\alpha(a_0, t_0, t)$ взятой кривой выполняется $\rho(a' a) < \nu_1$, и следовательно, $\rho^\circ(a', A(a, t)) < \mu_1$, т. е. $f(a, t) = f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) < \mu_1$.

Итак, для любого неукороченного возмущенного движения $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающегося в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, по заданному $\mu_1 > 0$ найдется такое $t_1 = t_1(a_0, t_0, \alpha) \geqslant t_0$, что $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) < \mu_1$ при всех $t > t_1$, т. е. $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Если $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по α и a_0 из окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, число t_1, о котором говорилось выше, можно подобрать не зависящим от α и a_0 из окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$.

Достаточность. Пусть для некоторого $R > 0$ функционал $f(a, t)$ обладает на LRT всеми указанными в условии теоремы свойствами. Пусть задано положительное $\varepsilon < R$.

Функционал $f(a, t)$ определенно-положителен, поэтому для $\varepsilon > 0$ и для любой пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей[1] условию $\rho(a', a) \geqslant \varepsilon$, найдется такое $\mu > 0$, зависящее только от ε, что выполняется $f(a, t) \geqslant \mu$.

Функционал $f(a, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, поэтому по числу $\mu > 0$ найдется такое зависящее только от μ положительное $\delta < \varepsilon$, что $|f(a, t)| < \mu$ для любой пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей условию $\rho(a', a) < \delta$.

Докажем, что для найденного δ всякое возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0$ в области своего определения условию $(\rho(a', a_\alpha a_0, t_0, t)) < \varepsilon$.

---

[1] Если для заданного ε нет ни одной пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей условию $\rho(a', a) \geqslant \varepsilon$, доказательство тривиально.

Допустим, что это не так, и существует такое возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, которое в некоторый момент времени $t > t_0$ не удовлетворяет условию $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < \varepsilon$.

Вследствие непрерывности кривой $a_\alpha(a_0, t_0, t)$ найдется такое $t_1 > t_0$, что в промежутке $t_0 \leqslant t < t_1$ выполняется $\rho(\alpha', \alpha_\alpha(\alpha_0, t_0, t)) < \varepsilon$, а в момент времени t_1 выполняется $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t_1)) = \varepsilon$.

Тогда $f(a_\alpha(a_0, t_0, t_1), t_1) \geqslant \mu$, что противоречит условию невозрастания функции $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t)$, определенной для любого t из промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и принимающей на его левом конце значение $f(a_0, t_0) < \mu$.

Дополнение об асимптотической устойчивости. Пусть для некоторого $R > 0$ функционал $f(a, t)$ обладает на LRT всеми указанными в условии теоремы свойствами и пусть, кроме того, функционал $f(a, t)$ исчезает вдоль всякого неукороченного возмущенного движения, достаточно близкого к невозмущенному. Тогда всякое неукороченное возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, приближается к нему асимптотически.

Действительно, при сделанных предположениях для некоторого положительного $\delta < R$ всякое неукороченное возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, удовлетворяет условиям $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < R$ при всех $t \geqslant t_0$ и $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть задано произвольное положительное $\varepsilon_1 < R$. Функционал $f(a, t)$ определенно-положителен, поэтому для заданного ε_1 и для любой пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей[1] условию $\rho(a', a) \geqslant \varepsilon_1$, найдется такое $\mu_1 > 0$, зависящее только от ε_1, что $f(a, t) \geqslant \mu_1$.

Возьмем какое-нибудь неукороченное возмущенное движение $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$. Так как $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) \to 0$ при $t \to \infty$, то найдется такое $t_1 = t_1(a_0, t_0, \alpha) \geqslant t_0$, что $f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) < \mu_1$ при всех $t > t_1$. Тогда при всех $t > t_1$ для точек $a = a_\alpha(a_0, t_0, t)$ взятой кривой выполняется $\rho(a', a) = \rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < \varepsilon_1$, потому что, если бы для какого-нибудь $t > t_1$ выполнялось $\rho(a', a) \geqslant \varepsilon_1$, для этого $t > t_1$ выполнялось бы $f(a, t) = f(a_\alpha(a_0, t_0, t), t) \geqslant \mu_1$, что невозможно.

