

О ДАВЛЕНИИ ШТАМПА НА СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

И. И. Ворович, Ю. А. Устинов

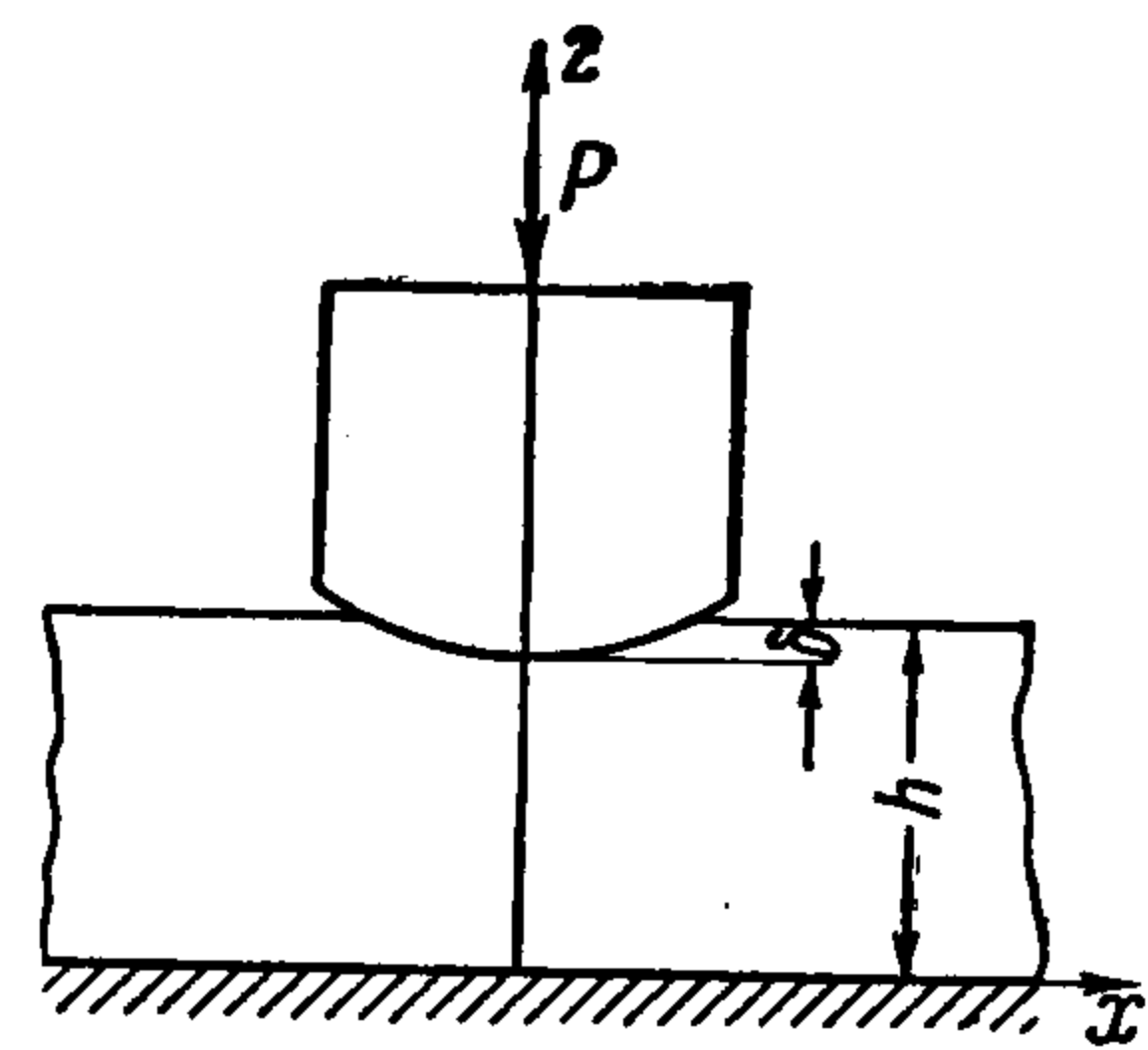
(Ростов-на-Дону)

В работе рассматривается задача о давлении осесимметричного штампа на упругий слой конечной толщины. Решение задачи получено в виде асимптотических рядов по степеням h^{-1} , где h — безразмерная толщина слоя. Подробно изучен случай плоского и параболического штампа. Данное решение удовлетворительно описывает напряженное состояние уже при толщине слоя порядка диаметра зоны контакта¹.

§ 1. Постановка задачи. Предположим, что слой конечной толщины h покоится на жестком основании без трения. Пусть далее слой подвергается действию осесимметричного штампа, нагруженного силой P вдоль оси симметрии (фиг. 1).

Будем считать, что в зоне контакта штамп ограничен поверхностью, которая в цилиндрических координатах дается уравнением $z = \varphi(\rho)$.

Плоскость zy расположим на жестком основании, а ось z направим внутрь штампа (фиг. 1). Будем также предполагать, что зона контакта штампа и слоя есть круг радиуса l .



Фиг. 1

Предположим вначале, что давление $q(\rho)$ между штампом и слоем известно. Используя результаты работы [2], где рассмотрена задача о равновесии упругого слоя при заданных на граничных плоскостях напряжениях, можно получить следующие соотношения:

$$w = W - \frac{1}{G} \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} x_2(\gamma z) J_0(\gamma \rho) d\gamma \quad (1.1)$$

$$\tau_{\rho z} = T_{\rho z} + 2 \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} x_3(\gamma z) J_1(\gamma \rho) \gamma d\gamma \quad (1.2)$$

$$\sigma_z = \Sigma_z - 2 \int_0^{\infty} \frac{Q(\gamma)}{\Delta(\gamma h)} x_4(\gamma z) J_0(\gamma \rho) \gamma d\gamma \quad (1.3)$$

¹ После сдачи статьи в печать авторам стала известна работа Н. Н. Лебедева и Я. С. Уфлянда [1], в которой рассматривается осесимметричная задача о действии плоского круглого штампа на слой конечной толщины. Данное в этой работе решение применимо, вообще говоря, при любых безразмерных толщинах h . Однако его использование сопряжено с необходимостью численно решать некоторое интегральное уравнение Фредгольма, с последующим численным нахождением квадратур. Поэтому предлагаемые в данной работе асимптотические формулы могут иметь свое значение, так как в ряде случаев дают возможность просто рассчитать основные характеристики задачи.

$$W = -\frac{1}{2} \left\{ (h-z) \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h-z)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma - \right. \quad (1.4)$$

$$\left. - (h+z) \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h+z)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma + \frac{2(m-1)}{m} \int_0^{\infty} [e^{-\gamma(h-z)} - e^{-\gamma(h+z)}] Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) d\gamma \right\}$$

$$T_{\rho z} = (h-z) \int_0^{\infty} Q(\gamma) e^{-\gamma(h-z)} J_1(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma - (h+z) \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h+z)} Q(\gamma) J_1(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma \quad (1.5)$$

$$\Sigma_z = \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h-z)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma - \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h+z)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma - \quad (1.6)$$

$$- (h-z) \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h-z)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma - (h+z) \int_0^{\infty} e^{-\gamma(h+z)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma^2 d\gamma$$

$$Q(\gamma) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\gamma\rho) \rho d\rho, \quad q(\rho) = 0, \quad \text{если } \rho > 1 \quad (1.7)$$

$$\Delta(\gamma h) = 2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h \quad (1.8)$$

$$x_2(\gamma z) = e^{-\gamma h} \left[\gamma h a(\gamma h) \operatorname{sh} \gamma z + b(\gamma h) \left(\gamma z \operatorname{ch} \gamma z - \frac{2m-2}{m} \operatorname{sh} \gamma z \right) \right] \quad (1.9)$$

$$x_3(\gamma z) = e^{-\gamma h} [\gamma h a(\gamma h) \operatorname{sh} \gamma z + b(\gamma z) \gamma z \operatorname{ch} \gamma z] \quad (1.10)$$

$$x_4(\gamma z) = e^{-\gamma h} [\gamma h a(\gamma h) \operatorname{ch} \gamma z + b(\gamma h) (\gamma z \operatorname{sh} \gamma z - \operatorname{ch} \gamma z)] \quad (1.11)$$

$$a(\gamma h) = e^{-\gamma h} \operatorname{ch} \gamma h - 2\gamma h, \quad b(\gamma h) = e^{-\gamma h} \operatorname{sh} \gamma h + 2\gamma h \quad (1.12)$$

