**Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959**
**Отделение технических наук Академии наук Союза ССР**

# О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

**Витольд Новацкий**

(Варшава)

В работе изучаются термические напряжения, вызванные действием нестационарных источников тепла, произвольно расположенных в упругой и вязко-упругой средах. Рассматривается построение функций Грина для напряжений, вызванных действием мгновенного, сосредоточенного источника тепла. В §§ 1 и 2 рассматривается напряженное состояние в абсолютно упругих телах, в § 3 — в вязко-упругих телах.

**§ 1. Напряженное состояние в упругом неограниченном пространстве.** Как известно из теории теплопроводности, температурное поле, вызванное действием мгновенного и сосредоточенного источника тепла, выражается формулой

$$T = \frac{Q}{(\pi\vartheta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right), \qquad \vartheta = 4\varkappa t, \qquad \varkappa = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{1.1}$$

Здесь $W = Q\rho c$ есть количество тепла, полученное единицей объема в единицу времени, $\rho$ — плотность, $c$ — удельная теплота, $\lambda$ — коэффициент теплопроводности. Функция (1.1) является решением уравнения

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q}{\varkappa}\delta(R)\,\delta(t) \tag{1.2}$$

$$T(R,\ t)_{t=0} = 0, \qquad T(\infty,\ t) = 0, \qquad T(R,\ \infty) = 0$$

где $\delta$ — символ Дирака.

Рассмотрим сперва квазистатическую задачу. Уравнения теории упругости для перемещений, если пренебречь инерционными членами, можно представить в виде

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.3}$$

$\lambda$, $\mu$ — суть постоянные Ламе, $\alpha_t$ — коэффициент теплового расширения.

Введем потенциал термоупругого перемещения $\varphi$. Этот потенциал связан с перемещением зависимостью [1]

$$u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.4}$$

Вводя функцию $\varphi$ в уравнения (1.3), сводим систему уравнений перемещения (1.3) к одному уравнению [1]

$$\nabla^2\varphi = \vartheta_0 T \qquad \left(\vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\right) \tag{1.5}$$

Зная функцию $\varphi$, можно по формулам [1] определить напряжения

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\varphi \tag{1.6}$$

где $G$ — есть модуль сдвига, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

В ограниченном теле функция $\varphi$ в лучшем случае удовлетворяет только части краевых условий, так что к напряжениям, выраженным формулой (1.6), следует прибавить так подобранные напряжения, чтобы удовлетворить всем краевым условиям.

В рассматриваемой задаче воспользуемся сферической симметрией; имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}=\vartheta_0 T, \qquad u_R=\frac{\partial\varphi}{\partial R} \tag{1.7}$$

$$\sigma_{RR}=-2G\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}, \qquad \sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\vartheta\vartheta}=-2G\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}\right) \tag{1.8}$$

Выражение (1.1) для температурного поля при помощи преобразования Лапласа можно представить следующим интегралом Ганкеля—Фурье

$$\theta=\frac{Q}{2\pi^2\varkappa}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\,(\alpha^2+\gamma^2+p/\varkappa)^{-1}J_0(\alpha r)\cos\gamma z\,d\alpha\,d\gamma$$

$$\theta=\int_0^\infty e^{-pt}T(R,\ t)\,dt \tag{1.9}$$

При помощи преобразования Лапласа из уравнения (1.7), принимая $Q=1$, имеем

$$\Phi^*=-\frac{\vartheta_0}{2\pi^2\varkappa}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\left(\alpha^2+\gamma^2+\frac{p}{\varkappa}\right)^{-1}(\alpha^2+\gamma^2)^{-1}J_0(\alpha r)\cos\gamma z\,d\alpha\,d\gamma \tag{1.10}$$

После проведения обратного преобразования Ганкеля—Фурье, получим

$$\Phi^*=\frac{\vartheta_0}{4\pi Kp}\left[\exp\left(-R\sqrt{\frac{p}{\varkappa}}\right)-1\right]$$

Отсюда

$$\varphi^*=-\frac{\vartheta_0}{4\pi R}\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}, \qquad \vartheta=4\varkappa t, \qquad \operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-\eta^2}d\eta \tag{1.11}$$

Зная функцию $\varphi^*$, определим напряжения [2]

$$\sigma^*_{RR}=-\frac{4GA}{R^3}\left[\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{2R}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right] \tag{1.12}$$

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}=\sigma^*_{\vartheta\vartheta}=\frac{2GA}{R^3}\left[\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{2R}{\sqrt{\pi\vartheta}}\left(1+\frac{2R^2}{\vartheta}\right)\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right] \qquad \left(A=\frac{\vartheta_0}{4\pi}\right)$$

На фигуре *a*, *b*, *c* приводятся кривые зависимостей $T^*$, $\sigma^*_{RR}$, $\sigma^*_{\varphi\varphi}$ от $R$ для некоторых значений параметра $\vartheta$, указанных на кривых.

Для $R\to\infty$, в произвольный момент $t$, напряжения стремятся к нулю. Также для конечного значения $R$, но при $t\to\infty$ напряжения $\sigma^*_{ij}$ исчезают.

