Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОБЩИХ И ПОЛНЫХ ФОРМАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ

М. Г. Слободянский

(Москва)

В работе рассматривается вопрос о выражении компонент смещений, удовлетворяющих однородным уравнениям теории упругости через гармонические функции [1—9].

В работе [6] дано следующее определение «общей формы» решений однородных уравнений упругости, которое мы здесь воспроизводим.

Определение 1. Форма решений уравнений упругости, выраженная через гармонические функции, называется «общей формой» для данной области D, если для любой системы смещений u, v, w, удовлетворяющей однородным уравнениям упругости в D, любой замкнутой области D', целиком лежащей внутри D, и сколь угодно малой величины ε, существуют гармонические в области D функции φ_1^*, φ_2^*, φ_3^* такие, что компоненты смещений u^*, v^*, w^*, определенные функциями φ_1^*, φ_2^*, φ_3^*, удовлетворяют в D' неравенствам

$$|u-u^*|<\varepsilon, \qquad |v-v^*|<\varepsilon, \qquad |w-w^*|<\varepsilon$$

Иначе говоря, если существует последовательность гармонических в D функций $\overset{*}{\varphi}_{1n}$, $\overset{*}{\varphi}_{2n}$, $\overset{*}{\varphi}_{3n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, входящих в данную форму решений однородных уравнений упругости, таких, что последовательность соответствующих им компонент смещений u_n^*, v_n^*, w_n^* равномерно сходится внутри области D к смещениям u, v, w, то форма решения уравнений упругости называется «общей формой» для данной области D. Такое определение «общности» данной формы решения однородных уравнений упругости представляет интерес с точки зрения приложения этих «общих форм» решений и известных разложений гармонических функций к исследованию частных задач теории упругости.

Эти общие формы решения можно также использовать для нахождения приближенного решения в задачах теории упругости (например вариационным методом Треффтца) и определения погрешности полученного приближенного решения [10—14].

При этом, конечно, может оказаться, что, например, последовательность $\overset{*}{\varphi}_{1n}$ при $n\to\infty$ не стремится к функции φ_1, гармонической всюду в D, и функция $\varphi_1=\lim\varphi_{1n}$ при $n\to\infty$ может иметь особенности на некоторых линиях в области D, однако в случае «общей формы» решений компоненты смещений u_n^*, v_n^*, w_n^* и также их производные равномерно стремятся к смещениям u, v, w и их производным при $n\to\infty$.

В связи с этим целесообразно дать также определение «полной формы» решения однородных уравнений упругости [1].

Определение 2. Если компоненты смещений u, v, w, удовлетворяющие однородным уравнениям упругости в области D, могут быть выражены при помощи данной формы решений через функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, гармонические всюду в D, то форма решения называется «полной формой» для данной области D. Иначе говоря, если

[1] В работе [6] вместо термина «полная форма» также употребляется термин «общая форма», однако из текста и доказанных теорем ясно, в каком смысле следует понимать рассматриваемую «общность формы».

указанные выше гармонические функции $\overset{*}{\varphi}_{1n}$, $\overset{*}{\varphi}_{2n}$, $\overset{*}{\varphi}_{3n}$ равномерно стремятся к функциям φ_1, φ_2, φ_3, гармоническим всюду в области D, то форма решения однородных уравнений упругости есть «полная форма» для области D. Очевидно, что «полная форма» решений для данной области является также и «общей формой».

Однако обратное предложение не имеет места, т. е. форма решения может быть «общей» для данной области D, но может не быть «полной» для той же области D.

Понятие «общей формы» решений применимо к более широкому классу областей D, чем понятие «полной формы» решения.

Отметим здесь, что, исходя из приведенного выше определения «общности» различных форм решений однородных уравнений упругости и пользуясь важной теоремой о том, что гармоническая функция в односвязной области D_1 может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда гармонических полиномов [15—19], при некоторых общих ограничениях, наложенных на поверхность S_1 области D_1, в работе [6] установлена «общность» ряда форм решений уравнений упругости, содержащих три гармонические функции для односвязных и двусвязных областей, и приведена «общая форма» решений для многосвязных областей. При этом оказывается, что нужно также наложить ограничения на выбор начала координат, а в некоторых случаях и на коэффициент Пуассона.

Указанная теорема о представлении гармонической функции равномерно сходящимся рядом гармонических полиномов установлена в известных работах Рунге и Уолша для гармонических функций от двух переменных, в работах Бергмана [15], Сеге [16], Келдыша и Лаврентьева [17], Векуа [18] для гармонических функций от трех переменных при различных ограничениях общего характера, наложенных на свойства поверхности S_1 области D_1 и гармонической функции на S_1. В работе И. Н. Векуа [18] теорема доказана в предположении, что S_1 — поверхность Ляпунова. Если гармоническая функция непрерывна в замкнутой области D_1 (т. е. в $D_1 + S_1$), то ее можно приблизить равномерно гармоническими полиномами в $D_1 + S_1$.

Ниже мы устанавливаем, для каких областей известные формы решений (Папковича [2], Гродского [3], Нейбера [5], и др.), содержащие три гармонические функции, заведомо не являются «полными» (однако для некоторых из этих областей указанные формы являются «общими») и для каких областей эти формы решений заведомо не являются «общими» (и тем более не являются «полными»).

Полученные результаты дополняют некоторые теоремы, доказанные в [1—7].

§ 1. Форма решения Нейбера.