Формулы (1.1) — (1.6) составлены так, что при любой функции $Q(\gamma)$ выполнены граничные условия:

$$w = \tau_{\rho z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \tau_{\rho z} = 0 \quad \text{при } z = h \quad (1.13)$$

Чтобы выполнить два остальных условия контакта слоя и штампа, следует так подобрать $Q(\gamma)$, чтобы удовлетворялись соотношения:

$$w = \delta - \varphi(\rho) \quad \text{для } 0 \leq \rho \leq 1, \quad z = h \quad (1.14)$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{для } 1 < \rho, \quad z = h \quad (1.15)$$

Здесь δ — перемещение штампа под действием силы P .

Учитывая соотношения (1.1), (1.4) и (1.7), можно утверждать, что (1.14) и (1.15) будут выполнены, если $Q(\gamma)$ определять из уравнений

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2\gamma h) - 1}{\Delta(\gamma h)} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) d\gamma = c [\delta - \varphi(\rho)] \quad \left(c = \frac{m}{1-m} \right) \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad [(1.16)]$$

$$\int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma = 0 \quad (1 < \rho) \quad (1.17)$$

Таким образом, задача о действии штампа на упругий слой может быть сведена к решению парных интегральных уравнений (1.16), (1.17).

§ 2. Сведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма. Разрешимость задачи. В работе [3] доказано, что формулы

$$\int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) d\gamma = g(\rho) \quad (0 \leq \rho \leq 1), \quad \int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma = 0 \quad (1 < \rho) \quad (2.1)$$

эквивалентны соотношению

$$Q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cos \alpha \int_0^1 \frac{g(y)y}{\sqrt{1-y^2}} dy + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{yg(yu)\alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} dy du \quad (2.2)$$

по крайней мере тогда, когда $g(\rho)$ — непрерывная функция на $[0,1]$.

Для $Q(\gamma)$ из (1.16) и (1.17) получаем

$$\int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) d\gamma = c[\delta - \varphi(\rho)] + \int_0^{\infty} Q(\gamma) B(2\gamma h) J_0(\gamma\rho) d\gamma \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (2.3)$$

$$\int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma = 0 \quad (1 < \rho) \quad (2.4)$$

Здесь

$$B(2\gamma h) = \frac{1 + 2\gamma h - e^{-2\gamma h}}{2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h} \quad (2.5)$$

Сравнивая (2.1.—5), можно заключить, что $Q(\gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} Q(\alpha) = & \frac{2}{\pi} c \cos \alpha \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} [\delta - \varphi(y)] dy + \frac{2}{\pi} c \int_0^1 \int_0^1 \frac{y[\delta - \varphi(yu)]}{\sqrt{1-y^2}} \alpha u \sin \alpha u dy du + \\ & + \frac{2}{\pi} \cos \alpha \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\infty} Q(\gamma) B(2\gamma h) J_0(\gamma y) d\gamma + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} Q(\gamma) B(2\gamma h) J_0(\gamma y u) d\gamma dy du \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) можно упростить, если использовать известное соотношение

$$\int_0^1 \frac{J_0(uy)y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{\sin u}{u} \quad (2.7)$$

На основе (2.7) легко установить следующую формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \cos \alpha \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\infty} Q(\gamma) B(2\gamma h) J_0(\gamma\rho) d\gamma + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} Q(\gamma) B(2\gamma h) J_0(\gamma y u) d\gamma dy du = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 \cos \alpha u \cos \gamma u B(2\gamma h) Q(\gamma) d\gamma du \end{aligned} \quad (2.8)$$

Кроме того, легко видеть, что имеет место соотношение

$$\frac{2}{\pi} \cos \alpha \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} dy du = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (2.9)$$

На основе (2.8) и (2.9) уравнение (2.6) можно привести к виду

$$Q(\alpha) = \frac{2}{\pi} c\delta \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{2}{\pi} c \left[\cos \alpha \int_0^1 \frac{y\varphi(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{y\varphi(yu) \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} dy du \right] + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 \cos \alpha u \cos \gamma u B(2\gamma h) Q(\gamma) d\gamma du \quad (2.10)$$

Пусть оператор $A(Q)$ определяется равенством

$$A(Q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 \cos \alpha u \cos \gamma u B(2\gamma h) Q(\gamma) d\gamma du \quad (2.11)$$

Легко видеть, что A действует в пространстве функций $C[0, \infty]$, т. е. в пространстве непрерывных и ограниченных на полуоси функций с нормой

$$\|Q\| = \sup |Q| \quad (0 \leq \alpha \leq \infty) \quad (2.12)$$

Покажем, что A — вполне непрерывный оператор.

Пусть $\{R\}$ — некоторое множество, ограниченное в $C[0, \infty]$. Установим, что множество $\{A(R)\}$ будет компактным в этом пространстве. Для этого достаточно установить, что $\{A(R)\}$ равномерно ограничено в $C[0, \infty]$ и равномерно непрерывно на $[0, \infty]$.

Первое обстоятельство легко вытекает из (2.11), если учесть, что

$$\int_0^\infty B(2\gamma h) d\gamma < \infty \quad (2.13)$$

Далее имеем

$$|A[R(\alpha + \lambda)] - A[R(\alpha)]| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 [\cos(\alpha + \lambda)u - \cos \alpha u] \times \\ \times |\cos \gamma u| B(2\gamma h) |R| d\gamma du \quad (2.14)$$

Из (2.14) легко получаем

$$|A[R(\alpha + \lambda)] - A[R(\alpha)]| \leq \frac{2}{\pi} \|R\| |\lambda| \int_0^\infty \int_0^1 u B(2\gamma h) d\gamma du = \frac{|\lambda| \|R\|}{\pi} \int_0^\infty B(2\gamma h) d\gamma \quad (2.15)$$

Из (2.13) и (2.15) вытекает равномерная непрерывность на $[0, \infty]$. Таким образом, показано, что A — вполне непрерывный оператор в $C[0, \infty]$. В силу этого, для доказательства разрешимости уравнения (2.10) следует установить, что из соотношения

$$D(\alpha) \equiv 0$$

где

$$D(\alpha) = \frac{2}{\pi} c\delta \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{2}{\pi} c \left[\cos \alpha \int_0^1 \frac{y\varphi(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{y\varphi(yu) \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} dy du \right] \quad (2.16)$$

вследствие (2.10) вытекает, что $Q(\alpha) \equiv 0$.

Докажем, во-первых, что если выполнено $D(\alpha) \equiv 0$, то обязательно имеют место равенства

$$\delta = 0, \quad \varphi(\rho) \equiv 0 \quad (2.17)$$

В самом деле, равенство $D(\alpha) \equiv 0$ эквивалентно равенству

$$\cos \alpha \int_0^1 \frac{[\delta - \varphi(y)] y}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{yau}{\sqrt{1-y^2}} [\delta - \varphi(y)] \sin \alpha u \, dy du = 0 \quad (2.18)$$

Положив в (2.18) $\alpha = 0$, получаем

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} [\delta - \varphi(y)] dy = 0 \quad (2.19)$$

Так как по определению δ в зоне контакта $\delta - \varphi(\rho) \geq 0$, то из (2.19) имеем $\delta - \varphi(y) \equiv 0$ в зоне контакта.

