

**О РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИНАХ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ХРУПКОМ
РАЗРУШЕНИИ. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ.
ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТРЕЩИНЫ**

Г. И. Баренблатт

(Москва)

Вопросу образования и развития трещин при хрупком разрушении твердых тел было посвящено большое число исследований. Начало этим исследованиям было положено известной работой Гриффитса [1], посвященной определению критической длины трещины при данной нагрузке, т. е. длины трещины, при которой она начинает катастрофически расширяться. Исходя из представления об эллиптической форме трещины, образующейся в бесконечном теле, подвергаемом на бесконечности однородному растяжению, Гриффитс получил выражение для критической длины трещины, как соответствующей экстремуму полного приращения энергии (равного сумме уменьшения упругой энергии тела за счет образования трещины и поверхностной энергии).

В последние годы в связи с многочисленными техническими приложениями интерес к проблеме трещин снова возрос и появился ряд исследований, среди которых в первую очередь следует назвать работы Орована и Ирвина, обобщающих и усовершенствующих теорию Гриффитса. Библиографию и краткий обзор этих работ можно найти в последних статьях Орована [2], Ирвина [3] и Бьюкнера [4].

Картину развития трещин в хрупких материалах можно себе представить следующим образом. В материале имеется огромное число микротрещин. При увеличении нагрузки в определенном месте тела достигается напряжение, достаточное для развития имеющейся в этом месте микротрещины некоторого размера. Начало развития микротрещины определяется тем, или иным условием, так как ввиду того, что обычно размер микротрещины мал сравнительно с характерным линейным масштабом изменения напряжений, напряженное состояние в окрестности микротрещины можно представлять себе в соответствии со схемой Гриффитса в виде однородного растяжения на бесконечности. В ходе развития трещины ее размер увеличивается и, наконец, становится сравнимым с характерным масштабом изменения напряжений. При определенных условиях (например, когда силы не слишком велики и приложены достаточно далеко от границ тела) развитие трещины по достижении ею определенной длины останавливается, и в таком положении при неизменной нагрузке тело может находиться длительное время.

В предлагаемой работе рассматриваются равновесные трещины, т. е. трещины, образовавшиеся в хрупком теле под действием данной, постоянной во времени системы сил и не изменяющиеся со временем. По-видимому, впервые представление о равновесных трещинах встречается в близких по идеям, но выполненных независимо работах Мотта [5] и Я. И. Френкеля [6], содержащих также критический анализ теории Гриффитса. Оба эти автора, однако, ограничились лишь качественными рассмотрениями, исходя из представления о трещине бесконечной длины.

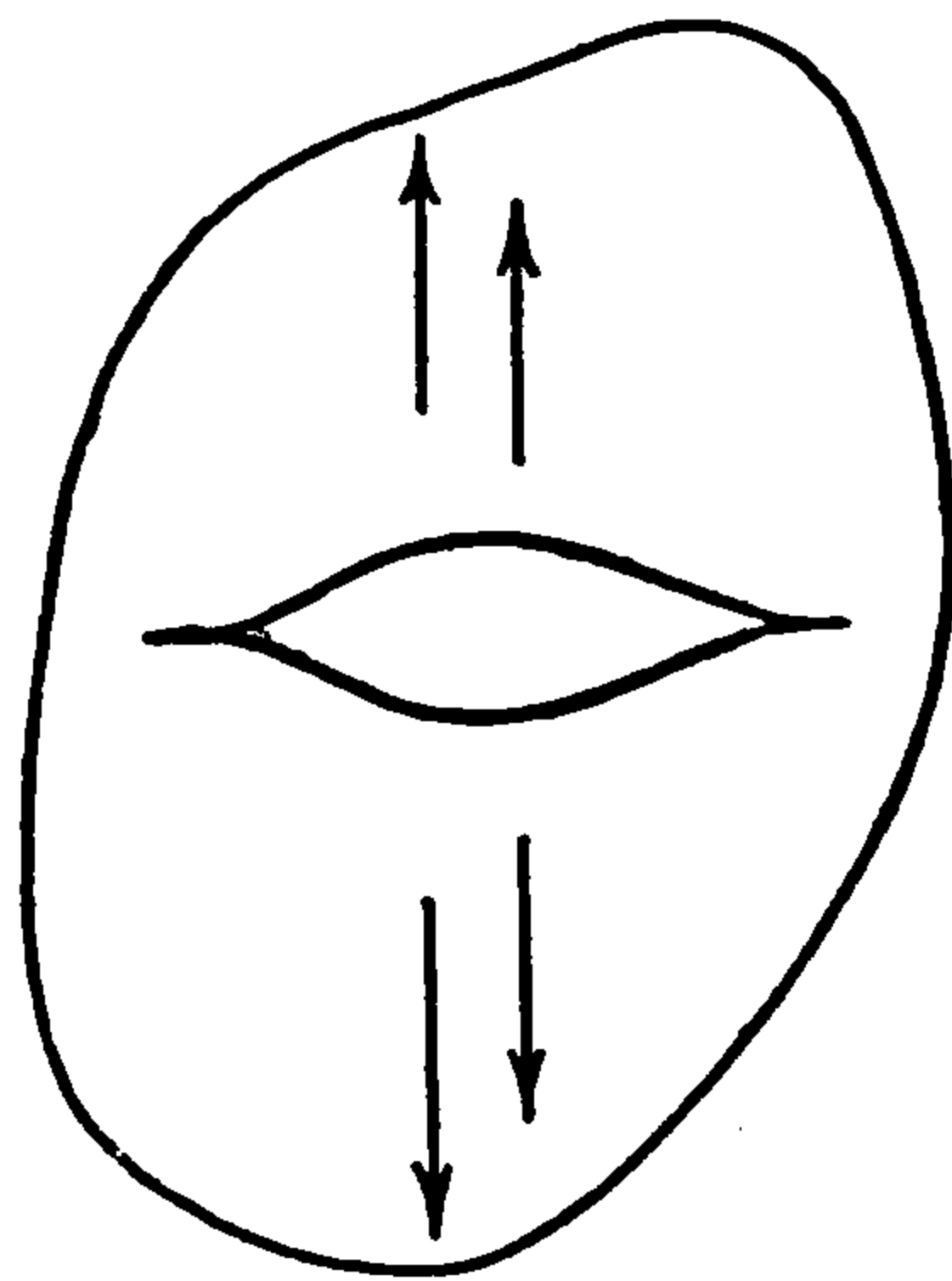
В работе дается постановка задачи о равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении материала, как задачи классической теории упругости, основанная на некоторых весьма общих гипотезах о структуре трещины и силах взаимодействия ее противоположных берегов, а также на гипотезе конечности напряжений на концах трещины, или, что то же самое, плавности смыкания противоположных берегов трещины на ее концах. Последняя гипотеза была впервые выдви-