Функции $\sigma^*_{RR}$, $\sigma^*_{\varphi\varphi}$, $\sigma^*_{\vartheta\vartheta}$ можно рассматривать как функции Грина. Пусть $Q(P,\ t)$ — интенсивность источников тепла, распределенных в области Г; тогда

$$\sigma_{ij}(P,\ t) = \iiint\limits_{(\Gamma)}\int\limits_0^t Q(S,\ t')\,\sigma^*_{ij}(S,\ P,\ t-t')\,d\Gamma dt' \tag{1.13}$$

Аналогично имеем

$$\varphi(P,\ t) = \iiint\limits_{(\Gamma)}\int\limits_0^t Q(S,\ t')\,\varphi^*(P,\ S,\ t-t')\,dt' \tag{1.14}$$

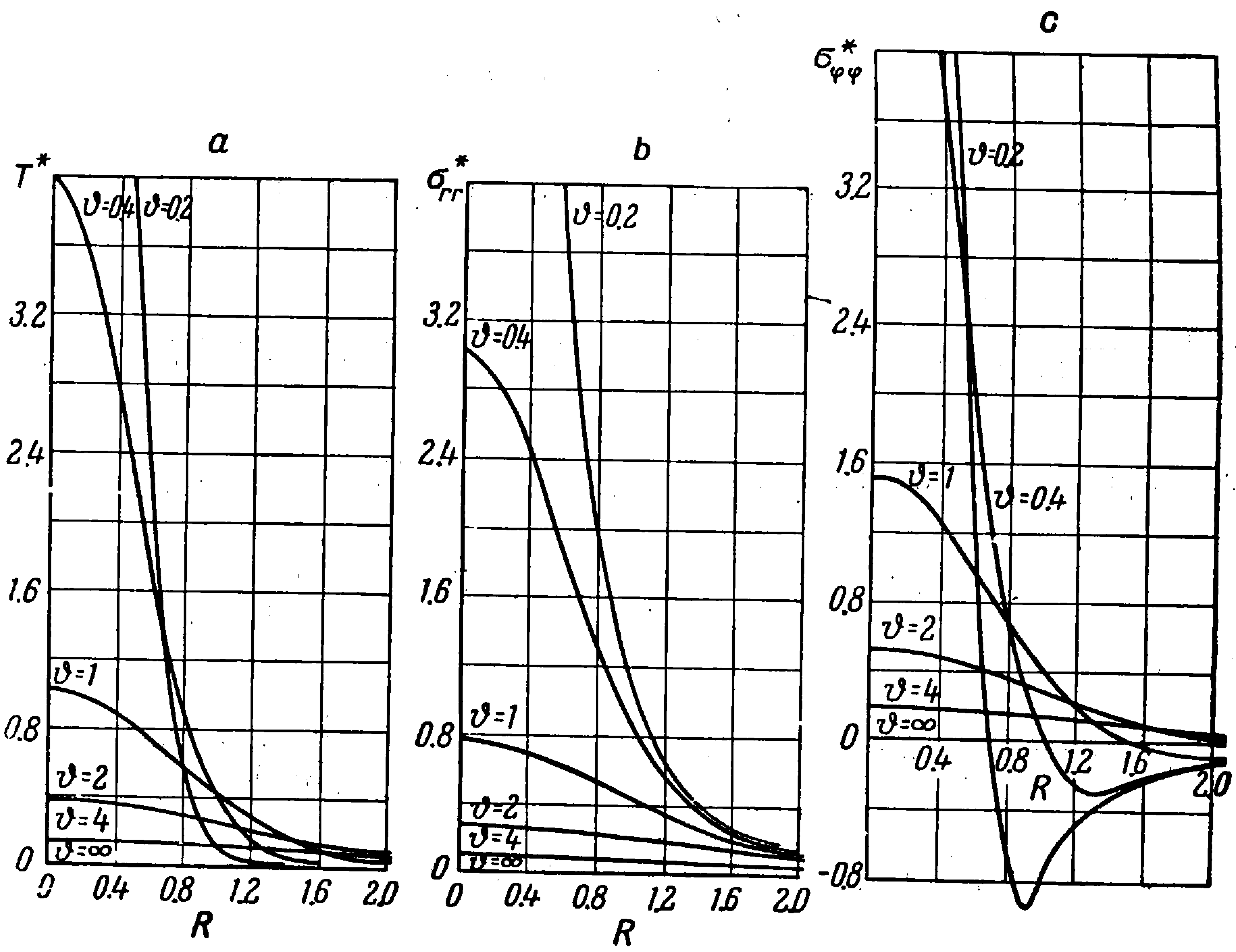
Для непрерывного источника тепла получим

$$\varphi(R,\ t) = \frac{AR}{2\varkappa}\left[1-\left(1+\frac{\vartheta}{2R^2}\right)\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right] \tag{1.15}$$

Для источника, изменяющегося по гармоническому закону

$$\varphi(R,\ t) = \frac{Aie^{i\omega t}}{\varkappa\eta R}\left[1-\exp\left(-R\sqrt{i\eta}\right)\right] \qquad \left(\eta=\frac{\omega}{\varkappa}\right) \tag{1.16}$$

Если в уравнениях перемещений теории упругости не пренебрегать




инерционными членами, то в рассматриваемом случае сферической симметрии вместо формул (1.7), (1.8) получим следующие формулы:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}-\sigma^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\vartheta_0 T, \qquad u_R=\frac{\partial\varphi}{\partial R} \tag{1.17}$$

$$\sigma_{RR}=-2G\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}+\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\vartheta\vartheta}=-2G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1.18}$$

Здесь

$$\sigma^2=\frac{1}{c_1^2}, \qquad c_1=\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\,\frac{2G}{\rho}\right)^{1/2}$$

$c_1$ — скорость распространения упругой продольной волны, $\rho$ обозначает плотность.