Далее, если бы уравнение (2.10) имело нетривиальное решение $Q^\circ(\alpha)$ при $D(\alpha) \equiv 0$, то формулы (1.1) — (1.6) при подстановке в них Q° вместо Q давали бы регулярное на бесконечности решение задачи теории упругости для слоя при граничных условиях (1.13), (1.15) и, кроме того, при условии

$$w = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (2.20)$$

Очевидно, что при этом $w = \tau_{\rho z} = \sigma_z \equiv 0$ во всем слое, что повлечет за собой равенство $Q(\alpha) \equiv 0$. Таким образом, уравнение (2.10), а вместе с ним и поставленная задача имеют всегда единственное решение.

Будем ниже предполагать, что $\varphi(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[0, 1]$. В этом случае имеют место соотношения

$$\frac{2}{\pi} c \left[\delta \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \int_0^1 \frac{y\varphi(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{y\varphi(yu) \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} dy du \right] = \quad (2.21)$$

$$= \frac{2}{\pi} c \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_0^1 \frac{\delta y - \varphi(y) y - \varphi'(y) y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin \alpha u}{\alpha} \frac{2y^2 \varphi'(yu) + uy^3 \varphi''(yu)}{\sqrt{1-y^2}} dy du \right]$$

$$\int_0^\infty \int_0^1 \cos \alpha u \cos \gamma u B(2\gamma h) Q(\gamma) d\gamma du = \quad (2.22)$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_0^\infty B(2\gamma h) Q(\gamma) \cos \gamma d\gamma + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^1 B(2\gamma h) Q(\gamma) \sin \alpha u \sin \gamma u d\gamma du$$

Используя (2.21) и (2.22), уравнению (2.10) можно придать следующий вид:

$$Q(\alpha) = \frac{2}{\pi} c \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_0^1 \frac{\delta y - \varphi(y) y - \varphi'(y) y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin \alpha u}{\alpha} \frac{2\varphi'(yu) + uy^3 \varphi''(yu)}{\sqrt{1-y^2}} dy du \right] + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_0^\infty B(2\gamma h) Q(\gamma) \cos \gamma d\gamma + \int_0^\infty \int_0^1 \gamma B(2\gamma h) Q(\gamma) \sin \alpha u \sin \gamma u d\gamma du \right] \quad (2.23)$$

В правой части (2.23) преобразование Фурье — Бесселя первого и третьего членов будет, вообще говоря, нерегулярным при $\rho = 1$. Преобразование Фурье — Бесселя второго и четвертого членов будет регулярным во всей плоскости.

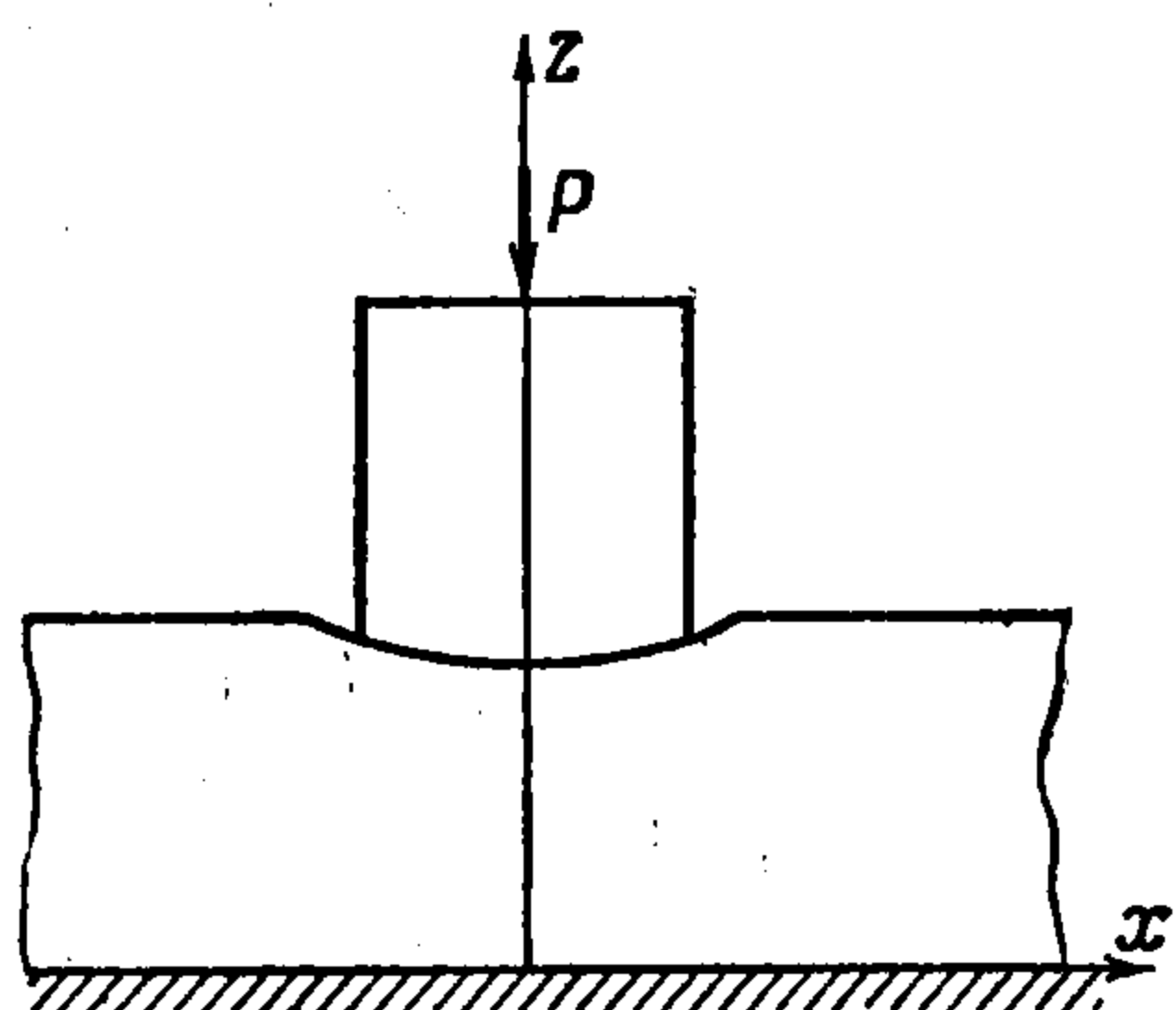
В силу этого мы в дальнейшем рассмотрим два случая.

I. Форма штампа такова, что напряжения под штампом не ограничены (фиг. 2). В этом случае при решении задачи следует исходить непосредственно из уравнения (2.10).

II. Напряжения в области контакта ограничены (фиг. 1). В этом случае должно иметь место соотношение

$$c \int_0^{+1} \frac{\delta y - y\varphi(y) - \varphi'(y)y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^{\infty} B(2\gamma h) Q(\gamma) \cos \gamma d\gamma = 0 \quad (2.24)$$

и уравнение (2.23) имеет вид:



Фиг. 2

$$Q(\alpha) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin \alpha u}{\alpha} \frac{2y^2 \varphi'(yu) + uy^3 \varphi''(yu)}{\sqrt{1-y^2}} dy du + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 \gamma B(2\gamma h) Q(\gamma) \sin \alpha u \sin \gamma u d\gamma du \quad (2.25)$$

После определения Q из (2.25) можно соотношением

$$q(\rho) = \int_0^{\infty} Q(\gamma) J_0(\gamma\rho) \gamma d\gamma \quad (2.26)$$

найти $q(\rho)$ и, следовательно, необходимую силу P . Из (2.24) после этого определяется перемещение штампа δ .