нута С. А. Христиановичем [7] при рассмотрении некоторых задач образования трещин в горных породах. Используя эту гипотезу, оказалось возможным решить ряд задач, связанных с развитием трещин в горных породах [7-11].

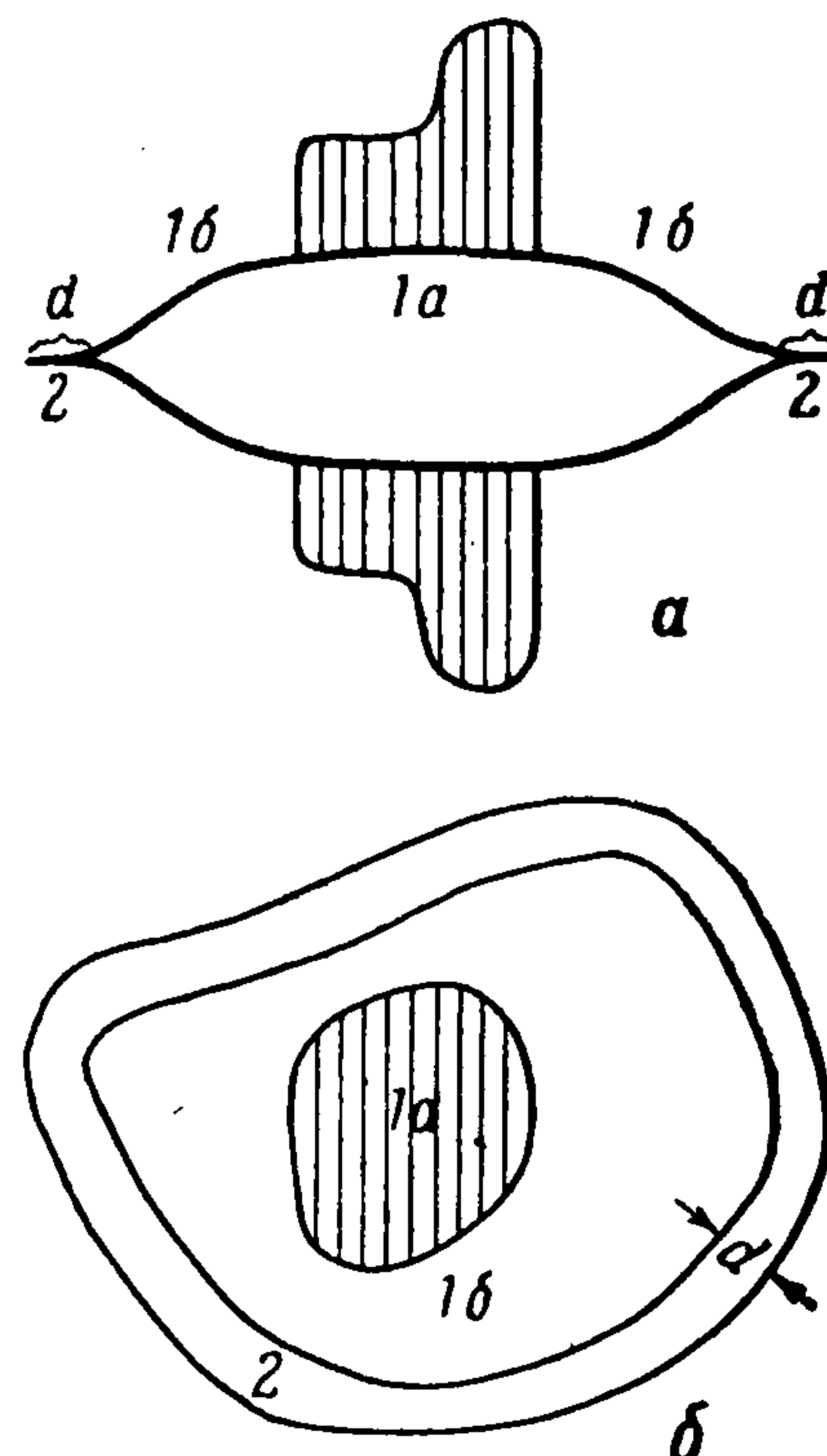
При рассмотрении задач, связанных с горными породами, можно, по-видимому, пренебречь влиянием сцепления материала сравнительно с влиянием горного давления, так что неучет сил сцепления материала в работах [7-11] может быть оправдан. Однако в других задачах хрупкого разрушения (например, в задачах хрупкого разрушения металлических конструкций) факторы типа горного давления отсутствуют и учет сил сцепления материала становится абсолютно необходимым. Оказывается, что с вполне достаточной полнотой интенсивность сил сцепления и их распределение можно охарактеризовать некоторой новой универсальной характеристикой материала, которую мы назвали модулем сцепления. При этом размеры трещин и прочие их характеристики однозначно определяются через приложенные нагрузки и модуль сцепления. Для определения модуля сцепления материала можно предложить достаточно простые схемы опытов.