Поступая аналогично, как и в квазистатической задаче, получим для

$$\Phi^* = -\frac{\vartheta_0}{2\pi^2\varkappa}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \alpha(\alpha^2+\gamma^2+p/\varkappa)^{-1}(\alpha^2+\gamma^2+p^2\sigma^2)^{-1}\cos\gamma z\,d\alpha\,d\gamma =$$

$$= \frac{\vartheta_0}{4\pi\varkappa\sigma^2 pR}\,\frac{e^{-R\sigma p}-e^{-R\sqrt{p/\varkappa}}}{p-\varkappa^{-1}\sigma^{-2}}$$

Проводя обратное преобразование, получим [3]

$$\varphi^* = \frac{\vartheta_0}{4\pi R}\left\{\operatorname{erfc}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{1}{2}\exp\frac{\vartheta}{4\varkappa^2\sigma^2}\left[\exp\frac{R}{\varkappa\sigma}\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}+\frac{\sqrt{\vartheta}}{2\varkappa\sigma}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left(-\frac{R}{\varkappa\sigma}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{\sqrt{\vartheta}}{2\varkappa\sigma}\right)\right]+\left(\exp\frac{\vartheta-4\varkappa R\sigma}{4x^2\sigma^2}-1\right)\eta(t-R\sigma)\right\} \tag{1.20}$$

где $\eta$ — функция Хевисайда.

В рассматриваемом случае различные формулы для $\varphi^*$ получим на интервале $0<t<R\sigma$ и $t>R\sigma$. Зная функцию $\varphi^*$, по формулам (1.18) определим напряжения $\sigma^*_{ij}$. Легко доказать, что как для $R\to\infty$, так и для $t\to\infty$ функция $\varphi^*$ исчезает, а также и обращаются в нуль напряжения.

Для $t=R\sigma$ существует разрыв напряжений. Ясно, что, рассматривая $\varphi^*$ как функцию Грина, можно определить напряжения для произвольной функции $Q(P,\,t)$.

Рассмотрим напряженное состояние, вызванное действием источника тепла, передвигающегося по прямой с постоянной скоростью $v$. Обозначим через $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ неподвижные координаты и предположим, что источник с переменной во времени интенсивностью $W$ движется в упругом пространстве вдоль оси $\xi_1$.

Уравнение теплопроводности в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial\xi_3^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{1.21}$$

Примем новую координатную систему $x_1,\ x_2,\ x_3$, связанную с движущимся источником тепла и параллельную системе $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$. Применяя линейное преобразование

$$x_1=\xi_1-vt,\qquad x_2=\xi_2,\qquad x_3=\xi_3$$

получаем уравнение (1.21) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}+2\mu\frac{\partial T}{\partial x_1}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}=0,\qquad \left(\mu=\frac{v}{2\varkappa}\right) \tag{1.22}$$

В случае источника, обладающего постоянной интенсивностью, имеем $\partial T/\partial t=0$. Остановимся на этом квазистационарном случае.

Известно, что в этом случае имеем

$$T=\frac{Q}{2\pi^2\varkappa R}e^{-\mu(x_1+R)}\qquad (R=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2},\ W=Q\rho c) \tag{1.23}$$

Решая уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}=\vartheta_0 T \tag{1.24}$$

получим для $Q = 1$

$$\varphi^* = \frac{\vartheta_0}{8\pi\mu\varkappa}\{\mathrm{Ei}\,[-\mu(x_1+R)] - \ln(x_1+R)\} \tag{1.25}$$

$$\mathrm{Ei}\,(-s) = \int\limits_s^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \quad (s>0)$$

Теперь можно по формулам (1.6) определить напряжения $\sigma^*_{ij}$, проводя соответствующее дифференцирование функции $\varphi^*$

$$\sigma_{12}{}^* = \frac{x_2K}{\mu R^3}\left[(1+\mu R)\,e^{-\mu(x_1+R)} - 1\right]$$

$$\sigma_{23}{}^* = \frac{x_2x_3K}{\mu R^3(x_1+R)}\left[\left(1+\mu R+\frac{R}{x_1+R}\right)e^{-\mu(x_1+R)} - \left(1+\frac{R}{x_1+R}\right)\right] \tag{1.26}$$

$$\left(K = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{d}{8\pi\mu\varkappa}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Проводя в формулах для напряжений предельный переход $\mu\to 0$ ($v\to\to 0$), получим известные формулы для напряжений, вызванных неподвижным, стационарным источником тепла,

$$\sigma_{12}{}^* = -\frac{x_1x_2K}{R^3}, \qquad \sigma_{23}{}^* = -\frac{x_2x_3K}{R^3} \qquad \text{и т. д.}$$