Итак, для любого неукороченного возмущенного движения $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающегося в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, по заданному $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $t_1 = t_1(a_0, t_0, \alpha) \geqslant t_0$, что $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) < \varepsilon_1$ при всех $t > t_1$, т. е. $\rho(a', a_\alpha(a_0, t_0, t)) \to 0$ при $t \to \infty$.

Если функционал $f(a, t)$ исчезает вдоль неукороченных возмущенных движений $a_\alpha(a_0, t_0, t)$, начинающихся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, равномерно по α и a_0 из окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, число t_1, о котором говорилось выше, можно подобрать не зависящим от α и a_0 из окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, т. е. все неукороченные возмущенные движения, достаточно близкие к невозмущенному, приближаются к нему равномерно асимптотически.

Теорема о неустойчивости. Предположим, что для некоторого $R > 0$ среди возмущенных движений, начинающихся на LRT, нет укороченных

[1] Если для заданного ε_1 нет ни одной пары $(a, t) \in LRT$, удовлетворяющей условию $\rho(a', a) \geqslant \varepsilon_1$, доказательство тривиально.

и что любые два связных на LRT куска двух возмущенных движений, имеющие в какой-либо момент времени из области их определения общую точку, совпадают (на LRT) во все последующие моменты времени, т. е. для таких кусков $a(a_1, t_1, t)$ и $a(a_2, t_2, t)$ из $a(a_1, t_1, t_3) = a(a_2, t_2, t_3)$ следует $a(a_1, t_1, t) \equiv a(a_2, t_2, t)$ при $t \geqslant t_3$.

Для того чтобы невозмущенное движение было неустойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $f(a, t)$, который в области $f(a, t) > 0$, имеющей пары (a, t) для любой достаточно малой окрестности невозмущенного движения, ограничен и обладает в силу уравнений краевой задачи определенно-положительной производной $f'(a, t)$.

Доказательство. Необходимость[1]. Пусть невозмущенное движение a' неустойчиво. Тогда для некоторого $R > 0$ и любого положительного $\delta < R$ найдется возмущенное движение $a(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$ и удовлетворяющее условию $\rho(a', a(a_0, t_0, t)) < R$ в некотором конечном промежутке $t_0 \leqslant t < t^\circ$, причем $\rho(a', a(a_0, t_0, t^\circ)) = R$.

Кусок возмущенного движения $a(a_0, t_0, t)$, $t_0 \leqslant t < t^\circ$ назовем связным на LRT, если для любого t из промежутка $t_0 \leqslant t < t^\circ$ выполняется $\rho(a', a(a_0, t_0, t)) < R$, причем либо $\rho(a', a(a_0, t_0, t^\circ)) = R$, либо $t^\circ = \infty$. В силу единственности, оговоренной в условии теоремы, множество всех связных на LRT кусков возмущенных движений можно разбить на классы l_β (определенный индекс β характеризует определенный класс), зачисляя в один класс с каким-либо куском $a(a_0, t_0, t)$ все куски, имеющие с ним в какие-нибудь моменты времени $t \geqslant t_0$ общие точки ([6], стр. 17). Для какого-либо куска $a(a_0, t_0, t)$ класса l_β область его определения есть промежуток $t_0 \leqslant t < t_\beta{}^\circ$, причем $t_\beta{}^\circ$ имеет общее значение для всех кусков класса l_β (например, кусок $a(a_1, t_1, t)$ класса l_β определен в промежутке $t_1 \leqslant t < t_\beta{}^\circ$).

Если $t_\beta{}^\circ < \infty$, вдоль любого куска класса l_β в области его определения положим $f(a, t) = \exp(t - t_\beta{}^\circ)$. Например, вдоль куска $a(a_0, t_0, t)$ класса l_β положим $f(a(a_0, t_0, t), t) = \exp(t - t_\beta{}^\circ)$ для любого t из промежутка $t_0 \leqslant t < t_\beta{}^\circ$. Если $t_\beta{}^\circ = \infty$, вдоль любого куска класса l_β в области его определения положим $f(a, t) \equiv 0$.

Этим каждой паре $(a, t) \in LRT$ поставлено в соответствие определенное (одно для данной пары и конечное) вещественное число $f(a, t)$.