§ 3. Решение задачи. Запишем уравнение (2.10) в виде

$$Q(\alpha) = Q_0(\alpha) + A(Q) \quad (3.1)$$

Здесь $A(Q)$ определяется согласно (2.11):

$$Q_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} c\delta \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{2}{\pi} c \left[\cos \alpha \int_0^1 \frac{y\varphi(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{y\varphi(y) \alpha u \sin \alpha u}{\sqrt{1-y^2}} dy du \right] \quad (3.2)$$

Легко видеть, что $A(Q)$ при достаточно большом h будет оператором сближения в пространстве $C[0, \infty]$. В самом деле, из (2.11) имеем

$$\|A\| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(2\gamma h) d\gamma \quad (3.3)$$

Из (3.3) несложным подсчетом убеждаемся, что $A(Q)$ будет оператором сближения, если $h > 4\pi^{-1} = 1.27$. Как будет показано ниже, уравнение (3.1) оказывается возможным практически решать методом последовательных приближений уже при $h \approx 2$.

Аналогично, уравнение (2.25) можно представить в виде

$$Q(\alpha) = Q_0(\alpha) + K(Q) \quad (3.4)$$

где

$$Q_0 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin \alpha u}{\alpha} \frac{2y^2 \varphi'(yu) + uy^3 \varphi''(yu)}{\sqrt{1-y^2}} dy du \quad (3.5)$$

$$K(Q) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^1 \gamma B(2\gamma h) Q(\gamma) \sin \alpha u \sin \gamma u du d\gamma \quad (3.6)$$

Из (3.6) несложным подсчетом убеждаемся в том, что $K(Q)$ также будет оператором сближения, если $h > 0.97$. Ниже будет показано, что уравнение (3.4) можно практически решать последовательными приближениями уже при $h \approx 1,5$.

§ 4. Плоский цилиндрический штамп. В этом случае

$$\varphi(\rho) = 0 \quad (4.1)$$

и решение задачи должно производиться на основе уравнения (2.10), которое в силу (4.1) примет следующий вид:

$$Q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \delta c \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 \cos \alpha u \cos \gamma u B(2\gamma h) Q(\gamma) d\gamma du \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) последовательными приближениями дает

$$Q_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} c \delta \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (4.3)$$

$$Q_1(\alpha) = Q_0(\alpha) + \frac{2\delta c}{\pi^2 h} \int_0^1 \int_0^\infty \cos \alpha y \cos \frac{yu}{2h} B(u) \frac{\sin(u/2h)}{u/2h} du dy \quad (4.4)$$

$$Q_2(\alpha) = Q_1(\alpha) + \frac{2\delta c}{\pi^3 h^2} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^\infty \cos \alpha y \cos \frac{yu}{2h} \cos \frac{vx}{2h} \cos \frac{ux}{2h} \times \\ \times B(u) B(v) \frac{\sin(v/2h)}{v/2h} du dv dy dx \quad (4.5)$$

и т. д. Переходя от $Q(\alpha)$ к $q(\rho)$ посредством (2.26), можно получить следующие последовательные приближения для $q(\rho)$:

$$q_0(\rho) = \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.6)$$

$$q_1(\rho) = q_0(\rho) + \frac{2c\delta}{\pi^2 h \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty B(u) \frac{\sin(u/2h)}{u/2h} \cos \frac{u}{2h} du + \\ + \frac{2c\delta}{\pi^2 h} \int_\rho^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2-\rho^2}} \int_0^\infty B(u) \sin \frac{u}{2h} \sin \frac{yu}{2h} du \quad (4.7)$$

$$q_2(\rho) = q_1(\rho) + \quad (4.8)$$

$$+ \frac{2c\delta}{\pi^3 h^2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty B(u) \cos \frac{u}{2h} du \int_0^1 \cos \frac{ux}{2h} dx \int_0^\infty B(v) \frac{\sin(v/2h)}{v/2h} \cos \frac{xv}{2h} dv + \\ + \frac{2\delta c}{\pi^3 h^2} \int_\rho^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2-\rho^2}} \int_0^\infty B(u) \frac{u}{2h} \sin \frac{yu}{2h} du \int_0^1 \cos \frac{ux}{2h} dx \int_0^\infty B(v) \frac{\sin(v/2h)}{v/2h} \cos \frac{xv}{2h} dv$$

$$\begin{aligned}
q_3(\rho) = & q_2(\rho) + \frac{2c\delta}{\pi^4 h^3 \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty B(u) \cos \frac{u}{2h} du \int_0^1 \cos \frac{ux}{2h} dx \times \\
& \times \int_0^\infty B(v) \cos \frac{v}{2h} dv \int_0^1 \cos \frac{vz}{2h} dz \int_0^\infty B(\gamma) \frac{\sin(\gamma/2h)}{\gamma/2h} \cos \frac{\gamma z}{2h} d\gamma + \\
& + \frac{2c\delta}{\pi^4 h^3} \int_\rho^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2-\rho^2}} \int_0^\infty B(u) \frac{u}{2h} \sin \frac{uy}{2h} du \int_0^1 \cos \frac{ux}{2h} dx \int_0^\infty B(v) \times \\
& \times \cos \frac{vx}{2h} dv \int_0^1 \cos \frac{vz}{2h} dz \int_0^\infty B(\gamma) \frac{\sin(\gamma/2h)}{\gamma/2h} \cos \frac{z\gamma}{2h} d\gamma \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Для упрощения использования соотношений (4.6) — (4.9) можно получить асимптотические представления правых частей (4.6) — (4.9) при больших h .

При этом получаем следующие приближенные формулы:

$$q_0(\rho) = \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
q_1(\rho) = & \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.337}{h^3} + \frac{0.685}{h^5} - \right. \\
& \left. - \rho^2 \left(\frac{1.012}{h^3} + \frac{3.42}{h^5} \right) + \rho^4 \frac{3.42}{h^5} \right] \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2(\rho) = & \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.337}{h^3} + \frac{0.685}{h^5} - \right. \\
& \left. - \frac{0.237}{h^6} - \rho^2 \left(\frac{1.012}{h^3} + \frac{0.763}{h^4} + \frac{3.42}{h^5} - \frac{0.770}{h^6} \right) + \rho^4 \left(\frac{3.42}{h^5} + \frac{0.430}{h^6} \right) + \dots \right] \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3(\rho) = & \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.767}{h^3} + \frac{0.492}{h^5} - \frac{0.237}{h^6} - \right. \\
& \left. - \rho^2 \left(\frac{1.012}{h^3} + \frac{0.763}{h^4} + \frac{3.996}{h^5} - \frac{0.770}{h^6} \right) + \rho^4 \left(\frac{3.42}{h^5} + \frac{0.430}{h^6} \right) + \dots \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_4(\rho) = & \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.767}{h^3} + \frac{0.325}{h^4} + \frac{0.492}{h^5} - \frac{0.527}{h^6} - \right. \\
& \left. - \rho^2 \left(\frac{1.012}{h^3} + \frac{0.763}{h^4} + \frac{3.996}{h^5} - \frac{0.335}{h^6} \right) + \rho^4 \left(\frac{3.42}{h^5} + \frac{0.430}{h^6} \right) + \dots \right] \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_5(\rho) = & \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.767}{h^3} + \frac{0.325}{h^4} + \frac{0.737}{h^5} - \frac{0.527}{h^6} - \right. \\
& \left. - \rho^2 \left(\frac{1.012}{h^3} + \frac{0.763}{h^4} + \frac{3.996}{h^5} - \frac{0.335}{h^6} \right) + \rho^4 \left(\frac{3.42}{h^5} + \frac{0.430}{h^6} \right) + \dots \right] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_6(\rho) = & \frac{2c\delta}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.767}{h^3} + \frac{0.325}{h^4} + \frac{0.737}{h^5} - \frac{0.342}{h^6} + \right. \\
& \left. + \rho^2 \left(-\frac{1.012}{h^3} - \frac{0.763}{h^4} - \frac{3.996}{h^5} + \frac{0.335}{h^6} \right) + \rho^4 \left(\frac{3.42}{h^5} + \frac{0.430}{h^6} \right) + \dots \right] \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Как показывает анализ формул (4.10) — (4.16), при переходе от асимптотического разложения q_n к асимптотическому разложению q_{n+1} коэффициенты при h^{-k} ($k = 0, 1, \dots, n$) остаются без изменения. Поэтому можно считать, что первые n членов асимптотического разложения q_n в точности совпадают с первыми n членами разложения q в асимптотический ряд.