§ **2. Термические напряжения в упругом полупространстве.** Рассмотрим упругое полупространство ($x_3>0$), в котором в точке $(0,\ 0,\ \xi_3=\zeta)$ действует мгновенный источник тепла. Предположим, что плоскость $x_3$, равная нулю, свободна от напряжений. Кроме того, предположим, что $T=0$ для $x_3=0$. Здесь задача осесимметрическая, поэтому рассуждения проводим в системе цилиндрических координат $r,\ z$. Первым двум краевым условиям

$$\sigma_{zz}{}^* = 0, \qquad T=0, \qquad \sigma_{rz}{}^*=0 \quad \text{при } z=0 \tag{2.1}$$

удовлетворим, если в неограниченном упругом пространстве поместим в точке $(0,\ \zeta)$ положительный, а в точке $(0,\ -\zeta)$ отрицательный источник тепла. Тогда, согласно формуле (1.11), получаем [4]

$$\varphi^*(r,\ z) = -A\left[\frac{1}{R_1}\,\mathrm{erf}\left(\frac{R_1}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \frac{1}{R_2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{R_2}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]$$

$$R_{1,2} = [r^2+(z\mp\zeta)^2]^{1/2}, \qquad A = \frac{\vartheta_0}{4\pi} \tag{2.2}$$

Как известно, напряжения выражаются через функцию $\varphi^*$ следующим образом:

$$\sigma_{rr}{}^{*\prime} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}\right), \qquad \sigma_{\varphi\varphi}{}^{*\prime} = -2G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}\right)$$

$$\sigma_{zz}{}^{*\prime} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial v^2}\right), \qquad \sigma_{rz}{}^{*\prime} = 2G\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial r\partial z} \tag{2.3}$$

В плоскости $z=0$ напряжение $\sigma^{*\prime}{}_{rz}$ не исчезает. Чтобы напряжение $\sigma^{*\prime}{}_{rz}(r,\ 0,\ t)$ обратилось в нуль, наложим такое напряженное состояние, чтобы в плоскости $z=0$ удовлетворялось условие

$$\sigma_{rz}{}^{*\prime}(r,\ 0,\ t) + \sigma^{*\prime\prime}{}_{rz}(r,\ 0,\ t) = 0, \qquad \sigma_{zz}{}^{*\prime\prime}(r,\ 0,\ t) = 0 \tag{2.4}$$

Определим напряженное состояние $\sigma_{ij}^{*''}$ при помощи функции Лява $\varphi^0$, удовлетворяющей уравнению $\nabla^2\nabla^2\varphi^0 = 0$.

Функцию $\varphi^0$ примем в виде

$$\varphi^0 = \int_0^\infty (C + D\alpha z) e^{-\alpha z} J_0(\alpha v)\, d\alpha \quad \text{при } z > 0 \tag{2.5}$$

Из второго условия (2.4) следует, что $C = -(1-2\nu)D$. Принимая во внимание, что

$$\sigma_{rz}^{*'}(r, 0, t) = \frac{G\vartheta_0}{2\pi}\int_0^\infty \rho(\alpha, \zeta, t)\alpha^2 J_1(\alpha r)\, d\alpha$$

где

$$\rho(\alpha, \zeta, t) = e^{-\alpha\zeta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2} - \frac{\zeta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{\alpha\zeta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2} + \frac{\zeta}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

из первого условия (2.4) получим

$$D(\alpha, \zeta, t) = \frac{1-2\nu}{4\pi\alpha}\vartheta_0\rho(\alpha, \zeta, t)$$

Таким способом определяется функция $\varphi^0$, а тем самым напряженное состояние $\sigma_{ij}^*$, так как (2.6)

$$\sigma_{rr}^{*''} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi^0, \qquad \sigma_{zz}^{*''} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi^0$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{*''} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi^0, \qquad \sigma_{rz}^{*''} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi^0$$

Таким образом

$$\sigma_{rr}^{*''} = GA\int_0^\infty \rho(\alpha, \zeta, t)\alpha^2 e^{-\alpha z}\left[(2-\alpha z)J_0(\alpha r) + (2\nu - 2 + \alpha z)\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] d\alpha \text{ и т. д.}$$

Если предположить, что $\partial T/\partial z = 0$ в плоскости $z = 0$, тогда напряжения $\sigma_{ij}^{*'}$ можно определить, помещая в точках $(0, \zeta)$ и $(0, -\zeta)$ дополнительные, мгновенные источники тепла. Таким образом, в плоскости $z = 0$ будут удовлетворены условия $\sigma_{rz}^{*'} = 0$ и $\partial T/\partial z = 0$.