Форму решения Нейбера [5], содержащую три гармонические функции, можно получить из решения Папковича — Нейбера [2—5]

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{B} - \nu^{-1}\operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} + \varphi_0), \qquad \nu = 4(1-\sigma) \\ &\mathbf{B} = \mathbf{i}\varphi_1 + \mathbf{j}\varphi_2 + \mathbf{k}\varphi_3, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \end{aligned} \tag{1.1}$$

(φ_1, φ_2, φ_3 — гармонические функции в области D; x, y, z — координаты точки области D, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, σ — коэффициент Пуассона), если отбросить функцию φ_3, т. е. решение Нейбера имеет вид:

$$\begin{aligned} &u = \varphi_1 - \nu^{-1}\,\partial F/\partial x, \qquad v = \varphi_2 - \nu^{-1}\,\partial F/\partial y \\ &F = x\varphi_1 + y\varphi_2 + \varphi_0 \qquad w = -\nu^{-1}\,\partial F/\partial z \end{aligned} \tag{1.2}$$

В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы компоненты смещений u, v, w, удовлетворяющие однородным уравнениям упругости в некоторой области D, могли быть представлены в форме Нейбера (1.2), где φ_1, φ_2, φ_0 — гармонические функции всюду в D, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной гармонической функции φ_3 существовала гармоническая функция ψ_3 в D такая, что

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial z}=\varphi_3, \qquad \nabla^2\psi_3=\nabla^2\varphi_3=0 \tag{1.3}$$

Эта теорема, очевидно, устанавливает необходимые и достаточные условия того, чтобы форма решения Нейбера была «полной». Например, для бесконечной области Ω^∞, внешней по отношению к сфере (см. [6], § 5), или для области D^∞, внешней по отношению к замкнутой поверхности S, для функции

$$\varphi_3=\sum_{m=1,2,\ldots}\left(c_m+c_m'\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.4}$$

не существует гармонической функции ψ_3, удовлетворяющей (1.3) в Ω^∞ или D^∞ (r — расстояние от центра сферы до точки области, c_m, c_m' — постоянные). Тем же способом легко доказывается, что для двусвязной области Ω_2, заключенной между двумя концентрическими сферами и для указанной функции φ_3 не существует гармонической функции ψ_3, удовлетворяющей (1.3).

Более того, для указанных областей Ω^∞ и Ω_2 имеет место гораздо более сильное утверждение (важное с точки зрения введенного понятия «общности» решения), а именно имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Можно построить гармонические функции φ_3 в Ω^∞ или Ω_2 так, что при достаточно малом ε_0 в некоторых подобластях области Ω^∞ или Ω_2 имеет место неравенство

$$|\partial\psi_3/\partial z-\varphi_3|>\varepsilon_0 \tag{1.5}$$

какова бы ни была гармоническая функция ψ_3 в указанных областях.

Доказательство. Пусть Ω_2 — область, заключенная между двумя концентрическими сферами радиусов r_1 и r_0.

Начало системы координат поместим в центре O сферических поверхностей. Пусть $\varphi_3=1/r$ — гармоническая функция[1] в Ω_2 ($r^2=x^2+y^2+z^2$) и в Ω^∞.

Очевидно, что при таком выборе функций φ_3 достаточно доказать теорему для случая, когда функция ψ_3 симметрична относительно оси z.

Как известно, всякую гармоническую функцию в Ω_2, симметричную относительно оси z, можно представить в виде равномерно сходящегося ряда внутри Ω_2 (т. е. при $r_1<r<r_0$):

$$\psi_3=\sum_{k=0}^{\infty}[a_kr^k+b_kr^{-(k+1)}]\,P_k(\cos\theta) \tag{1.6}$$

где r, θ — сферические координаты, $P_k(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, причем ряд (1.6) можно почленно дифференцировать. Из (1.6) найдем

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial z}=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)\,a_{k+1}r^k-kb_{k-1}r^{-(k+1)}]\,P_k(\cos\theta) \tag{1.7}$$

Далее имеем, принимая во внимание свойства ортогональности сферических функций:

$$\delta(r)=\iint_{S'}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z}-\varphi_3\right)dS'=\iint_{S'}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z}-\frac{1}{r}\right)dS'=4\pi r^2\left[a_1-\frac{1}{r}\right] \tag{1.8}$$

где S' — сферическая поверхность радиуса r с центром в точке O.

[1] Вместо этой функции можно взять функцию (1.4).

Нетрудно убедиться, что при любом выборе коэффициента a_1, входящего в (1.7), минимальное значение максимального отклонения функции $\delta(r)$ на интервале $r_1 < r < r_0$ будет больше величины ε_0', определяемой (1.9):

$$\min_{r_1 \le r \le r_0} \max \delta(r) > \varepsilon_0' = 2\pi r_1^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{1.9}$$

Для этого достаточно заметить, что

$$\min_{r_1 \le r \le r_0} \max \left(a_1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

и достигается при

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}\right)$$

Из (1.8)—(1.9) следует теперь, что подынтегральное выражение (1.8) не может быть меньше величины $\varepsilon_0 = \varepsilon_0' / 4\pi r_0^2$ во всей области Ω_2, т. е. в некоторой подобласти области Ω_2 имеет место неравенство

$$\min_{r_1 < r < r_2} \max \left| \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - \frac{1}{r} \right| > \varepsilon_0$$

что и требовалось доказать.

В случае бесконечной области Ω^∞ следует положить в (1.5)—(1.8) $a_1 = 0$ и, следовательно, получим $\delta(r) = -4\pi r \neq 0$ ни при каком значении r, откуда также следует справедливость неравенства (1.5).

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы решение Нейбера было «общей формой» для данной области D, необходимо и достаточно, чтобы в любой замкнутой области D', лежащей в D, существовали гармонические функции φ_3^* и ψ_3^* такие, что

$$\frac{\partial \psi_3^*}{\partial z} = \varphi_3^*, \qquad |\varphi_3 - \varphi_3^*| < \varepsilon, \qquad \operatorname{grad} |\varphi_3 - \varphi_3^*| < \varepsilon \tag{1.10}$$

где ε — сколь угодно малое число.

Из теоремы 2 следует теперь, что решение Нейбера (1.2) не является «общей формой» (и тем более не является «полной») для бесконечной области Ω^∞, внешней по отношению к сфере, и для двусвязной области Ω_2.

Отсюда следует также, что решение Нейбера (1.2) не является «общей формой» для любой бесконечной области D^∞, внешней по отношению к замкнутой поверхности S, ибо всегда можно из D^∞ вырезать область Ω^∞ и применить теоремы 2 и 3, полагая, как и выше, $\varphi_3 = r^{-1}$, причем начало координат ($r = 0$) лежит внутри области (полости), ограниченной поверхностью S.

Аналогично, если из любой двусвязной области $D^{(2)}$ можно вырезать область Ω_2, то доказанная теорема 2 справедлива и для области $D^{(2)}$ полагая $\varphi_3 = 1/r$, и, следовательно, форма решения (1.2) не будет «общей формой» для этой области $D^{(2)}$. Однако для произвольной односвязной области D_1, ограниченной поверхностью Ляпунова S_1, форма решения Нейбера (1.2) является «общей формой», т. е. имеют место неравенства (1.10). Выясним теперь, для каких областей D форма решения Нейбера является «полной» и для каких не является «полной», т. е. в каких случаях существует и в каких не существует решение уравнений (1.3).