В соответствии с формулами (4.10) — (4.16) получаем следующие приближения для силы, действующей на штамп:

$$P_0 = 4c\delta \quad (4.17)$$

$$P_1 = 4c\delta \left[1 + \frac{0.755}{h} - \frac{0.337}{h^3} + \frac{0.228}{h^5} + \dots \right] \quad (4.18)$$

$$P_2 = 4c\delta \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} - \frac{0.337}{h^3} - \frac{0.508}{h^4} + \frac{0.228}{h^5} + \frac{0.506}{h^6} + \dots \right] \quad (4.19)$$

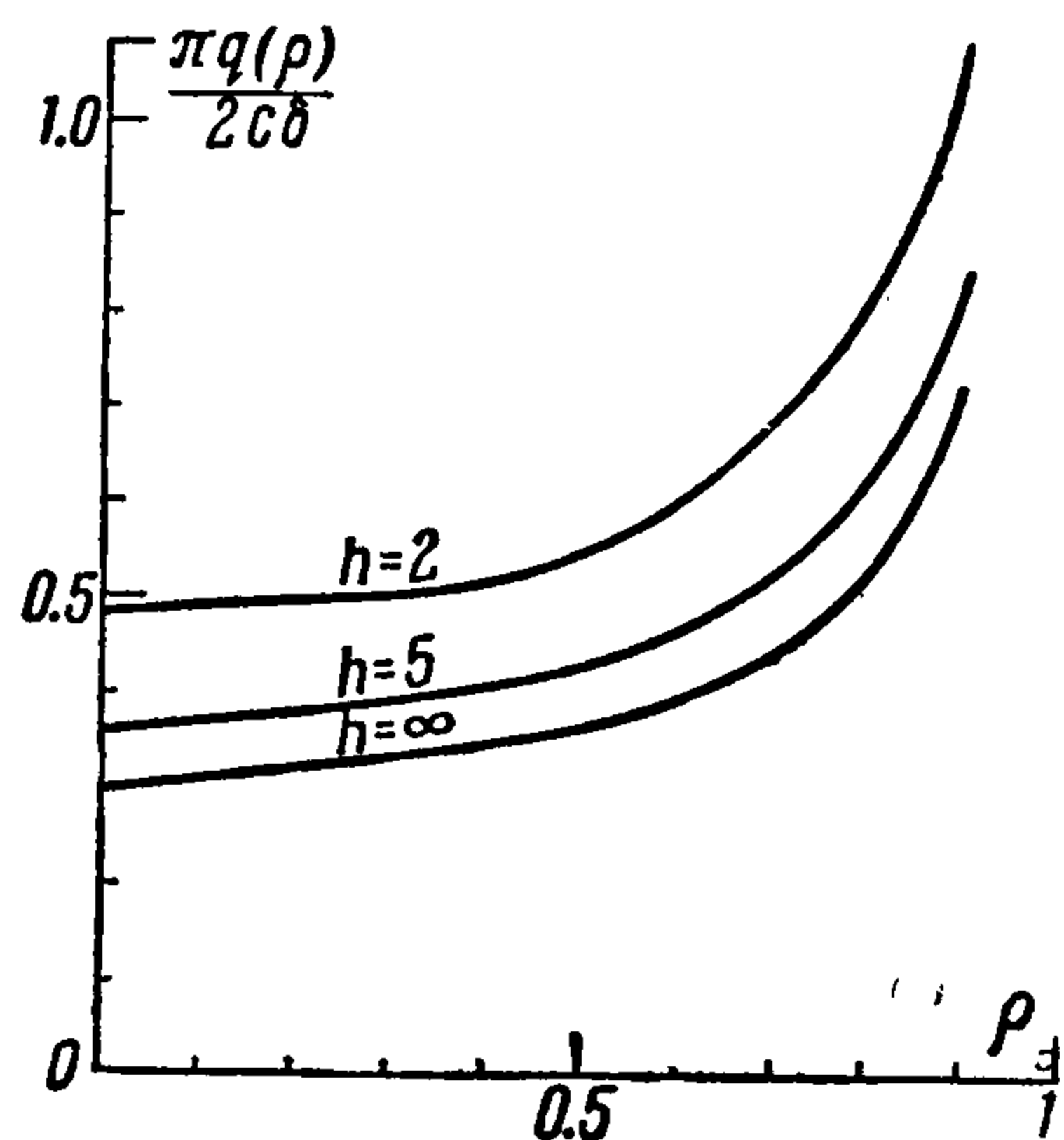
$$P_3 = 4c\delta \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.093}{h^3} - \frac{0.508}{h^4} - \frac{0.348}{h^5} + \frac{0.506}{h^6} + \dots \right] \quad (4.20)$$

$$P_4 = 4c\delta \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.093}{h^3} - \frac{0.183}{h^4} - \frac{0.348}{h^5} - \frac{0.074}{h^6} + \dots \right] \quad (4.21)$$

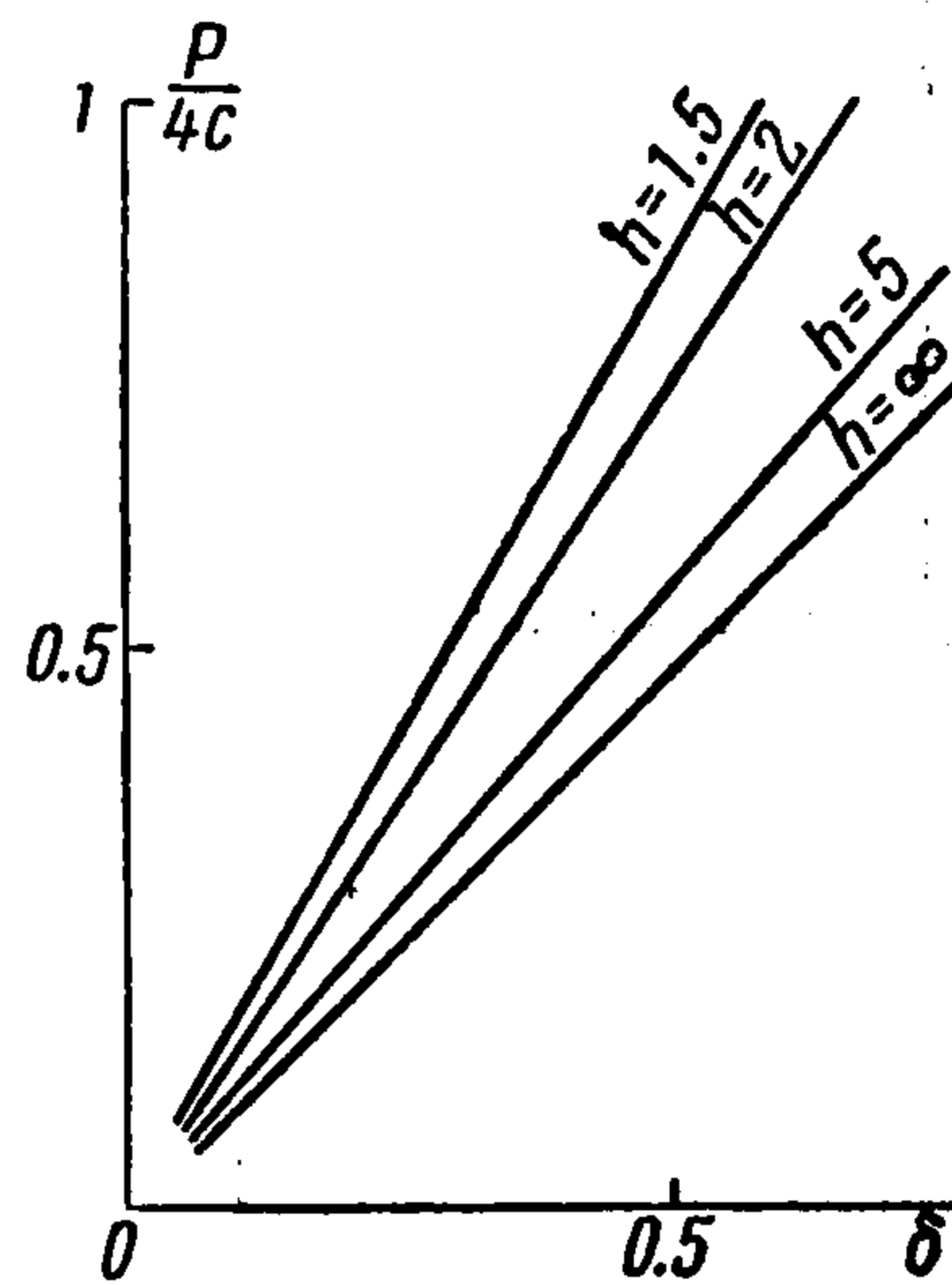
$$P_5 = 4c\delta \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.093}{h^3} - \frac{0.183}{h^4} - \frac{0.104}{h^5} - \frac{0.074}{h^6} + \dots \right] \quad (4.22)$$