§ 1. Основные представления и гипотезы. Постановка задачи. Рассмотрим равновесные трещины в хрупком материале, т. е. трещины, сохраняющие постоянные размеры под действием данной системы сил. Кроме того, ограничимся здесь рассмотрением простейшего случая трещин, расположенных в одной плоскости (так что точки поверхности трещины в недеформированном состоянии располагаются в одной плоскости — плоскоститрещины). Этот случай имеет место, когда приложенные нагрузки симметричны относительно плоскоститрещины; общий случай будет рассмотрен особо.

Итак, рассматривается следующая задача (фиг. 1). К изотропному хрупкому упругому телу, размеры которого мы предполагаем большими сравнительно с длиной трещины, приложена некоторая разрывающая нагрузка, симметричная относительно плоскости трещины. При этом предполагается, что суммарная сила, приложенная с каждой стороны трещины, ограничена. В частности, нагрузка может быть приложена на части самой поверхности трещины. Напряжения в теле вдали от трещины, очевидно, стремятся к нулю.



Фиг. 1



Фиг. 2

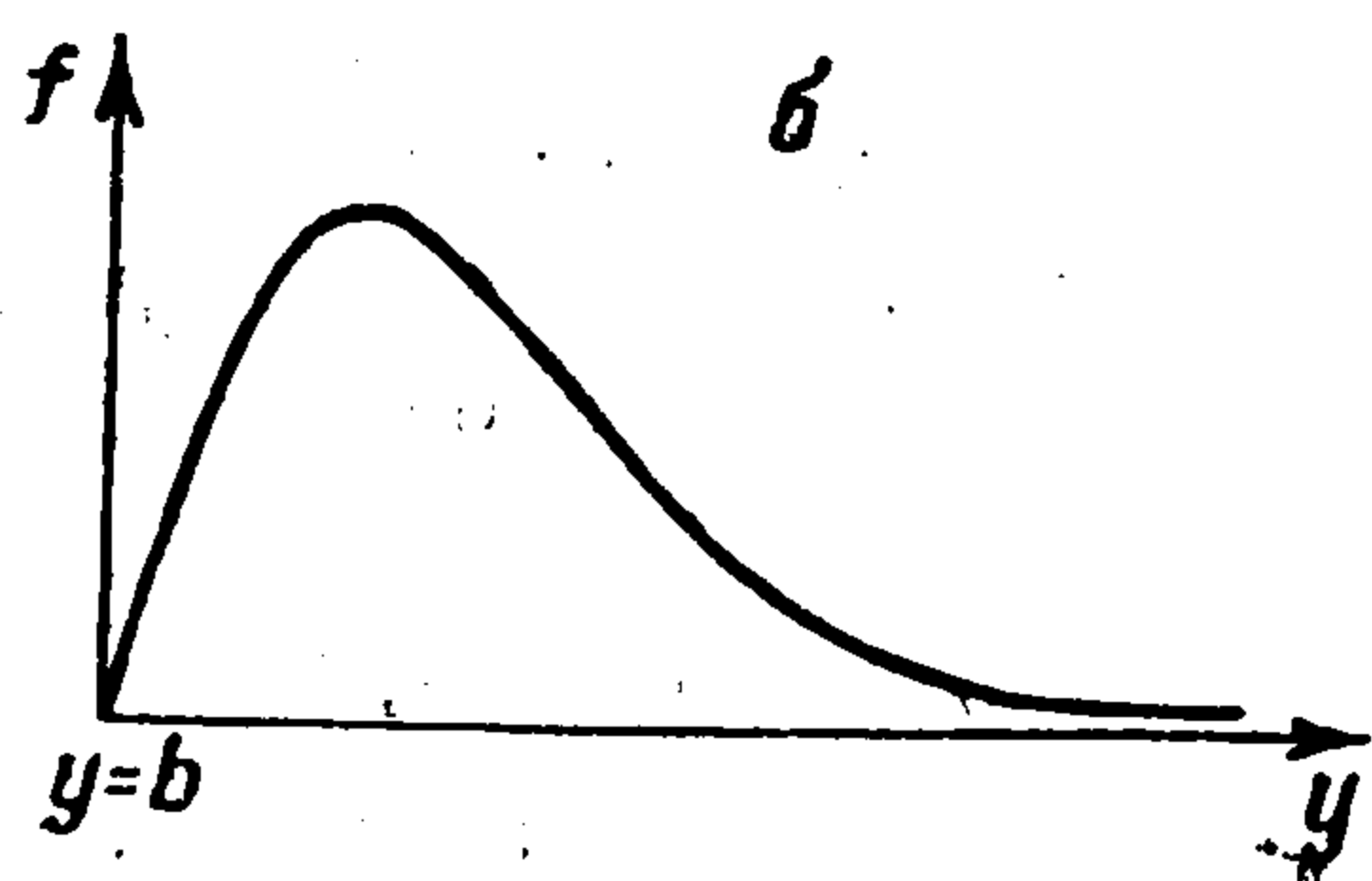
Под действием приложенной нагрузки, если она достаточно велика, имеет место хрупкое разрушение материала, которое, если оставить в стороне случайные факторы, должно иметь место в плоскости симметрии приложенной нагрузки. При этом образуется трещина, которая расширяется и достигает некоторых определенных размеров. Задача заключается в нахождении размеров трещины, соответствующих данной нагрузке, и других параметров трещины.

Под действием приложенной нагрузки, если она достаточно велика, имеет место хрупкое разрушение материала, которое, если оставить в стороне случайные факторы, должно иметь место в плоскости симметрии приложенной нагрузки. При этом образуется трещина, которая расширяется и достигает некоторых определенных размеров. Задача заключается в нахождении размеров трещины, соответствующих данной нагрузке, и других параметров трещины.