Альманси [20] доказал, что для существования решения уравнений (1.3) в области T при произвольной гармонической функции φ_3 достаточно, чтобы область T была ограничена поверхностью S_T, которая пересекается линией, параллельной оси z, лишь в двух точках. Толотти [21] доказал, что это условие является также необходимым для существования решения уравнений (1.3) при произвольном выборе гармонической функции φ_3.

Укажем теорему Толотти (теорема 4) для функции вида (1.4).

Теорема 4. Если прямая, параллельная оси z, пересекает поверхность S области тела D более чем в двух точках, то можно построить гармоническую функцию φ_3 в D такую, что не существует гармонической функции ψ_3 в D, удовлетворяющей (1.3).

Доказательство. Пусть прямая, параллельная оси z, пересекает поверхность S в точках $A_1, A_2, A_3,\ldots$ Возьмем начало координат в точке O, лежащей вне области D на прямой A_1A_2 $OA_3\ldots$, и возьмем функцию φ_3 в виде (1.4).

Очевидно, что функция

$$\psi_3 = \sum_{m=1,2,\ldots} \left(c_m + c_m' \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \ln (r+z) + \psi_0 (x, y)$$

является гармонической в любой открытой конечной области V', не содержащей точек отрицательной оси z, и удовлетворяет уравнению (1.3) ($\psi_0 (x, y)$ — произвольная гармоническая функция от двух переменных в области V'). В силу единственности аналитического продолжения гармонической функции мы приходим к выводу, что функция ψ_3 не может быть продолжена на всю область D и имеет в D особенность в точках отрицательной оси z. Таким образом, для областей указанного вида и при произвольной гармонической функции φ_3 вида (1.4) не существует гармонической функции ψ_3, удовлетворяющей (1.3) всюду в D.

Отсюда следует на основании теоремы 1, что форма решения Нейбера (1.2) не является «полной формой», если прямая, параллельная оси z, пересекает поверхность S более чем в двух точках.

Однако между двусвязной (многосвязной) и односвязной областью указанного вида (прямая, параллельная оси z, пересекает поверхность S более чем в двух точках) имеется существенное отличие, а именно, если область односвязная, то форма решения Нейбера (1.2) является «общей», а в случае двусвязной (многосвязной) области форма (1.2) не является «общей», хотя в обоих случаях форма (1.2) не является «полной».

§ 2. Форма решения Папковича — Нейбера. Решением Папковича—Нейбера [2—5], содержащим три гармонические функции, мы называем решение, которое получается из (1.1), если отбросить функцию φ_0, т. е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \nu^{-1} \operatorname{grad} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \tag{2.1}$$

Вопрос о возможности представления вектора смещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющего в данной области D однородным уравнениям упругости в виде (2.1), сводится к определению гармонической функции ψ в D, удовлетворяющей уравнению

$$L\psi = \nu\psi - r\frac{\partial \psi}{\partial r} = \varphi_0, \qquad \nabla^2\psi = 0, \qquad \nu = 4(1-\sigma) \tag{2.2}$$

где φ_0 — произвольная гармоническая функция в D, т. е. если существует функция ψ, удовлетворяющая (2.2) в D, то форма решения (2.1) является «полной» для данной области D.

Аналогично, если существует гармоническая функция ψ^* в любой замкнутой области D', целиком лежащей в D, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} L\psi^* = \varphi_0^*, \qquad \nabla^2\psi^* = \nabla^2\varphi_0^* = 0 \qquad & \text{в области } D \\ \operatorname{grad}|\varphi_0 - \varphi_0^*| < \varepsilon \qquad & \text{в области } D' \end{aligned} \tag{2.3}$$

где ε — сколь угодно малое число, то форма решения (2.1) является «общей формой» для данной области D.

Для произвольной области D и произвольной гармонической функции φ_0 заведомо не существует гармонической функции ψ, удовлетворяющей (2.2) во всей области D. Кроме того, существование функции ψ_0 зависит от выбора начала координат [6].

Докажем более сильное утверждение (важное для введенного понятия «общей формы» решения), являющееся некоторым развитием результатов работы [6].

Теорема 5. В области Ω_2, заключенной между двумя концентрическими сферическими поверхностями, внутренней S_1 и внешней S_0, можно построить гармонические функции φ_0 такие, что при достаточно малом ε_0 и любой гармонической функции ψ в Ω_2 имеет место неравенство

$$\int_{\Omega_2} (L[\psi] - \varphi_0)^2 \, d\Omega_2 > \varepsilon_0 \tag{2.4}$$

если начало координат ($x = y = z = 0$, $r = 0$) лежит вне области D_1, ограниченной внутренней сферической поверхностью S_1.

Аналогичная теорема может быть указана для области Ω^∞, внешней по отношению к поверхности S_1, если начало координат лежит в области Ω^∞.

Из теоремы 5 и на основании (2.3) следует, что при указанном выборе начала координат форма решения (2.1) не является «общей формой» и тем более не является «полной формой» для области Ω_2.

Отсюда также следует, что в случае конечной трехсвязной области, ограниченной сферическими поверхностями S_0, S_1, S_2, не имеющими общих точек, и в случае бесконечной области Ω_2^∞, внешней по отношению к сферическим поверхностям S_1 и S_2, не имеющим общих точек, форма решения (2.1) не является «общей формой» для указанных областей при произвольном выборе начала координат.

Доказательство. Положим $\varphi_0 = \rho^{-1}$, где ρ — расстояние от точки области Ω_2 до центра O сферических поверхностей[1] (функция φ_0 — гармоническая в области Ω_2).

Обозначим радиусы сферических поверхностей S_1 и S_0 через ρ_1 и ρ_0 и положим для простоты $\rho_1 = 1$ ($\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$).

Пусть начало координат, точка P ($r = 0$), взято на расстоянии z_0 от центра O, а ось z направлена по прямой OP.