$$P_6 = 4c\delta \left[1 + \frac{0.755}{h} + \frac{0.570}{h^2} + \frac{0.093}{h^3} - \frac{0.183}{h^4} - \frac{0.104}{h^5} - \frac{0.110}{h^6} + \dots \right] \quad (4.23)$$

Разложения (4.10) — (4.16) и (4.17) — (4.23) будут тем более точны, чем больше h . Для характеристики границы применимости этих соотно-



Фиг. 3



Фиг. 4

шений заметим, что при $h = 1.5$ переход от пятого к шестому приближению изменяет значение силы P менее чем на 2%. Поэтому можно считать, что формула (4.23) дает хорошее приближение для $h \geq 1.5$.

Аналогичный анализ формул (4.10) — (4.16) показывает, что при $h = 1.7$ переход от пятого приближения к шестому при расчете напряжений под штампом также дает погрешность, не превышающую 2%. Поэтому можно считать, что формула (4.15) дает хорошее приближение для $h \geq 1.7$.

На основании формул (4.10) — (4.16) и (4.17) — (4.23) можно проанализировать влияние толщины слоя на напряженное состояние, вызванное действием штампа.

На фиг. 3 дана зависимость $q(\rho, h)$, рассчитанная на основе формулы (4.15).

На фиг. 4 дан график зависимости силы внедрения $P(\delta)$ при разных h .

§ 5. Параболический штамп. Предположим теперь, что $\varphi(\rho)$ дается соотношением

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{2R} \quad (5.1)$$

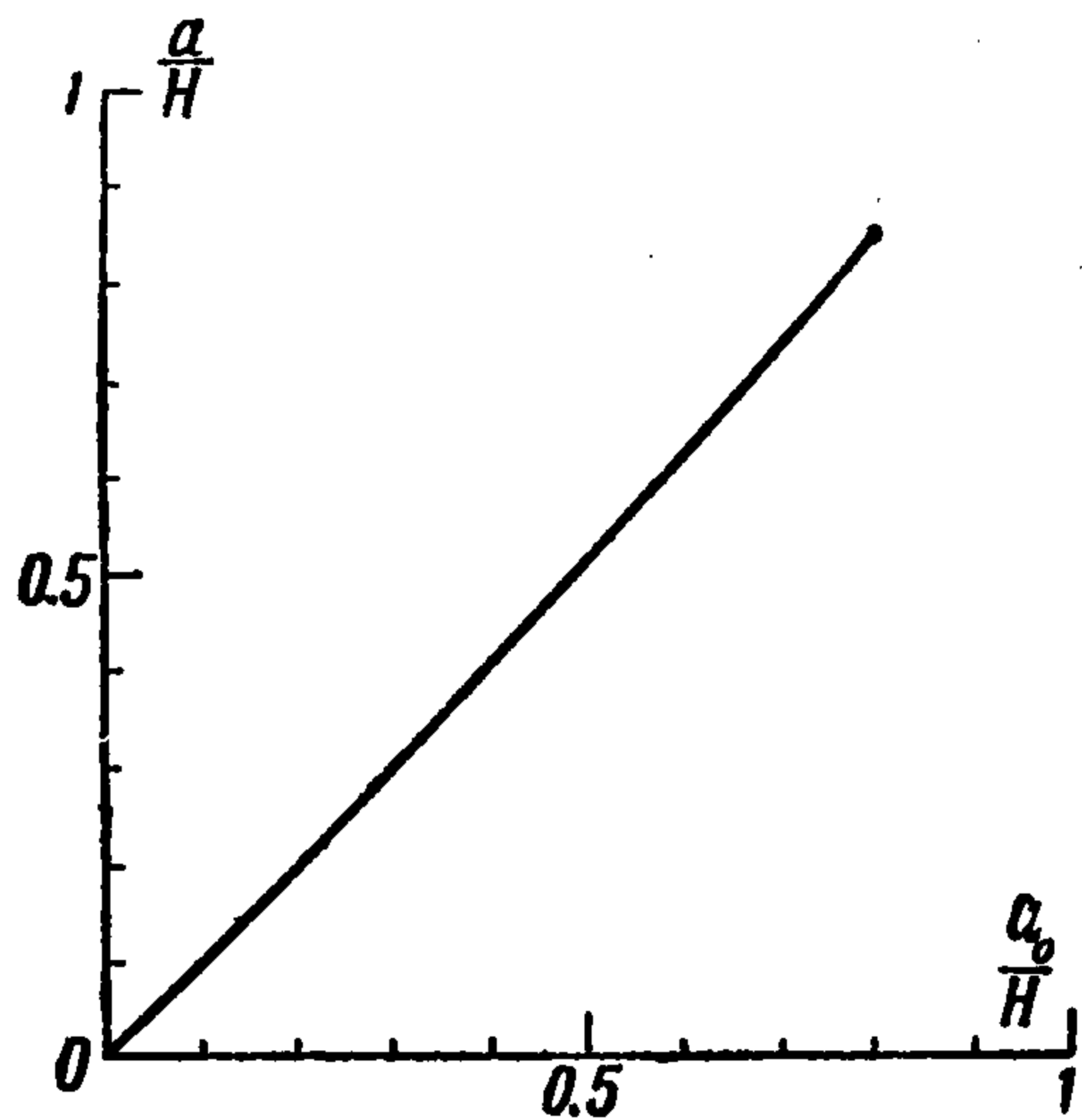
В этом случае в силу гладкости $\varphi(\rho)$ следует для определения Q использовать уравнение (2.25), которое вследствие (5.1) примет следующий вид:

$$Q(\alpha) = -\frac{4c}{\pi R} \frac{1}{\alpha} \frac{d \sin \alpha}{d\alpha} + \frac{1}{\pi h \alpha} \int_0^1 \int_0^\infty B(u) Q\left(\frac{u}{2h}\right) \frac{u}{2h} \sin \frac{uy}{2h} \sin \alpha y dy du \quad (5.2)$$