Напряжения $\sigma_{zz}^{*'}(r, 0, t)$ устраним путем добавления к ним напряженного состояния $\sigma_{ij}^*$ и состояния $\sigma_{\bar{i}\bar{j}}^{*''}$, выраженного с помощью функции Лява, причем в формуле (2.5) следует принять $C = 2\nu D$.

Если $\zeta$ будет стремиться к нулю, то получим случай источника, действующего в начале координатной системы, т. е. в плоскости, ограничивающей упругое полупространство. В этом особом случае получим для непрерывного источника тепла

$$D(\alpha, t) = \frac{A}{2\varkappa\alpha^3}(1-2\nu)\left[1 - \alpha\exp(-\alpha^2\varkappa t)\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\vartheta\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2}\right)\right]$$

$$(\vartheta = 4\varkappa t)$$

Для стационарного источника тепла, т. е. при $t \to \infty$, получим

$$D(\alpha, t) = \frac{A}{2\varkappa}(1-2\nu)\alpha^{-3}$$

Отметим, что для $t \to \infty$ напряжения $\sigma_{rz}^*(r, z, \infty)$ и $\sigma_{zz}^*(r, z, \infty)$ равняются нулю.

Напряжения $\sigma_{ij}^*(r, z, t)$ для непрерывного источника тепла можно представить в виде

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{*(0)} - \sigma_{ij}^{*(1)}(r, z, t)$$

где напряжения $\sigma_{ij}^{*(0)}$ $(\infty)$ не зависят от времени. Для напряжений $\sigma_{zz}^*$, $\sigma_{rz}^*$ получим

$$\sigma_{rz}^* = -\sigma_{rz}^{*(1)}(r, z, t), \qquad \sigma_{zz}^* = -\sigma_{zz}^{*(1)}(r, z, t)$$

Эти напряжения исчезают для $t \to \infty$, принимая для некоторого конечного значения $t$ максимальные значения.

Рассмотрим следующие проблемы, имеющие значения для технических приложений. Пусть в конечной области Г, расположенной в плоскости $z=0$, ограничивающей упругое полупространство, будет задано следующее краевое условие для температуры:

$$T(x_1, x_2, 0, t) = f(x_1, x_2)\,\delta(t) \tag{2.7}$$

а на остальной части поверхности пусть $T=0$. Построим функцию Грина для этой задачи.

Температурное поле должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 T^* - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T^*}{\partial t} = 0$$

и краевому условию

$$T^*(x_1, x_2, 0, t) = \delta(x_1-\xi_1)\,\delta(x_2-\xi_2)\,\delta(t) \tag{2.8}$$

а также

$$T^* = 0 \quad \text{в бесконечности}$$

Для данной температуры в области Г получим ($d\Gamma = d\xi_1 d\xi_2$)

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = \iint_{\Gamma} f(\xi_1, \xi_2)\,T^*(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, 0, t)\,d\Gamma$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = \iint_{\Gamma} f(\xi_1, \xi_2)\,\sigma_{ij}^*(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, 0, t)\,d\Gamma \tag{2.9}$$

Определим функцию Грина сперва для осесимметрической задачи, решая уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T^* - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T^*}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

с краевым условием

$$T^*(r, 0, t) = \frac{\delta(r)\,\delta(t)}{2\pi r}, \qquad T^* = 0 \quad \text{в бесконечности} \tag{2.11}$$

Решением уравнения (2.10) является

$$T^*(r, z, t) = \frac{4\varkappa z}{\vartheta(\vartheta\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right) \qquad (\vartheta = 4\varkappa t) \tag{2.12}$$

Зная функцию $T^*$, функцию $\varphi^*$ найдем как решение уравнения (1.5)

$$\varphi^* = -\frac{z\vartheta_0\varkappa}{2\pi R^3}\left[\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{2R}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right] \tag{2.13}$$

Зная функцию $\varphi^*$, можно определить напряжения $\sigma_{ij}{}^{*\prime}$ в замкнутом виде. Для $z=0$ напряжение $\sigma_{zz}{}^{*\prime}$ исчезает, однако напряжение $\sigma_{rz}{}^{*\prime}$ не равняется нулю. Поэтому на напряженное состояние $\sigma_{rz}{}^{*\prime}$ нужно наложить напряженное состояние $\sigma_{rz}{}^{*\prime\prime}$, выраженное при помощи функции $\varphi^0$ формулами (2.6). Величины $C$ и $D$, входящие в функции Лява (2.5), определяем по краевым условиям для $z=0$

$$\sigma_{rz}{}^{*\prime}+\sigma_{rz}{}^{*\prime\prime}=0, \qquad \sigma_{zz}{}^{*\prime\prime}=0$$

Из этих условий получаем

$$C=-(1-2\nu)D, \qquad D(\alpha,\ t)=(1-2\nu)\frac{\vartheta_0}{2\pi}\operatorname{erfc}\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2}$$

В случае температурного поля, удовлетворяющего уравнению (2.10), с краевыми условиями

$$T^*(r,\ 0,\ t)=\frac{\delta(r)}{2\pi r}\eta(t), \qquad T^*=0 \quad \text{в бесконечности}$$

где функцией $\eta(t)$ является функция Хевисайда, получаем

$$T^*=\frac{z}{2\pi R^3}\left[1-\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}+\frac{2R}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right] \tag{2.14}$$