Наряду с системой координат x, y, z введем систему координат x', y', z' с центром в точке O и направим ось z' по линии OP, а ось x' параллельно оси x. Имеем

$$\begin{gathered} x = x', \qquad y = y', \qquad z = z' - z_0 \\ r^2 = (PM)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + (z' - z_0)^2 \\ \rho^2 = (OM)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{gathered}$$

где M — произвольная точка области Ω_2.

[1] Вместо функции $\varphi_0 = \rho^{-1}$ можно также взять функции вида (1.4).

Тогда уравнение (2.2) можно преобразовать к виду

$$L\psi = \nu\psi - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + z_0 \frac{\partial\psi}{\partial z'} = \varphi_0 \tag{2.5}$$

При таком выборе систем координат x, y, z и x', y', z' и в силу симметрии функции $\varphi_0 = \rho^{-1}$ относительно оси z, очевидно, достаточно доказать неравенство (2.4) в предположении, что функция ψ, входящая в (2.4), симметрична относительно оси z или z'.

Далее, как известно, всякая гармоническая функция ψ в Ω_2, симметричная относительно оси z, представима внутри Ω_2 в виде равномерно сходящегося ряда (1.5), где r заменено на ρ.

Рассмотрим гармоническую функцию ψ_n в Ω_2, являющуюся отрезком ряда (1.6):

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n} [a_k\rho^k + b_k\rho^{-(k+1)}]\, P_k(\cos\theta) \tag{2.6}$$

где ρ, θ — сферические координаты, $P_k(\cos\theta)$ —полиномы Лежандра.

Из (2.5) — (2.6) с учетом (1.7) найдем

$$L[\psi_n] = \sum_{k=0}^{n+1} \{[(\nu - k)\, a_k + z_0(k+1)\, a_{k+1}]\, \rho^k + [(\nu + k + 1) b_k - z_0 k b_{k-1}]\, \rho^{-(k+1)}\}\, P_k(\cos\theta)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} = b_{n+1} = b_{-1} = 0 \tag{2.7}$$

Введем новые переменные a_k' и b_k':

$$\begin{aligned}(\nu - k)\, a_k' + z_0 (k+1)\, a_{k+1} &= a_k' \\ (\nu + k + 1)\, b_k - z_0 k b_{k-1} &= b_k'\end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

Нетрудно убедиться непосредственно, что, если $\nu = 4(1 - \sigma)$ — не целое число (что будет при $\sigma \neq 1/4$), постоянные a_k и b_k определяются однозначно, через переменные a_k' и b_k' соответственно.

Из второй системы двучленных уравнений (2.8), учитывая, что $b_{-1} = b_{n+1} = 0$, найдем

$$b_n = \frac{1}{\mu_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_k}{\nu + k + 1} b_k', \qquad \frac{\partial b_n}{\partial b_k'} = \frac{1}{\mu_n} \frac{\mu_k}{\nu + k + 1}$$

$$\mu_k = \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_k, \qquad \mu_n = \alpha_0\alpha_1, \ldots, \alpha_n \tag{2.9}$$

$$\alpha_0 = \nu + 1, \qquad \alpha_k = \frac{\nu + k + 1}{k} \frac{1}{z_0} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.7), получим

$$L[\psi_n] - \varphi_0 = L[\psi_n] - \rho^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [a_k'\, \rho^k + b_k'\, \rho^{-(k+1)}]\, P_k(\cos\theta) + (n+1)\, z_0 b_n \rho^{-(n+2)}\, P_{n+1}(\cos\theta) - \rho^{-1} \tag{2.10}$$

Подставляя далее (2.10) в левую часть (2.4) и принимая во внимание свойства ортогональности полиномов Лежандра, найдем

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_2} \{L[\psi_n] - \rho^{-1}\}^2\, d\Omega_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [\alpha_k\, a_k'^2 + 2\gamma_k\, a_k'\, b_k' + \beta_k\, b_k'^2] + B_n\, b_n^2 - 2(\gamma_0 a_0' + \beta_0 b_0') + \beta_{01} \tag{2.11}$$

Здесь

$$\alpha_k = [(2k+1)(2k+3)]^{-1}(\rho_0^{2k+3}-1), \qquad \gamma_k = [2(2k+1)]^{-1}(\rho_0^2-1)$$
$$\beta_k = [(2k+1)(2k-1)]^{-1}(1-\rho_0^{-2k+1}), \qquad B_n = (n+1)^2 z_0^2 \beta_{n+1} \tag{2.12}$$

Найдем наименьшее значение величины Φ, которую можно записать в виде $\Phi = \Phi_2 + \Phi_1 + \Phi_0$, где Φ_2 — квадратичная форма, Φ_1 — линейная форма от переменных a_k', b_k' и $\Phi_0 = \beta_0$ — свободный член.

Из (2.11) с учетом (2.9) найдем следующую систему уравнений для определения коэффициентов a_k', b_k', сообщающие минимальное значение величине Φ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial a_k'} = \alpha_k a_k' + \gamma_k b_k' = f_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial a_k'} \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial b_k'} = \gamma_k a_k' + \beta_k b_k' + \frac{B_n \mu_k}{(\nu+k+1)\mu_n} b_n = g_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial b_k'}$$

$$f_k = g_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$f_0 = \gamma_0 = \frac{1}{2}(\rho_0^2-1), \qquad g_0 = \beta_0 = \rho_0 - 1$$

Далее, очевидно,

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial a_k'}a_k' + \frac{\partial\Phi_2}{\partial b_k'}b_k'\right) + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a_k'}a_k' + \frac{\partial\Phi_1}{\partial b_k'}b_k'\right)\right] + \beta_0$$

откуда, принимая во внимание уравнения (2.13) получим

$$\Phi_{\min} = \beta_0 - \sum_{k=0}^{n}(f_k a_k' + g_k b'_k) = \beta_0 - (\gamma_0 a_0' + \beta_0 b_0') = \frac{\Delta_0}{\alpha_0}(b_0'-1)$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \gamma_0 \\ \gamma_0 & \beta_0 \end{vmatrix} = \alpha_0\beta_0 - \gamma_0^2, \qquad a_0' = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}b_0' \tag{2.14}$$