Обратимся сперва к исследованию более простого случая, когда нагрузка приложена к краю поверхности трещины. Таким образом, предпо-

лагается, что в теле имеется некоторый начальный разрез, на котором прикладывается та или иная разрывающая нагрузка, предполагаемая нормальной к плоскости трещины. Происходит хрупкое разрушение, и этот разрез расширяется (оставаясь плоским в силу симметрии нагрузки и изотропии тела) до достижения некоторых определенных размеров.

Схематически разрез (а) и план (б) такой трещины изображены на фиг. 2. Трещина разбивается на две области: область 1 — внутреннюю область и область 2 — концевую область.



Фиг. 3

Во внутренней области противоположные берега трещины находятся на значительном расстоянии, так что взаимодействие между этими берегами не имеет места. В свою очередь внутренняя область трещины распадается на две подобласти 1а и 1б, в первой из которых на противоположные берега трещины действует приложенная нагрузка, а во второй противоположные берега трещины свободны от напряжений.

В концевой области противоположные берега трещины близко подходят один к другому, так что между ними действуют весьма значительные по величине силы взаимодействия, притягивающие один берег трещины к другому.

Как известно, интенсивность сил притяжения, действующих в материале, сильно зависит от расстояния, сперва быстро возрастая при увеличении расстояния y между притягивающимися телами от нормального межатомного расстояния $y = b$, для которого эта интенсивность равна нулю, до некоторого критического расстояния, где она достигает максимального значения, равного по порядку величины модулю Юнга, и далее быстро убывая с увеличением расстояния (фиг. 3).

Точное определение системы сил сцепления, действующих в концевой области, затруднительно. Однако можно ввести некоторые гипотезы, которые позволяют ограничиться одной суммарной универсальной характеристикой распределения сил сцепления для данного материала.