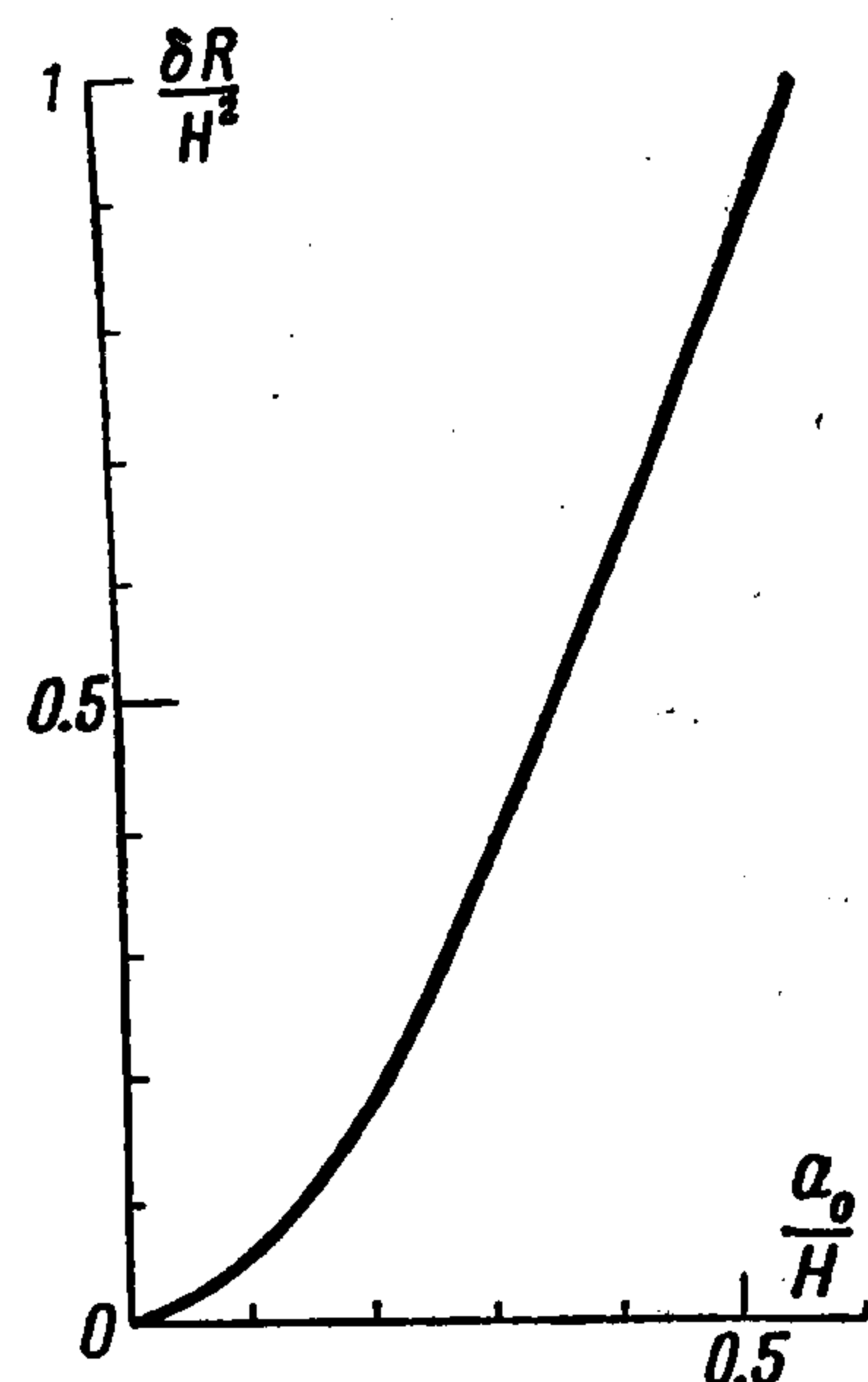
Формула (2.24) в этом случае дает

$$c\left(\delta - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2h} \int_0^\infty Q\left(\frac{u}{2h}\right) B(u) \cos \frac{u}{2h} du = 0 \quad (5.3)$$

Напомним, что радиус зоны контакта нами был принят равным 1.



Фиг. 5



Фиг. 6

Приведем результаты расчета последовательных приближений для давления под штампом $q(\rho)$:

$$q_1(\rho) = \frac{4c}{\pi R} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 + \frac{0.337}{h^3} - \frac{0.266}{h^5} + \frac{0.024}{h^7} + \rho^2 \left(-\frac{0.190}{h^5} + \frac{0.029}{h^7} \right) + \rho^4 \frac{0.010}{h^7} + \dots \right] \quad (5.4)$$

$$q_2(\rho) = \frac{4c}{\pi R} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 + \frac{0.337}{h^3} - \frac{0.266}{h^5} + \frac{0.114}{h^6} + \frac{0.024}{h^7} - \frac{0.205}{h^8} + \rho^2 \left(-\frac{0.190}{h^5} + \frac{0.029}{h^7} - \frac{0.064}{h^8} \right) + \rho^4 \frac{0.010}{h^7} + \dots \right] \quad (5.5)$$

Следующее приближение, как легко видеть, внесет исправления лишь в члены порядка h^{-9} и выше.

Для силы P , обеспечивающей в наших условиях внедрение δ , можно получить такие соотношения:

$$P_1 = \frac{8c}{3R} \left[1 + \frac{0.337}{h^3} - \frac{0.342}{h^5} + \frac{0.037}{h^7} + \dots \right] \quad (5.6)$$

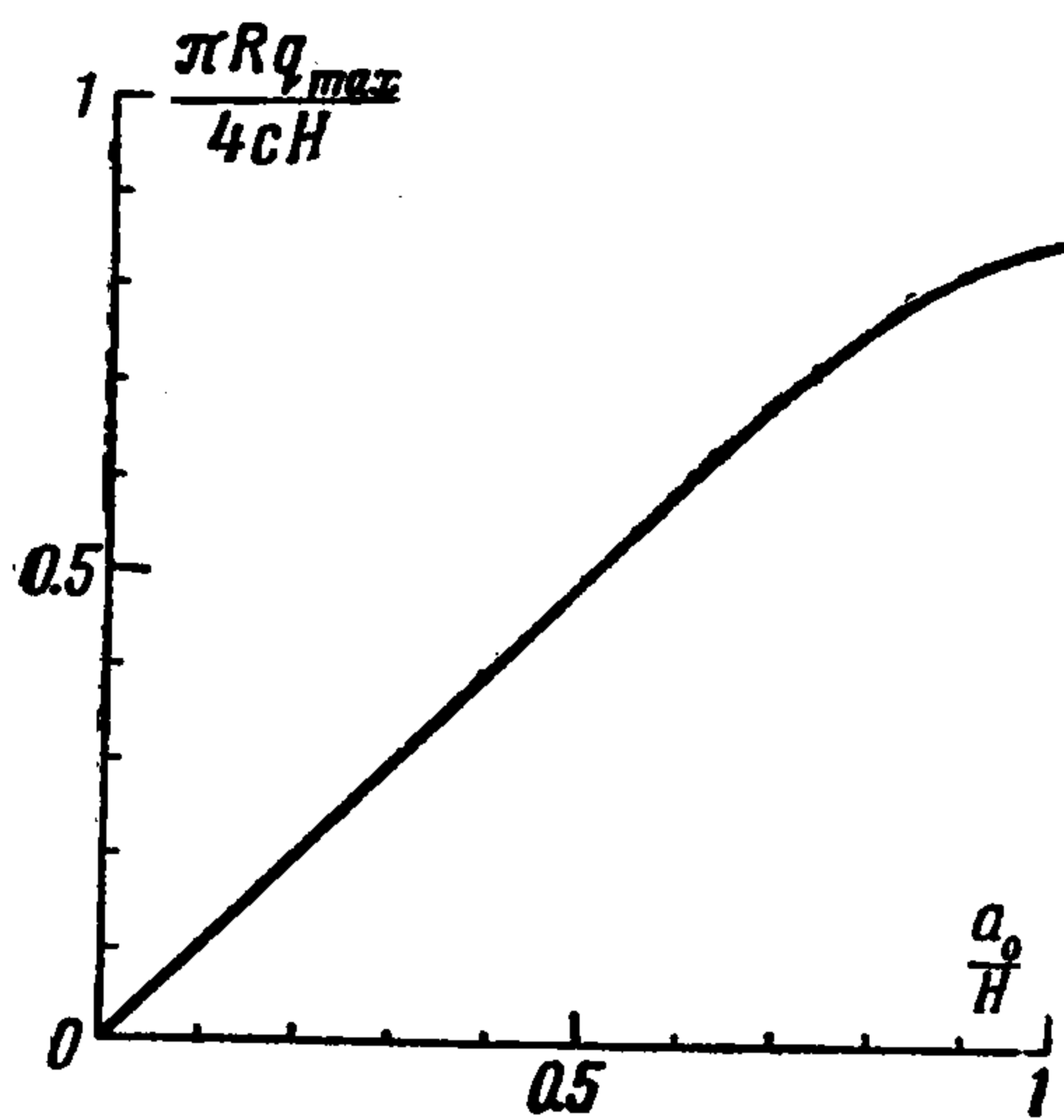
$$P_2 = \frac{8c}{3R} \left[1 + \frac{0.337}{h^3} - \frac{0.342}{h^5} + \frac{0.114}{h^6} + \frac{0.037}{h^7} - \frac{0.230}{h^8} + \dots \right] \quad (5.7)$$