Из уравнений (2.13) находим путем исключения неизвестных

$$b_k' + \frac{B_n \mu_k}{\mu_n(\nu+k+1)}\frac{\alpha_k}{\Delta_k}b_n = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$b_0' + \frac{B_n \mu_0}{\mu_n(\nu+1)}\frac{\alpha_0}{\Delta_0}b_n = 1 \tag{2.15}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_k & \gamma_k \\ \gamma_k & \beta_k \end{vmatrix} = \alpha_k\beta_k - \gamma_k^2 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

откуда

$$b_k' = \frac{\nu+1}{\nu+k+1}\frac{\mu_k}{\mu_0}\frac{\alpha_k}{\alpha_0}\frac{\Delta_0}{\Delta_k}(b_0'-1) \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) во второе уравнение (2.15) и учитывая при этом выражение для b_n из (2.9), найдем

$$(b_0'-1)\left[1 + \frac{B_n}{\mu_n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_k^2\alpha_k}{(\nu+k+1)^2\Delta_k}\right] = \frac{B_n}{\mu_n^2}\frac{\mu_0^2}{(\nu+1)^2}\frac{\alpha_0}{\Delta_0} \tag{2.17}$$

Из (2.14) и (2.17) получим окончательно

$$\Phi_{\min} = (\nu+1)^{-2}\left[\frac{1}{B_n}\frac{\mu_n}{\mu_0} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mu_k}{\mu_0}\right)^2\frac{\alpha_k}{(\nu+k+1)^2\Delta_k}\right]^{-1} \tag{2.18}$$

Исследуем выражение (2.18).

Прежде всего заметим, что $\Phi_{\min} < \beta_0 = \rho_0 - 1$, ибо если в (2.11) положить $a_k' = b_k' = 0$, то из (2.9) найдем $b_n = 0$ и, следовательно, $\Phi_{\min} \leqslant \beta_0$.

Отсюда вытекает, что выражение в квадратных скобках (2.18) больше некоторой постоянной величины.

Далее из (2.12) имеем

$$\frac{1}{(\nu+k+1)^2}\frac{\alpha_k}{\Delta_k} = \frac{(2k+1)(2k-1)}{(\nu+k+1)^2}\left[1 - \rho_0^{-2k+1} - \frac{2k-1}{4(2k+3)}\frac{(\rho_0^2-1)^2}{\rho_0^{2k+3}-1}\right]^{-1}$$

$$B_n = \frac{(n+1)^2 z_0^2}{(2n+1)(2n-1)}(1-\rho_0^{-2k+1}) \tag{2.19}$$

откуда следует, что при $\rho_\infty > 1$ и $k \to \infty$, $n \to \infty$

$$\frac{1}{(\nu+k+1)^2}\frac{\alpha_k}{\Delta_k} \to 4, \qquad B_n \to \frac{z_0^2}{4}$$

Из (2.9) далее находим

$$\frac{\mu_k}{\mu_0} = z_0^{-k}\prod_{s=1}^{k}\frac{\nu+s+1}{s} \tag{2.20}$$

Пусть $z_0 < 1$, т. е. пусть начало координат, точка P, лежит внутри области D_1, ограниченной сферой S_1, радиуса $\rho_1 = 1$. Тогда как видно из (2.18) — (2.20), выражение, стоящее в квадратных скобках (2.18), может быть сделано больше любого положительного числа N при достаточно большом значении n и, следовательно, значение $\Phi_{\min}$ будет меньше сколь угодно малого ε, если только n достаточно велико.

Иначе говоря, ряд в квадратных скобках (2.18) расходится при $z_0 < 1$ и $n \to \infty$ и, следовательно, $\Phi_{\min} \to 0$.

Пусть теперь $z_0 > 1$, т. е. начало координат, точка P, лежит вне области D_1; иначе говоря, точка P взята либо в области Ω_2, либо вне области D_0, ограниченной сферой S_0 радиуса ρ_0.

Тогда при достаточно большом n, как это следует из (2.20), отношение μ_n/μ_0, входящее в (2.18), может быть сделано меньше любого малого положительного числа ε.

В самом деле, имеем

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = z_0^{-n}\prod_{s=1}^{n}\frac{\nu+s+1}{s} < \left[\left(\frac{\nu+1}{s_0}+1\right)z_0^{-1}\right]^{n-s_0}\prod_{s=1}^{s_0}\frac{\nu+s+1}{s}$$

что при $((\nu+1)/s_0+1)\,z_0^{-1} < 1$ и достаточно большом n может быть сделано сколько угодно мало.

Далее нетрудно доказать, пользуясь признаком сходимости Даламбера, что ряд, стоящий в квадратных скобках (2.18), абсолютно сходится при $n \to \infty$.

Действительно, имеем, учитывая (2.20):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\right)^2\frac{\alpha_{n+1}\Delta_n}{\alpha_n\Delta_{n+1}}\left(\frac{\nu+n+1}{\nu+n+2}\right)^2 z_0^{-2}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{\Delta_{n+1}}\frac{\Delta_n}{\alpha_n}z_0^{-2}\right| = z_0^{-2} < 1$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках (2.18) ограничено сверху некоторым числом N_0, не зависящим от n, и

$$\Phi_{\min} > \frac{1}{(\nu+1)^2 N_0} = \varepsilon_0 \tag{2.21}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, при $z_0 > 1$ имеет место неравенство (2.4). Аналогичным образом доказывается неравенство (2.4) для области Ω^∞, внешней по отношению к сфере S_1, если начало координат лежит в области Ω^∞, для чего достаточно в приведенных формулах (2.6) — (2.20) положить $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Из доказанной теоремы 5 следует, что если из конечной или бесконечной области вырезаны две сферические полости, то неравенство (2.4) имеет место при произвольном выборе начала координат и, следовательно, форма (2.1) не является «общей» для этой области.

Далее, если из конечной или бесконечной области D вырезаны две полости, ограниченные замкнутыми поверхностями S'_1 и S'_2 (не имеющими общих точек между собой и с поверхностью S_0 области D_0), лежащими внутри мысленно выделенных сферических полостей, ограниченных сферическими поверхностями S_1 и S_2 (также не имеющими между собой общих точек), то для этой области имеет место неравенство (2.4) при произвольном выборе начала координат и, следовательно, форма (2.1) не является «общей формой» для указанной области при любом выборе начала координат.