Первая гипотеза. Размер d концевой области мал сравнительно с размером всей трещины.

Вторая гипотеза. Распределение смещений в концевой области не зависит от действующих нагрузок и для данного материала при данных условиях (температура, состав и давление окружающей атмосферы и т. п.) всегда одинаково.

Иными словами, согласно этой гипотезе концы y всех трещин в данном материале при данных условиях всегда одинаковы. При расширении трещины концевая область просто перемещается в другое место, но распределение смещений в сечениях концевой области плоскостями, нормальными контуру трещины, остается тем же самым. Силы сцепления, притягивающие один к другому противоположные берега трещины, зависят только от взаимного расположения берегов (т. е. от распределения смещений), поэтому согласно сформулированной гипотезе эти силы будут одинаковыми.

Фиксированная форма концевой области трещины соответствует максимальному возможному сопротивлению. Подчеркнем, что ввиду имеющей место для большинства материалов необратимости трещин, вторая гипотеза применима только к тем равновесным трещинам, которые образовались при первичном разрыве первоначально сплошного хрупкого тела, но не к тем, которые образовались при искусственном надрезе без последующего расширения или при уменьшении нагрузки из трещин, существовавших при какой-то большей нагрузке. Для последних типов трещин напряжения в концевой области могут быть другими (меньшими); эти типы трещин исключаются из рассмотрения.

Третья гипотеза. Противоположные берега трещины на ее краях плавно смыкаются, или, что то же, напряжение в конце трещины конечно.

(Как уже было отмечено выше, эта гипотеза была впервые высказана С. А. Христиановичем в связи с образованием трещин в горных породах.)

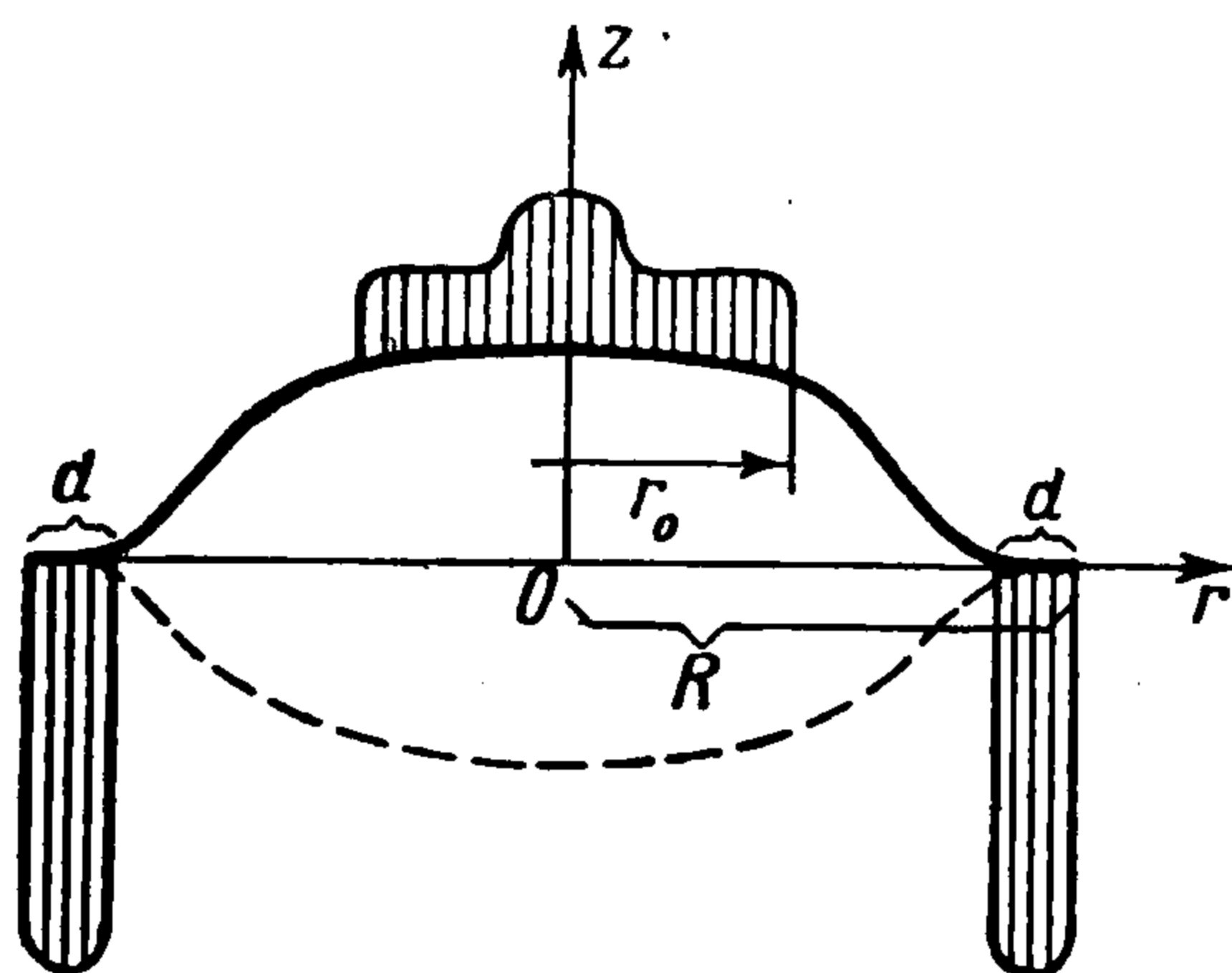
Приведенные гипотезы дают возможность получить решение рассматриваемой задачи. Отметим отличия, возникающие в случае, если нагрузки приложены не на поверхности трещины, а внутри тела. В принципе при этом ничего не меняется. В самом деле, представим напряженное состояние, действующее в теле с трещиной под действием некоторой нагрузки, приложенной внутри тела, в виде суммы двух напряженных состояний. Одно из этих напряженных состояний соответствует напряженному состоянию сплошного тела без трещины, возникающему под действием данной системы нагрузок. Другое напряженное состояние соответствует напряженному состоянию в теле с трещиной и с нагрузками, приложенными на поверхности трещины. Суммарное нормальное и касательное напряжения на поверхности внутренней области трещины должны быть равны нулю, так как поверхность внутренней области трещины свободна от напряжений. Поэтому приложенная на поверхности внутренней области трещины нагрузка представляет собой сжимающее нормальное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку растягивающему напряжению, возникающему в плоскости симметрии приложенной нагрузки в теле без трещины. В концевой области для второго напряженного состояния нормальные напряжения равны напряжениям сил сцепления, за вычетом соответствующих напряжений первого напряженного состояния. Ввиду того, что плоскость трещины является плоскостью симметрии приложенной нагрузки, касательные напряжения на поверхности трещины отсутствуют. Нормальные смещения точек поверхности трещины определяются только вторым напряженным состоянием, поскольку для первого состояния они равны нулю.