а также

$$\varphi^*=-\frac{\vartheta_0 z}{4\pi R}\left[1-\left(1-\frac{\vartheta}{2R^2}\right)\operatorname{erfc}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right] \tag{2.15}$$

Напряжения $\sigma_{ij}{}^{*\prime}$ получаем из формулы (1.6), а напряжения $\sigma_{ij}{}^{*\prime\prime}$ — из формулы (2.6). Функцию $\varphi^0$ определяет формула (2.5), где

$$C=-D(1-2\nu), \qquad D(\alpha,\ t)=(1-2\nu)\frac{\vartheta_0}{4\pi\alpha^2}[1-F(\alpha,\ t)]$$

$$F(\alpha,\ t)=(1+2\alpha^2\varkappa t)\operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{\varkappa t})-2\alpha\sqrt{\frac{\varkappa t}{\pi}}\exp(-\alpha^2\varkappa t)$$

В особом случае стационарного температурного поля ($t\to\infty$) напряжения $\sigma_{rz}{}^*$ и $\sigma_{zz}{}^*$ становятся равными нулю.

**§ 3. Напряженное состояние в вязко-упругом пространстве.** Рассмотрим термические напряжения, вызванные действием мгновенного источника в неограниченном пространстве, для модели вязко-упругого тела, приведенного М. А. Бийотом [6] и Д. С. Берри [7]. Распространяем зависимости, данные этими авторами, на термические напряжения. Имеем

$$\sigma_{ij}(x_r,\ t)=2\int_0^t \mu(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon_{ij}(x_r,\ \tau)\,d\tau+$$

$$+\delta_{ij}\int_0^t\left\{\lambda(t-\tau)\frac{\partial\theta(x_r,\ \tau)}{\partial\tau}-[3\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)]\,\alpha_t\,\frac{\partial T(x_r,\ \tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau \tag{3.1}$$

Приведенные зависимости относятся к телам, которые в первоначальный момент были свободными. $\lambda(t)$, $\mu(t)$ — суть функции релаксации, которые для абсолютно упругих тел редуцируются к постоянным Ламе.

Рассмотрим сначала квазистатическую задачу. Подставляя напряжение $\sigma_{ij}$ в уравнения равновесия, выражающие напряжение через перемещения и вводя потенциал термо-вязко-упругого перемещения $\varphi$ посредством

$$u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

получим для функции $\varphi$ по аналогии с уравнением (1.5) формулу

$$\int_0^t [2\mu(t-\tau) + \lambda(t-\tau)] \frac{\partial\nabla^2\varphi}{\partial\tau} d\tau = \alpha_t \int_0^t [3\lambda(t-\tau) + 2\mu(t-\tau)] \frac{\partial T}{\partial\tau} d\tau \qquad (3.2)$$

Выражая зависимости (3.1) при помощи функции $\varphi$ и используя уравнение (3.2), получим

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = \int_0^t 2\mu(t-\tau) \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\varphi(x_r, \tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (3.3)$$

Предположим, что вязко-упругое тело было в первоначальный момент свободным, т. е. не подвергалось напряжениям. Проведем в уравнении (3.2) и зависимостях (3.3) преобразование Лапласа

$$\Theta(x_r, p) = \int_0^t e^{-pt} T(x_r, t)\, dt, \qquad \Phi(x_r, p) = \int_0^t e^{-pt}\varphi(x_r, t)\, dt$$

$$\Sigma_{ij}(x_r, p) = \int_0^t e^{-pt}\sigma_{ij}(x_r, t)\, dt$$

получим

$$\nabla^2\Phi(x_r, p) = \vartheta(p)\,\Theta(x_r, p) \qquad (3.4)$$

а также

$$\Sigma_{ij}(x_r, p) = 2G(p)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\Phi(x_r, p) \qquad (3.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\vartheta(p) = \frac{3\lambda'(p) + 2\mu'(p)}{\lambda'(p) + 2\mu'(p)}\alpha_t, \qquad G(p) = p\mu'(p)$$

Отметим, что для абсолютно упругого тела имеем следующие зависимости (ср. формулы (1.5) и (1.6))

$$\nabla^2\Phi^\circ(x_r, p) = \vartheta_0\Theta(x_r, p) \qquad \left(\vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\right) \qquad (3.6)$$

$$\Sigma_{ij}(x_r, p) = 2G\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\Phi^\circ(x_r, p) \qquad (3.7)$$

где $G$ — постоянные величины, не зависящие от параметра $p$.

Здесь вводим обозначения $\varphi^\circ$, $\sigma_{ij}{}^\circ$ для абсолютно упругого тела.

Из сравнения (3.4) и (3.6), а также (3.5) и (3.7) вытекает, что

$$\Phi(x_r, p) = \frac{\vartheta(p)}{\vartheta_0}\Phi^\circ(x_r, p), \qquad \Sigma_{ij}(x_r, p) = \frac{G(p)\,\vartheta(p)}{G\,\vartheta_0}\Sigma_{ij}^\circ(x_r, p) \qquad (3.8)$$

Вводя функции $F(p)$ и $G(p)$, где[1]

$$F(p) = \frac{G(p)\,\vartheta(p)}{p}, \qquad H(p) = \frac{\vartheta(p)}{p} \qquad (3.9)$$

[1] Функции $F(p)$, $G(p)$ приняты в таком виде, чтобы обеспечить обратное преобразование этих функций.