Рассмотрим теперь вопрос о том, для каких областей форма решения Папковича — Нейбера (2.1) является «полной» и для каких областей эта форма заведомо «неполная».

Рассматривая систему уравнений (2.2) с различными коэффициентами ν и записывая решение этих уравнений в виде

$$\psi = -r^\nu \int r^{-(\nu+1)} \varphi_0 \, dr + C r^\nu \tag{2.22}$$

где C — зависящая от направления радиуса r постоянная интегрирования, Е. Трефффтц [4] отмечает, что если в (2.22) за нижний предел интегрирования взять $r = 0$ (начало координат лежит внутри области тела) и положить $C = 0$, то функция

$$\psi = -r^\nu \int_0^r r^{-(\nu+1)} \varphi_0 \, dr \tag{2.23}$$

будет гармонической, удовлетворяющей уравнениям (2.2) при $\nu < 0$ (см. также Бергман [15]).

Юбанкс и Штернберг [7] доказали, что функция (2.23) — гармоническая при $\nu > 0$ (исключая значение $\nu = 3$, $\sigma = 1/4$) в области, звездной относительно начала координат, т. е. если луч, идущий из начала координат, взятого внутри области, пересекает поверхность тела в одной точке. Так как при $\nu > 0$ интеграл в (2.23) несобственный (если начало координат лежит внутри области), то для доказательства этого предложения Юбанкс и Штернберг [7] предварительно выделяют из функции φ_0 несколько первых членов разложения функции φ_0 в ряд по шаровым функциям вблизи начала координат.

Мы докажем сперва, что если луч ON, где O — начало координат, пересекает поверхность S_R области R не более чем в двух точках, то при соответствующем выборе постоянной C функция (2.22) будет гармонической в области R, и далее докажем, что если луч ON пересекает поверхность S_R, более чем в двух точках, то может не существовать гармонической функции ψ, удовлетворяющей (2.2) в области R' при некотором выборе гармонической функции φ_0. Отсюда будет следовать, что форма решений (2.1) является «полной» для области R и не является «полной» для области R'.

Пусть начало координат O лежит вне области R и луч ON пересекает поверхность S области R в точках A_1 и A_2. Рассмотрим функцию

$$\psi = -r^{\nu}\int_{r_1}^{r} r^{-(\nu+1)}\varphi_0\,dr + Cr^{\nu} \tag{2.24}$$

где C зависит лишь от сферических координат θ, φ, и запишем оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\varphi}{}^2\psi = 0, \qquad \nabla_{\theta,\varphi}{}^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

где $\nabla_{\theta,\varphi}{}^2\psi$ — дифференциальный оператор, зависящий только от сферических координат θ, φ. Далее, учитывая, что

$$\frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\varphi}{}^2\left[r^{\nu}\int_{r_1}^{r} r^{-(\nu+1)}\varphi_0\,dr\right] = -r^{\nu-2}\int_{r_1}^{r} r^{-(\nu+1)}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right)dr =$$

$$= r^{\nu-2}\left\{\left[-(\nu+1)\,r^{-\nu}\varphi_0 - r^{-\nu+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right]_{r_1}^{r} - \nu(\nu+1)\int_{r_1}^{r} r^{-(\nu+1)}\varphi_0\,dr\right\}$$

получим из (2.24)

$$\nabla^2\psi = r^{\nu-2}\{\nabla_{\theta,\varphi}{}^2C + \nu(\nu+1)\,C - \theta_0\} \tag{2.25}$$

$$\theta_0 = r_1{}^{-\nu}\left[(\nu+1)\,\varphi_0 + r_1\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right]_{r=r_1} \tag{2.26}$$

Из (2.26) видно, что для того, чтобы функция ψ была гармонической в области R, необходимо, чтобы функция $C = C(\theta, \varphi)$ удовлетворяла уравнению

$$\nabla_{\theta,\varphi}{}^2 C + \nu(\nu+1)\,C = \theta_0(\vartheta, \varphi) \tag{2.27}$$

Способ построения решения уравнения (2.27) путем введения функции комплексного переменного указан И. Н. Векуа [19].

Случай, когда $\theta \to {}^1/_2\pi$ требует дополнительного исследования.

Этот случай будет иметь место, если, например, двусвязная конечная область тела R ограничена двумя замкнутыми поверхностями S_{1R} и S_{2R}, причем поверхность S_{1R} лежит целиком внутри поверхности S_{2R} и начало координат O лежит внутри полости, ограниченной поверхностью S_{1R}, причем луч ON пересекает каждую из поверхностей S_{1R} и S_{2R} лишь в одной точке.

Однако задача о построении гармонической функции ψ для этой двусвязной области легко приводится к двум более простым задачам.

Пусть

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + \varphi_{02}, \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

где φ_{01}, ψ_1 — гармонические функции в области $R_1{}^{\infty}$, внешней по отношению к поверхности S_{1R}, а φ_{02}, ψ_2 — гармонические функции в области R_2, внутренней по отношению к поверхности S_{2R}. Если существуют функции ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющие уравнению (2.2), с правыми частями φ_{01} и φ_{02} соответственно в областях R_1^{∞} и R_2, то тем самым существует функция ψ, удовлетворяющая уравнению (2.2). Существование функции ψ_1 вытекает непосредственно из того, что функция (2.23), где φ_0 заменено на φ_{01}, а ψ на ψ_1, удовлетворяет уравнению (2.2), исключая значение $\nu = 3$ ($\sigma = 0{,}25$).

Полагая далее аналогично (2.23)

$$\psi_2 = -r^{\nu} \int\limits_{\infty}^{r} r^{-(\nu+1)} \varphi_{02}\, dr \tag{2.82}$$

можно убедиться непосредственной проверкой, что ψ_2 — гармоническая функция. Это следует также из (2.26), если учесть, что при $r_1 = \infty$ имеем $C = 0$ и $\nabla^2\psi_2 = 0$.

На основании изложенного форма решения (2.1) является «полной» для области R при указанном выборе начала координат.

Докажем теперь, что если луч ON пересекает поверхность $S_{R'}$ области R' более чем в двух точках, может не существовать гармонической функции ψ, удовлетворяющей уравнению (2.2).