Итак, изменение сравнительно с ранее рассмотренным частным случаем состоит в том, что внутренняя область трещины уже не разбивается на две подобласти, а нагружение поверхности трещины имеет место по всей внутренней области.

Сформулированные выше три гипотезы применены также и в этом, более общем случае. Относительно первой и третьей гипотез это не требует пояснений. Что же касается второй гипотезы, то возможность ее применения обуславливается тем, что изменения приложенных напряжений в

концевой области под действием приложенной нагрузки имеют самое большее порядок этой приложенной нагрузки. Напряжения же в концевой области, как уже указывалось ранее, имеют порядок модуля Юнга, т. е. значительно превосходят по величине приложенную нагрузку. Таким образом, и в общем случае можно пренебречь изменениями напряжений, приложенных к поверхности трещины в концевой области, под действием приложенной нагрузки, и считать распределение напряжений и смещений в концевой области не зависящим от нагрузки, т. е. принять вторую гипотезу.

§ 2. Осесимметричные трещины. 1°. Пусть трещина имеет форму круглой щели радиуса R . На обе стороны части поверхности круглой щели (фиг. 4) при



Фиг. 4

значениях текущего радиуса r , меньших некоторого радиуса r_0 (радиус области приложения нагрузки), действуют сжимающие нормальные напряжения $Z_z = -p(r)$. Часть поверхности щели, соответствующая промежуточной области $r_0 < r \leq R - d$, свободна от напряжений. В концевой области $R - d < r \leq R$ действуют растягивающие напряжения $G(r)$, обусловленные силами сцепления.

Как показано Снеддоном [12], распределение нормальных смещений точек поверхности круглой трещины в бесконечном упругом теле, если на этой поверхности действует нормальное напряжение $-g(r)$, а касательные напряжения отсутствуют, имеет вид:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \int_{\rho}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{xg(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(\rho = \frac{r}{R}\right) \quad (2.1)$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Интегрируя по частям, приводим это выражение к виду

$$w = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \left\{ \sqrt{1-\rho^2} \int_0^1 \frac{xg(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{\rho}^1 \sqrt{\mu^2 - \rho^2} \left[\frac{d}{d\mu} \int_0^1 \frac{xg(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] d\mu \right\} \quad (2.2)$$

Условием плавного смыкания противоположных берегов трещины на ее кромке, очевидно, является соотношение

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=R} = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = 0 \quad (2.3)$$

Дифференцируя (2.2), получаем

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{xg(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \rho \int_{\rho}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \left[\frac{d}{d\mu} \int_0^1 \frac{xg(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] \right)$$

Второй член правой части этого соотношения в широких предположениях относительно функции g стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1$, откуда видно,