Пары $(a, t) \in LRT$, для которых $f(a, t) = \exp(t - \overset{\circ}{t}_\beta) > 0$, существуют для любой достаточно малой окрестности невозмущенного движения (см. начало доказательства).

Всюду на LRT выполняется $0 \leqslant f(a, t) < 1$, т. е. функционал $f(a, t)$ ограничен.

Функционал $f(a, t)$ определен так, что на LRT вдоль любого возмущенного движения $a(a_0, t_0, t)$ выполняется $df(a(a_0, t_0, t), t)/dt = f(a(a_0, t_0, t), t)$. Отсюда следует, что в области $f(a, t) > 0$ функционал $f(a, t)$ имеет в силу уравнений краевой задачи определенно-положительную производную $f'(a, t)$.

Достаточность. Пусть для некоторого $R > 0$ существует на LRT функционал $f(a, t)$, обладающий свойствами, указанными в условии тео-

[1] Необходимость можно доказать без предположения неукороченности возмущенных движений.

ремы. Допустим, что невозмущенное движение a' устойчиво. Тогда найдется такое δ, что всякое возмущенное движение $a(a_0, t_0, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0$ условию $\rho(a', a(a_0, t_0, t)) < R$ и не выходит за пределы области, в которой функционал $f(a, t)$ обладает указанными в условии теоремы свойствами.

По условию теоремы среди возмущенных движений, начинающихся в окрестности $\rho(a', a_0) < \delta$, можно выбрать такое неукороченное $a(a_0, t_0, t)$, для которого $f(a_0, t_0) \geqslant \mu > 0$. Из того, что в области $f(a, t) > 0$ функционал $f(a, t)$ имеет в силу уравнений краевой задачи определенно-положительную производную $f'(a, t)$, заключаем, что вдоль выбранного возмущенного движения $a(a_0, t_0, t)$ для $t \geqslant t_0$ выполняются одновременно,

$$f(a(a_0, t_0, t), t) \geqslant \mu, \qquad df(a(a_0, t_0, t), t)/dt \geqslant \nu$$

где ν — некоторое положительное число. Тогда из ограниченности функционала $f(a, t)$ в области $f(a, t) > 0$ и первого неравенства следует, что для некоторого $N > 0$ при любом $t \geqslant t_0$ выполняется $f(a(a_0, t_0, t), t) < N$, а из второго неравенства следует противоречащее ему при достаточно больших $t > t_0$ соотношение $f(a(a_0, t_0, t), t) \geqslant f(a_0, t_0) + \nu(t - t_0)$.

Замечание. Единственность, оговоренная в условии теоремы, при доказательстве достаточности не используется. Из условий существования используется лишь факт существования неукороченных возмущенных движений $a(a_0, t_0, t)$, начинающихся в любой достаточно малой окрестности невозмущенного в области $f(a, t) > 0$.

4. Рассмотрим множество W вещественных функций $w(x, t)$, определенных и непрерывных по совокупности x, t в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ вместе с производными $w_{xx}(x, t)$, $w_x(x, t)$, $w_t(x, t)$. Функции $w(x, t) \in W$ в фиксированный момент времени t из области ее определения поставим соответствие точку $w = [w(x, t), w_t(x, t)]$ — пару функций величины x. Точки $w_1 = [w_1(x, t_1), w_{1t_1}(x, t_1)]$ и $w_2 = [w_2(x, t_2), w_{2t_2}(x, t_2)]$ считаем совпадающими, если $w_1(x, t_1) \equiv w_2(x, t_2)$ и $w_{1t_1}(x, t_1) \equiv w_{2t_2}(x, t_2)$. Расстоянием между точками w_1 и w_2 назовем неотрицательное число

$$\rho(w_1, w_2) = \left\{\int_0^1 dx \sum_{k=0}^{2}\left[\frac{\partial^k w_1(x, t_1)}{\partial x^k} - \frac{\partial^k w_2(x, t_2)}{\partial x^k}\right]^2 + \int_0^1 dx \left[\frac{\partial w_1(x, t_1)}{\partial t_1} - \frac{\partial w_2(x, t_2)}{\partial t_2}\right]^2\right\}^{1/2}$$

Легко проверить, что $\rho(w_1, w_2)$ удовлетворяет всем аксиомам метрического расстояния. Множество точек w вместе с метрикой $\rho(w_1, w_2)$ образует метрическое пространство $R(w, \rho)$. Множество точек w, отвечающих функции $w(x, t) \in W$ при всевозможных t из области ее определения, образует в $R(w, \rho)$ непрерывную кривую, которую в дальнейшем отождествляем с самой функцией $w(x, t)$.