после обратного преобразования Лапласа, из формул (3.8) получаем

$$\varphi(x_r, t) = \frac{1}{\vartheta_0}\int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi^\circ(x_r, \tau)\,d\tau \tag{3.10}$$

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = \frac{1}{G\vartheta_0}\int_0^t f(t-\tau)\frac{\partial\sigma_{ij}^\circ}{\partial\tau}(x_r, \tau)\,d\tau$$

Приведенные выше формулы позволяют определить перемещения и напряжения в вязко-упругом теле, используя решения, полученные для абсолютно упругого тела. Во многих случаях удобнее будет определить сперва функцию

$$\psi(x_r, t) = \frac{1}{\vartheta_0}\int_0^t F(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(x_r, \tau)\,d\tau \tag{3.11}$$

и при помощи ее находить напряжения

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\psi(x_r, t) \tag{3.12}$$

Пусть в вязко-упругом пространстве в начале координатной системы действует мгновенный источник тепла. Примем, что функции релаксации $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ имеют одно и то же время релаксации

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-\varepsilon t}, \qquad \mu(t) = \mu_0 e^{-\varepsilon t}, \qquad \lambda'(p) = \frac{\lambda_0}{p+\varepsilon}, \qquad \mu'(p) = \frac{\mu_0}{p+\varepsilon} \tag{3.13}$$

Так как

$$F(p) = \gamma\frac{1}{p+\varepsilon}, \qquad \gamma = \mu_0\frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\alpha_t$$

поэтому, согласно формуле (3.11) и учитывая (1.11), получим

$$\psi(R, t) = -\frac{\gamma}{4\pi R}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{erf}\frac{R}{\sqrt{4\varkappa\tau}}\,d\tau = -\frac{1}{4\pi R}\left[e^{-\varepsilon t} - A(R, t)\right] \tag{3.14}$$

где

$$A(R, t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t}\left[\exp\left(-iR\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varkappa}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\varkappa t}} - i\sqrt{\varepsilon t}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(iR\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varkappa}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\varkappa t}} + i\sqrt{\varepsilon t}\right)\right]$$

Для непрерывного источника получим

$$\psi(R, t) = -\frac{\gamma}{4\pi R\varepsilon}\left[1 - e^{-\varepsilon t} - \operatorname{erfc}\frac{R}{\sqrt{4\varkappa t}} + A(R, t)\right] \tag{3.15}$$

Напряжения $\sigma_{ij}$ получим по формуле (3.12). Если в уравнениях равновесия учесть инерционные члены, тогда вместо уравнения (3.4) и зависимостей (3.5) получим следующие уравнения и зависимости:

$$\nabla^2\Phi(x_r, p) - p^2\sigma^2(p)\,\Phi(x_r, p) = \vartheta(p)\,\Theta(x_r, p)$$

$$\left(\sigma^2(p) = \frac{\rho}{p\,[2\mu'(p) + \lambda'(p)]}\right) \tag{3.16}$$

$$\Sigma_{ij}(x_r, p) = 2G(p)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\Phi(x_r, p) + \rho p^2\Phi(x_r, p) \tag{3.17}$$

Введем функцию $\Psi(x_r, p) = G(p)\Phi(x_r, p)$, тогда зависимость (3.17) можно представить в виде

$$\Sigma_{ij}(x_r, p) = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\nabla^2\right)\Psi(x_r, p) + \rho p^2 \Phi(x_r, p) \tag{3.18}$$

Сравнение уравнения (3.17) с соответствующим уравнением для абсолютно упругого тела

$$\nabla^2\Phi^\circ(x_r, p) - p^2\sigma_0{}^2\Phi(x_r, p) = \vartheta_0\Theta(x_r, p) \tag{3.19}$$

где $\sigma_0{}^2$ и $\vartheta_0$ — постоянные величины, не зависящие от параметра $p$, показывает, что между функциями $\Phi$ и $\Phi^\circ$ нельзя сконструировать таких зависимостей, которые получались в квазистационарных задачах для абсолютно упругого тела.