что для выполнения условия (2.3) необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^1 \frac{xg(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (2.4)$$

В этой же форме соотношение (2.4) было получено в работе [9] как условие конечности напряжений на кромке осесимметричной трещины. В рассматриваемом случае

$$g(r) = \begin{cases} p(r) & (0 \leq r \leq r_0) \\ 0 & (r_0 < r \leq R-d) \\ -G(r) & (R-d < r \leq R) \end{cases} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем

$$\int_0^{r_0/R} \frac{xp(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{1-d/R}^1 \frac{xG(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (2.6)$$

Рассмотрим более подробно второй интеграл (2.6):

$$J = \int_{1-d/R}^1 \frac{xG(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.7)$$

В силу первой гипотезы d мало сравнительно с R , так что x во всей области интегрирования $1-d/R \leq x \leq 1$ мало отличается от единицы и можно считать

$$J = \int_{1-d/R}^1 \frac{G(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.8)$$

Перейдем в этом интеграле от безразмерной переменной x к размерной координате $s = R - Rx$, отсчитываемой от кромки трещины и изменяющейся в пределах области интеграции от нуля до d . Имеем

$$dx = -\frac{1}{R} ds, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{R} \sqrt{(R+Rx)(R-Rx)} \approx \frac{1}{R} \sqrt{2Rs}$$

поскольку Rx в области интегрирования мало отличается от R .

Подставляя это в (2.8), получаем

$$J = \frac{1}{\sqrt{2R}} \int_0^d \frac{F(s) ds}{\sqrt{s}}, \quad F(s) = G(r) \quad (2.9)$$

В силу второй гипотезы распределение $F(s)$ не зависит от приложенной нагрузки, так что интеграл

$$\int_0^d \frac{F(s) ds}{\sqrt{s}}$$

представляет собой для данного материала при данных условиях постоянную величину, которую мы обозначим через K и будем называть модулем сцепления.

Легко показать, что размерность модуля сцепления

$$[K] = FL^{-3/2}$$

где F — символ размерности силы, а L — символ размерности длины.

Модуль сцепления представляет собой характеристику материала, имеющую, по-видимому, основное значение в теории хрупкого разрушения; он фигурирует в основных соотношениях вне зависимости от характера нагружения и геометрической формы трещины. Имеем, таким образом,

$$J = \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (2.10)$$

Подставляя это соотношение в уравнение (2.6), получаем, переходя от безразмерной переменной x к размерной переменной r :

$$\int_0^{r_0} \frac{rp(r) dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = K \sqrt{\frac{R}{2}} \quad (2.11)$$

Это уравнение определяет радиус трещины R в зависимости от приложенной [нагрузки],

2°. Рассмотрим некоторые примеры. Пусть приложенная нагрузка $p(r)$ постоянна, $p(r) = P_0$. Тогда уравнение (2.11) принимает вид:

$$P_0 [R - \sqrt{R^2 - r_0^2}] = K \sqrt{\frac{R}{2}} \quad (2.12)$$

Это уравнение удобно привести к безразмерной форме

$$\frac{P_0 \sqrt{r_0}}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{-3/2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \right) \quad (2.13)$$