Условимся называть уравнениями краевой задачи $L(w, t) = 0$ уравнения (1) и дополнительные условия гладкости — непрерывность по совокупности x, t функций $w_{xxxx}(x, t)$, $w(x, t)$, $w_{xxt}(x, t)$, $w_{xt}(x, t)$, $w_{tt}(x, t)$. Из множества W выделяется класс L кривых $w(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям краевой задачи $L(w, t) = 0$. Кривую $w(x, t) \equiv 0$ класса L, которой при любом $t \geqslant 0$ отвечает в $R(w, \rho)$ одна фиксированная точка O, назовем невозмущенным движением; остальные кривые класса L — возмущенными движениями.

Согласно определению п. 3, невозмущенное движение $w(x, t) \equiv 0$ назовем устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что всякое возмущенное движение $w(x, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(0, w(x, t_0)) < \delta$, удовлетворяет при $t \geqslant t_0$ условию $\rho(0, w(x, t)) < \varepsilon$. Для исследования устойчивости рассмотрим функционал

$$f(w) = \int_0^1 dx \left(w_{xx}{}^2 + \frac{a^2 N}{D} w_x{}^2 + w_t{}^2 \right)$$

Можно показать, что для любой функции $w(x, t) \in W$, удовлетворяющей граничным условиям и условиям гладкости краевой задачи $L(w, t) = 0$, выполняются неравенства

$$\int_0^1 dx\, w_{xx}{}^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 dx\, w_x{}^2, \qquad \int_0^1 dx\, w_x{}^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 dx\, w^2$$

при помощи которых получаем

$$f(w) \geqslant \gamma \rho^2(0, w), \qquad \gamma = \frac{1}{4} \min \left\{ 1; \left(1 + \frac{a^2 N}{\pi^2 D}\right);\ 2\pi^2 \left(1 + \frac{a^2 N}{\pi^2 D}\right) \right\}$$

Отсюда выводим, что при выполнении условия $1 + (a^2 N/\pi^2 D) > 0$, т. е. при $N > N_1$, функционал $f(w)$ в силу уравнений краевой задачи $L(w, t) = 0$ определенно-положителен[1]. Функционал $f(w)$ допускает бесконечно малый высший предел, что видно из оценки

$$|f(w)| \leqslant \left(1 + \left|\frac{a^2 N}{\pi^2 D}\right|\right) \rho^2(0, w)$$

Вдоль любой кривой $w(x, t) \in W$, удовлетворяющей условиям гладкости краевой задачи $L(w, t) = 0$, определена функция $f(w(x, t))$ времени t, производная которой по t дифференцированием под знаком интеграла и интегрированием по частям легко приводится к виду

$$\frac{d}{dt} f(w(x, t)) = 2 \int_0^1 dx \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{a^2 N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \frac{\partial w}{\partial t} +$$
$$+ 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{a^2 N}{D} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} \right]_0^1$$

Отсюда видно, что в силу уравнений краевой задачи $L(w, t) = 0$ выполняется $df(w(x, t))/dt \equiv 0$ и, следовательно, функционал $f(w)$ не возрастает с ростом t вдоль любого возмущенного движения $w(x, t)$.

При выполнении условия $N > N_1$ устойчивость в смысле данного выше определения следует из первой теоремы прямого метода Ляпунова.

Заметим, что вдоль возмущенных движений

$$|w(x, t)| = \left| \int_0^x dx\, w_x \right| \leqslant \left(\int_0^1 dx\, w_x{}^2 \right)^{1/2} \leqslant \rho(0, w(x, t))$$

Поэтому при $N > N_1$ по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что всякое возмущенное движение $w(x, t)$, начинающееся в окрестности $\rho(0, w(x, t_0)) < \delta$, удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0$ условию $\rho_3(0, w(x, t)) = \sup_x |w(x, t)| < \varepsilon$.