В случае мгновенного источника тепла, предполагая, что функции $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ выражаются при помощи тех же самых, как и раньше, экспоненциальных зависимостей, обладающих тем же временем релаксации $\varepsilon^{-1}$, найдем, что решение уравнения (3.16) имеет вид

$$\Phi(R, p) = -\frac{\vartheta(p)}{4\pi\varkappa p R}\,\frac{\exp(-R\sqrt{p/\varkappa}) - \exp[-Rp\sigma(p)]}{(p\sigma^2(p) - \varkappa^{-1})}$$

$$\left(\sigma^2(p) = \beta\frac{p+\varepsilon}{p},\ \beta = \frac{\rho}{\lambda_0 + 2\mu_0}\right) \tag{3.20}$$

Таким образом

$$\Phi(R, p) = A\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-\eta}\right)\left[\exp\left(-R\sqrt{\frac{p}{\varkappa}}\right) - \exp\left[-R\sqrt{\beta p(p+\varepsilon)}\right]\right]$$

$$\left(A = \frac{\vartheta_0}{4\pi\varkappa\beta\eta R},\ \eta = \frac{1}{\varkappa\beta} - \varepsilon\right) \tag{3.21}$$

Проводя обратное преобразование Лапласа, получим

$$\varphi(R, t) = A\left\{\operatorname{erfc}\frac{R}{\sqrt{4\varkappa t}} - L(R, t; \eta) - N(R, t) + K(R, t;\ \varepsilon, \eta)\right\} \tag{3.22}$$

Здесь следующие обозначения:

$$L(R, t; \eta) = \frac{1}{2}e^{\eta t}\left[\exp\left(-R\sqrt{\frac{\eta}{\varkappa}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\varkappa t}} - \sqrt{\eta t}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(R\sqrt{\frac{\eta}{\varkappa}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\varkappa t}} + \sqrt{\eta t}\right)\right]$$

$$N(R, t) = \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon R\sqrt{\beta}}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon R\sqrt{\beta}}{2}\int_{R\sqrt{\beta}}^{t}\exp\left(-\frac{\varepsilon v}{2}\right)\frac{I_1\left(\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{v^2 - R^2\beta}\right)}{\sqrt{v^2 - R^2\beta}}\,dv\right]\eta\left(t - R\sqrt{\beta}\right)$$

$$K(R, t; \varepsilon, \eta) = \int_0^t h(R, t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}g(\tau; \varepsilon, \eta)\,d\tau$$

где

$$h(R,t)=\exp\left(-\frac{\varepsilon t}{2}\right)I_0\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{t^2-R^2\beta}\right)\eta\left(t-R\sqrt{\beta}\right)$$

а также

$$g(t;\varepsilon,\eta)=\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(\frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}+\sqrt{\varepsilon+\eta}\,e^{\eta\tau}\operatorname{erf}\sqrt{(\varepsilon+\eta)\tau}\right)d\tau$$

Для определения напряжений $\sigma_{ij}$ необходима еще одна функция

$$\psi(R,t)\qquad\left(\Psi(R,p)=G(p)\,\Phi(R,p)\right)$$

Функция $\psi(R,p)$ имеет вид

$$\psi(R,p)=A_1\left(\frac{1}{p+\varepsilon}-\frac{1}{p-\eta}\right)\left[\exp\left(-R\sqrt{\frac{p}{\varkappa}}\right)-\exp\left(-R\sqrt{\beta p(p+\varepsilon)}\right)\right]$$

$$\left(A_1=\frac{\vartheta_0\mu_0}{4\pi\varkappa\beta R(\eta+\varepsilon)}\right)$$

Проводя обратное преобразование Лапласа, получим

$$\psi(R,t)=A_1[L(R,t;-\varepsilon)-L(R,t;\eta)+K(R,t;\varepsilon,-\varepsilon)-K(R,t;\varepsilon,\eta)]\qquad(3.23)$$

Напряжения определим по формуле

$$\sigma_{RR}=-\frac{4}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}+\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\vartheta\vartheta}=-2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)+\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Определение квазистатических термических напряжений в вязко-упругом полупространстве принципиально не встречает больших затруднений. Сперва определяют напряжения $\sigma_{ij}'$ в неограниченном пространстве, как это показано в § 2, а затем наложением напряженного состояния $\sigma_{ij}''$ исправляются краевые условия в плоскости $z=0$. Напряжения $\Sigma_{ij}(x_r,p)$ можно выразить при помощи функции $\varphi^\circ$, причем формулы для $\Sigma_{ij}(x_r,p)$ получим из уравнений (2.6), в которых вместо $\gamma$ подставим $\lambda'(p)/2[\lambda'(p)+\mu'(p)]$, а вместо $G$ величину $\mu'(p)$.

Поступила 16 II 1959

## ЛИТЕРАТУРА

1. Goodier J. N. On the integration of the thermoelastic equations. Phil. Mag., 1937.
2. Nowacki W. State of Stress in an Infinite and Semiinfinite Elastic-Space, Due to an Instantaneous Source of Heat, Bull. Acad. Polon. Sci., v. 5, Nr. 2, 1957.
3. Nowacki W. A Dynamical Problem of Thermoelasticity. Arch. Mech. Stos., 1957.
4. Nowacki W., State of Stress in an Elastic Semispace Due to an Instantaneous Source of Heat. Bull. Acad. Polon. Sci., v. 5. Nr., 3, 1957.
5. Nowacki W. Stan naprężenia w grubej plycie kołowej, wywotany dziataniem pola temperatury. Arch. Inżynierii Ladowej, Nr 4, 1957.
6. Biot M. A. J. Appl. Phys. v. 25, 1954.
7. Berry D. S. Stress Propagation in Visco-Elastic Bodies. J. Mech. Phys. Solid, v. 6, Nr 3, 1958.