В самом деле, пусть начало координат ($r = 0$), точка O, лежит внутри области тела и луч ON пересекает поверхность $S_{R'}$ в точках A_1, A_2, $A_3, \ldots$

Пусть точка O_1 принадлежит отрезку $A_1 A_2$, лежащему вне области R'.

Положим в (2.2) $\varphi_0 = -1/\rho$, где ρ — расстояние от точки O_1 до произвольной точки M области R' ($r = OM$, $\rho = O_1M$). Так как функция

$$\psi' = r^{\nu} \int\limits_{0}^{r} r^{-(\nu+1)} \frac{1}{\rho}\, dr \tag{2.29}$$

есть гармоническая внутри открытой области V', полученной путем удаления из любой конечной области V точек полупрямой $O_1 A_2 A_3, \ldots$, и, кроме того, удовлетворяет в V' уравнению

$$\nu\psi' - r\frac{\partial\psi'}{\partial r} = \varphi_0 = -\frac{1}{\rho} \tag{2.30}$$

то функция ψ', определяемая (2.29), есть гармоническая в открытой области R'', полученной из R' путем удаления точек полупрямой $O_1A_2A_3 \ldots$

Далее, так как при $\sigma \neq 0.25$ функция (2.29)— единственная гармоническая функция в окрестности начала координат (точки O), удовлетворяющая (2.2), то в силу единственности аналитического продолжения гармонической функции мы заключаем, что функция ψ', определяемая (2.29), есть аналитическое продолжение гармонической функции, удовлетворяющей уравнению (2.30) в окрестности точки O на всю открытую область R''.

Докажем, что ψ' может принимать сколь угодно большие значения вблизи прямой $O_1 A_2 A_3 \ldots$ В самом деле, полагая

$$OO_1 = r_0, \quad r > r_0, \quad \nu = 4(1-\sigma), \quad 0 < \sigma < \tfrac{1}{2} \qquad (\sigma \neq \tfrac{1}{4})$$

найдем

$$\psi'(r,\theta) = r^{\nu}\int\limits_0^r r^{-(\nu+1)}\frac{1}{\rho}\,dr = r^{\nu}\int\limits_0^r r^{-(\nu+1)}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2rr_0\cos\theta + r_0^2}} >$$

$$> r^{\nu}\, r^{-(\nu+1)} \int\limits_{r_0\cos\theta}^{r} \frac{dr}{\sqrt{(r - r_0\cos\theta)^2 + (r_0\sin\theta)^2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\ln\Big[(r - r_0\cos\theta) + \sqrt{(r - r_0\cos\theta)^2 + (r_0\sin\theta)^2}\Big]_{r_0\cos\theta}^{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\ln(r - r_0\cos\theta + \rho) - \ln(r_0\sin\theta)\right] \tag{2.31}$$

где r, θ — сферические координаты.

Очевидно, что правая часть (2.31) может принимать сколь угодно большие значения при $\theta \to 0$.

Из изложенного следует, что не существует функции ψ, гармонической всюду в R' и удовлетворяющей уравнению (2.30).

Отсюда заключаем, что форма решения (2.1) не является «полной» для областей вида R', если начало координат (точка O) лежит внутри области R'.

Пусть теперь точка O (начало координат) лежит вне области R' и луч ON пересекает поверхность $S_{R'}$ в точках $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ Возьмем точку O_1 на отрезке A_2A_3, лежащем вне области R', и положим, как и выше, $\varphi_0 = -\rho^{-1}$, где $\rho = O_1M$, $r = OM$.

Добавляя к правой части (2.29) выражение Cr^ν, где C — функция, зависящая только от сферических координат θ и φ, получим на основании (2.24) общее решение уравнения (2.30). При этом, так как функция Cr^ν должна быть гармонической функцией вблизи точек прямой A_1A_2, то она будет также гармонической функцией вблизи прямой $O_1A_3A_4 \ldots$ и, следовательно, функция $\psi' + Cr^\nu$ будет принимать сколь угодно большие значения вблизи прямой $O_1A_3A_4 \ldots$

Отсюда вытекает, что и в этом случае не существует гармонической функции всюду в R', удовлетворяющей уравнению (2.2), и форма решения (2.1) не является «полной» для области R' и в случае, когда начало координат лежит вне области R', если только луч ON пересекает поверхность $S_k{}'$ более чем в двух точках.

Однако между односвязной и многосвязной областями вида R' имеется существенное отличие с точки зрения данного выше определения «общности» различных форм решения уравнений упругости а именно, для односвязной области вида R', ограниченной замкнутой поверхностью Ляпунова S, имеет место неравенство (2.3), т. е. форма решения (2.1) является «общей», а в случае многосвязной области (в частности, вида R') неравенство (2.3) не имеет места для произвольной гармонической функции φ_0 и форма решения (2.1) не является «общей формой».

§ 3. «Общая» форма и «полная» форма решений для многосвязной области. Пусть конечная многосвязная область D ограничена замкнутой поверхностью Ляпунова S_0 и замкнутыми поверхностями S_i $(i=1, \ldots, k)$, лежащими внутри области D_0, ограниченной поверхностью S_0, и не имеющими между собой и с поверхностью S_0 общих точек.

Как показано в работе [6], если произвольный гармонический вектор $\mathbf{B}$ представить в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_i \tag{3.1}$$

где $\mathbf{B}_0$ — гармонический вектор в области D_0, $\mathbf{B}_i$ — гармонический вектор в области $D_i{}^\infty$, внешней по отношению к поверхности S_i, то «общей формой» решения для области D будет

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{B}_i - \nu^{-1} \operatorname{grad} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{B}_i) \qquad (i = 1, \ldots, k) \\ \mathbf{u}_0 &= \mathbf{B}_0 - \nu^{-1} \operatorname{grad} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{B}_0), \qquad \sigma \neq \tfrac{1}{4} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$r_i{}^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$$

где точка O_i с координатами x_i, y_i, z_i лежит внутри области D_i, ограниченной поверхностью S_i, x, y, z — координаты произвольной точки области D. Вектор $\mathbf{u}_0$ можно также записать в форме Нейбера (1.2) или в других формах, являющихся «общими» для области S_0 (работа [6] § 7).

Если поверхность S_0 отсутствует, то D — бесконечная многосвязная область и в (3.1)—(3.3) следует положить $\mathbf{B}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$.