---

[1] Подчеркиваем, что при доказательстве определенной положительности функционала $f(w)$ существенно использованы условия гладкости кривых $w(x, t)$ и граничные условия краевой задачи $L(w, t) = 0$.

Рассмотрим теперь функционал

$$\varphi(w) = \begin{cases} -f(w)\psi(w) & \text{при } f(w) < 0, \\ 0 & \text{при } f(w) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \psi(w) = \int_0^1 dx\, w w_t$$

Пусть для некоторого $\mu > 0$ и для какого-нибудь неукороченного возмущенного движения $w(x, t)$ в момент t_0 выполняется $\varphi(w(x,t_0)) \geqslant \mu$. Тогда $f(w(x, t_0)) < 0$. Вдоль рассматриваемого возмущенного движения это неравенство выполняется при любых $t > t_0$, так как $f(w(x,t)) = f(w(x, t_0))$; следовательно, $\varphi(w(x, t)) = -f(w(x, t))\psi(w(x, t))$ при любых $t \geqslant t_0$.

Отсюда, дифференцируя по t под знаком интеграла и интегрируя по частям с использованием уравнений краевой задачи $L(w, t) = 0$, находим, что вдоль рассматриваемого возмущенного движения для $t \geqslant t_0$

$$\frac{d}{dt}\varphi(w(x, t)) \geqslant \nu = f^2(w(x, t_0)) > 0, \qquad \varphi(w(x, t)) \geqslant \mu$$

т. е. функционал $\varphi(w)$ имеет в силу уравнений краевой задачи определенно-положительную в области $\varphi(w) > 0$ производную $\varphi'(w)$.

Функционал $\varphi(w)$ ограничен в области $\varphi(w) > 0$, так как

$$|\varphi(w)| = |f(w)||\psi(w)| \leqslant \left(1 + \left|\frac{a^2N}{\pi^2 D}\right|\right)\rho^4(0, w)$$

Применяя теперь теорему о неустойчивости, заключаем, что невозмущенное движение будет неустойчивым, если в любой достаточно малой его окрестности существуют неукороченные возмущенные движения, начинающиеся в точках $w(x, t_0)$, для которых $\varphi(w(x, t_0)) > 0$.

Рассмотрим точки $w(x, t_0)$ метрического пространства $R(w, \rho)$, которые в момент времени t_0 характеризуются прогибами $c_0 \sin \pi x$ и скоростями $c_1 \sin \pi x$, где c_0, c_1 — вещественные произвольные постоянные (для существования неукороченных возмущенных движений $w(x, t)$ с начальными прогибами $w_0(x)$ и скоростями $w_1(x)$ заведомо достаточно, чтобы $w_i(x)$ $(i = 0,1)$ имели непрерывные шестые производные и обращались в нуль при $x = 0$, 1 вместе с производными $w_i''(x)$, $w_i^{\mathrm{IV}}(x)$). Для этих точек $w(x, t_0)$, которые имеются (при подходящих c_0, c_1) в любой достаточно малой окрестности невозмущенного движения, функционал $f(w)$ принимает значения

$$f(w(x, t_0)) = \frac{1}{2}\left[c_0^2 \pi^4 \left(1 + \frac{a^2N}{\pi^2 D}\right) + c_1^2\right]$$

Можно подобрать такое малое c_1^2, что при $1 + (a^2N/\pi^2 D) < 0$, т. е. при $N < N_1$, выполняется $f(w(x, t_0)) < 0$; если $c_0 c_1 > 0$, выполняется также $\psi(w(x, t_0)) > 0$ и $\varphi(w(x, t_0)) > 0$. Следовательно, при $N < N_1$ невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 17 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. т. II, Изд-во АН СССР, 1956.
2. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеориздат, 1955.
3. З у б о в В. И. Методы Ляпунова и их применение. Изд. ЛГУ, 1957.
4. Л е й б е н з о н Л. С. Об одном способе определения устойчивости упругого равновесия. Собр. трудов, т. I. Изд.-во АН СССР, 1951.
5. П е т р о в с к и й И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехтеориздат, 1950.
6. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа . Изд. МГУ, 1951.