Формулы (5.4) — (5.7) можно рекомендовать к употреблению при $h \geq 1.5$.

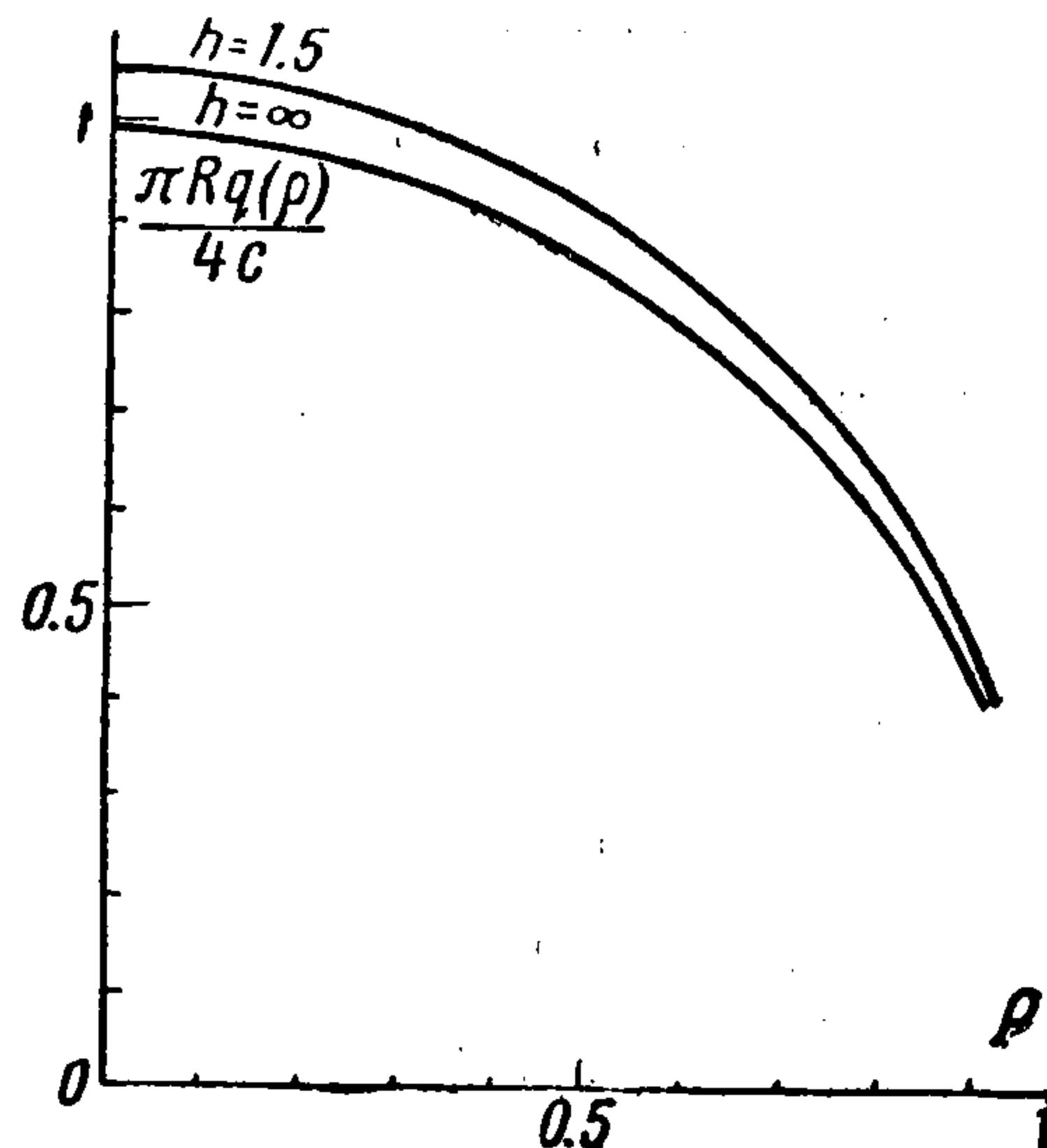
Если отказаться от требования, чтобы радиус площади контакта был равен 1, то формула (5.7) примет вид:

$$P_2 = \frac{8ca^3}{3R} \left[1 + 0.337 \left(\frac{a}{H}\right)^3 - 0.342 \left(\frac{a}{H}\right)^5 + 0.114 \left(\frac{a}{H}\right)^6 + \right. \\ \left. + 0.037 \left(\frac{a}{H}\right)^7 - 0.230 \left(\frac{a}{H}\right)^8 + \dots \right] \quad (5.8)$$

где a — радиус площадки контакта, H — толщина слоя.



Фиг. 7



Фиг. 8

На основании (5.3), (5.5) и (5.8) могут быть получены следующие формулы:

$$\frac{a}{H} = \frac{a_0}{H} - 0.113 \left(\frac{a_0}{H}\right)^4 + 0.114 \left(\frac{a_0}{H}\right)^6 + 0.025 \left(\frac{a_0}{H}\right)^7 - 0.004 \left(\frac{a_0}{H}\right)^8 + \dots \quad (5.9)$$

$$\delta = \frac{H^2}{R} \left[\left(\frac{a_0}{H}\right)^2 - 0.504 \left(\frac{a_0}{H}\right)^3 - 0.225 \left(\frac{a_0}{H}\right)^5 - 0.098 \left(\frac{a_0}{H}\right)^7 - 0.197 \left(\frac{a_0}{H}\right)^8 + \dots \right]$$

$$q_{\max} = \frac{4cH}{\pi R} \left[\frac{a_0}{H} + 0.225 \left(\frac{a_0}{H}\right)^4 - 0.018 \left(\frac{a_0}{H}\right)^6 - 0.0126 \left(\frac{a_0}{H}\right)^7 + 0.013 \left(\frac{a_0}{H}\right)^8 + \dots \right]$$

$$a_0 = \left[\frac{3PR(m-1)}{8m} \right]^{1/2}$$

Здесь q_{\max} — максимальное давление под штампом. Фиг. 5, 6, 7 иллюстрируют зависимость (5.9). На фиг. 8 дана зависимость $q(\rho)$ при разных h .

В заключение отметим, что уравнения (4.2) и (5.2), определяющие $Q(\alpha)$ и являющиеся, как это было доказано, уравнениями Фредгольма, допускают численное интегрирование при любых h .

Поступила 11 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1955.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. лит., 1955.