Из данного в [6] доказательства общности решения (3.1) — (3.3) немедленно следует, что если области D_i являются сферическими полостями, S_0 — сферической поверхностью, то форма решения (3.1)—(3.3) является также и «полной формой» для этой области.

Для этого надо перейти к пределу, считая $n \to \infty$ в разложениях по сферическим полиномам (формулы (3.1) — (3.11) и другие работы [6]), ибо ряды по сферическим полиномам равномерно сходятся в соответствующих областях.

Из изложенного далее следует, что форма (3.2)—(3.3) является «полной формой», если каждая форма решения, входящая в (3.2), является «полной» для соответствующей односвязной области (конечной D_0 или бесконечной D_i^∞). Последний случай имеет место, например, если луч O_iN пересекает поверхность S_i в одной точке, а луч O_0N не более чем в двух точках с учетом наложенных выше ограничений (§ 2). Если же луч O_0N пересекает поверхность S более чем в двух точках, а луч O_iN пересекает поверхность S_i более чем в одной точке (а следовательно, более чем в двух точках, ибо точка O_i лежит внутри области D_i), то форма решения (3.2)—(3.3) по доказанному (§ 2) не является «полной формой» для этой области.

§ 4. О форме решения Папковича — Нейбера при $\sigma = 0.25$. Прежде всего легко доказать, что если начало координат лежит внутри области тела и $\sigma = 1/4$, то форма решения (2.1) не только не является «полной», но и не является «общей».

Пусть, например, область шара Ω лежит внутри области D и начало координат совпадает с центром шара. Полагая в (2.2) и (2.4)

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y_n, \qquad \varphi_0 = \rho^3 Y_3', \qquad \sigma = \frac{1}{4}, \quad \nu = 4(1-\sigma) = 3 \tag{4.1}$$

где Y_n — сферическая функция порядка n, получим

$$\int_\Omega [L(\psi) - \varphi_0]^2 d\Omega = \int_\Omega \Big[\sum_{n=0}^{\infty} (3-n)\rho^n Y_n - \rho^3 Y_3'\Big]^2 d\Omega =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega [(3-n)\rho^n Y_n]^2 d\Omega + \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_0, \qquad \varepsilon_0 = \int_\Omega [\rho^3 Y_3']^2 d\Omega \tag{4.2}$$

Из (4.2) уже следует, что форма (2.1) не является «общей» при $\sigma = 1/4$, если начало координат лежит внутри области D. Любопытно, однако, что если начало координат лежит вне области шара Ω, то форма решения (2.1) является «общей» и «полной» для области шара Ω при любом значении $0 < \sigma < 1/2$. Это следует непосредственно из (2.24)—(2.29).

Рассмотрим интересный частный случай, когда $\varphi_0 = r^3 Y_3' = r^3 P_3(\cos\theta)$, где r — расстояние от P до точки области M шара Ω и положительная ось z направлена по линии PO (O — центр шара). В этом случае можно непосредственно найти решение уравнения (2.2):

$$\nu\psi - r\frac{\partial\psi}{\partial r} = \varphi_0 = r^\nu P_\nu, \qquad \nu = 3 \tag{2.2}$$

где P_ν — обобщенная функция Лежандра, не прибегая к формулам (2.24)—(2.29). Решением уравнения (2.2) является функция

$$\psi = \frac{\partial}{\partial\nu}(r^\nu P_\nu)$$

рассмотренная Бромвичем [22]. При $\nu = 3$ эта функция имеет вид:

$$\psi = r^3 \ln \frac{r+z}{2} P_3(\cos\theta) - 2r^3 \left\{\frac{5}{6} P_2(\cos\theta) - \frac{3}{10} P_1(\cos\theta) + \frac{1}{12}\right\} \qquad (4.3)$$

Легко непосредственно проверить, что (4.3) удовлетворяет уравнению (2.2) при $\nu = 3$ и является гармонической в области шара Ω (т. е. при $z > 0$).

Поступила 10 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Boussinesq I. Applications des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris. 1889.
2. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. Изв. АН СССР, сер. матем. и естеств. наук, № 10, 1932.
3. Гродский Г. Д. Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи ньютоновых потенциалов и гармонических функций. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, № 4, 1935.
4. Треффтц Е. Математическая теория упругости. ГТТИ, 1934.
5. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. ZAMM, Bd. 14, Nr. 4, 1934.
6. Слободянский М. Г. Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
7. Eubanks R. A., Sternberg E. On the completeness of the Boussinesq — Papkovich stress functions. I. Rational Mech. und Analysis, vol. 5, No 5, pp. 735—746, 1956.
8. Крутков Ю. А. Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд-во АН СССР, 1949.
9. Sokolnikof I. S. Mathematical Theory of Elasticity. New York, 1956.
10. Trefftz E. Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen verfahren. Mathem. Ann., Bd. 100, 1928, 503—521.
11. Diaz J. B., Greenberg H. J. Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity. Ouart. appl. Math., vol. 6, 1948,
12. Synge J. L. Upper and lower bounds for the solution of problems in elasticity, Proc. Roy. Irish, Acad. A. 53, 1950.
13. Слободянский М. Г., Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости. ПММ, т. XVI вып. 4, 1952.
14. Washizu K. Bounds for solutions of boundary valueproblems in elasticity., J. Math. Phys. 32, 1953.
15. Bergman St. Über Bestimmung der elastischen Spannungen und verschiebungen in einem konvexen Körper. Math. Annalen, Bd. 98, 1927.
16. Frank P., v. Mises R. Die Differential und Integral-gleichungen der Mechanik und Physik. Erster (matem.) Teil., 1937.
17. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. Об устойчивости решений задачи Дирихле. Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 1937.
18. Векуа И. Н. О полноте системы гармонических полиномов в пространстве. Докл. АН СССР, т. ХС, № 4, 1953.
19. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, 1948.
20. Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differentiale $\Delta^{2n} = 0$. Annali di mat. pura et applicata, ser. III, vol. 2, 1899.
21. Tolotti C. Sulla struttura delle funzioni bi — iperarmoniche in tre variabili indipendenti. Atti Acad. Naz. Lincei, Rend. classe Sci., Fis., Mat., Nat., ser. 8, vol. 1, p. p. 359—363, 1946.
22. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во Иност. лит., 1952.