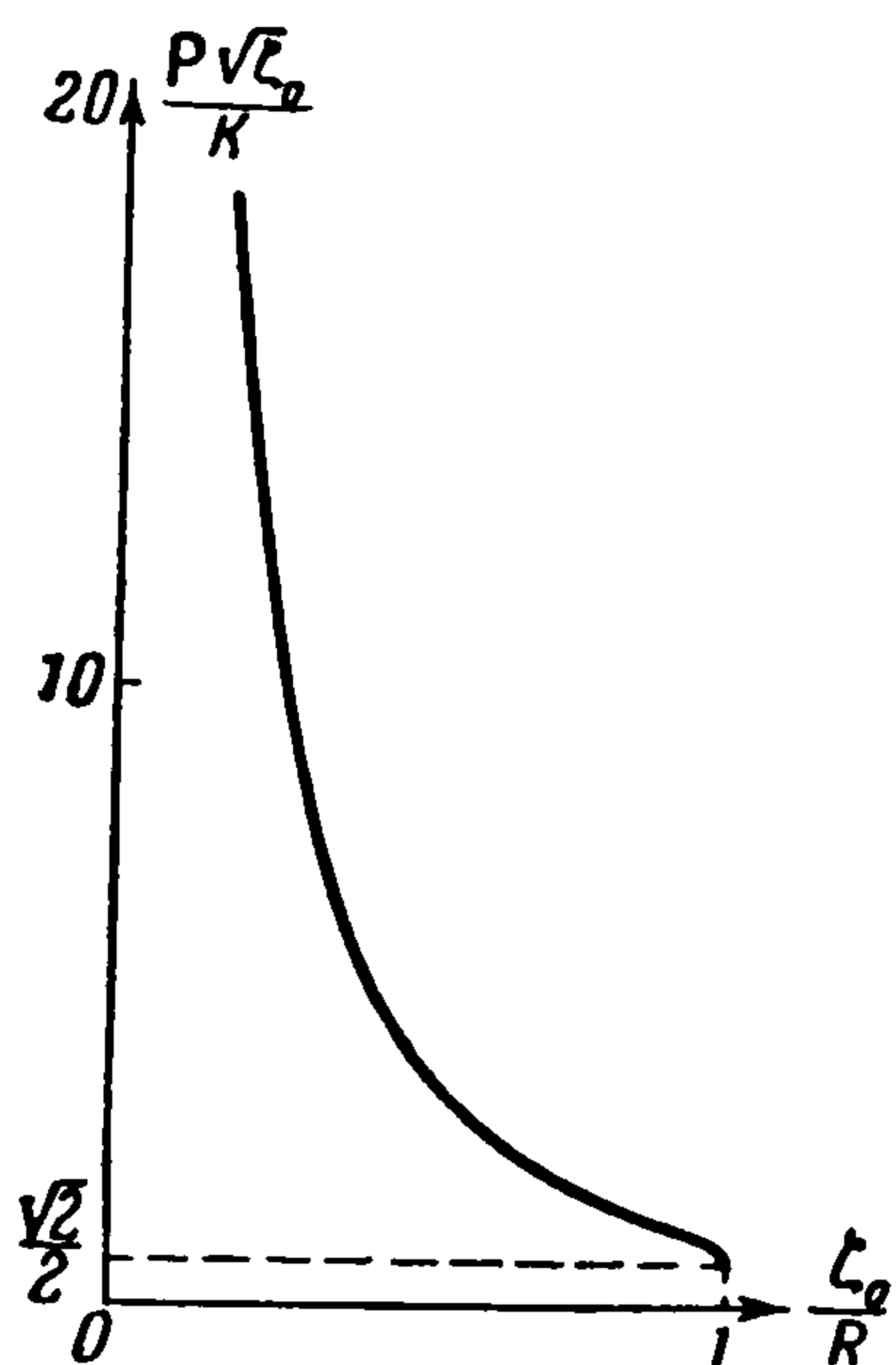
График зависимости (2.13) приведен на фиг. 5. Мы видим, что при $P_0 \sqrt{r_0} < K/\sqrt{2}$ уравнение (2.13) не имеет действительных решений. Этот факт допускает очень простое истолкование: существует некоторое минимальное напряжение, приложение которого на круге данного радиуса обеспечивает возможность раскрытия трещины. При напряжениях, меньших этого минимального напряжения, трещина не раскрывается. Величина минимального напряжения убывает обратно пропорционально корню квадратному из радиуса области приложения нагрузки. Каждой нагрузке, превосходящей минимальную, соответствует один единственный радиус трещины. С увеличением нагрузки радиус трещины, естественно, возрастает.

Особенно любопытен частный случай, когда трещина образуется равными по величине и противоположно направленными сосредоточенными силами, приложенными на ее противоположных берегах. Этот предельный случай соответствует $r_0/R \ll 1$ и $P_0 \pi r_0^2 = T$, где T — величина сосредоточенной силы. Имеем из (2.12)

$$P_0 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \right] \approx \frac{P_0}{2} \frac{r_0^2}{R^2} = \frac{T}{2\pi R^2} = \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (2.14)$$

Отсюда получаем

$$R = \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}K} \right)^{2/3} \quad (2.15)$$



Фиг. 5

Используя П-теорему теории подобия (см. книгу Л. И. Седова [11]), последний результат можно получить с точностью до постоянного множителя из одних соображений размерности.

3°. В некоторых предположениях можно показать существование единственного решения уравнения (2.11) при произвольной нагрузке $p(r)$. В самом деле, предположим, что

$$\int_0^{r_0} \frac{rp(r) dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} > K \sqrt{\frac{r_0}{2}} \quad (2.16)$$

Очевидно, что с ростом R функция

$$\int_0^{r_0} \frac{rp(r) dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \Phi_1(R)$$

монотонно убывает, а функция $\Phi_2(R) = K\sqrt{R}/\sqrt{2}$ монотонно возрастает. Из (2.16) следует, что $\Phi_1(r_0) > \Phi_2(r_0)$ и, стало быть, существует одно единственное значение $R > r_0$, для которого $\Phi_1(R) = \Phi_2(R)$, т. е. для которого выполняется условие (2.11). Неравенство (2.16) является условием того, чтобы приложенные нагрузки превосходили минимальные нагрузки, приложение которых на круглой щели данного радиуса может раскрыть трещину.

§ 3. Осесимметричные трещины (продолжение). 1°. Рассмотрим нормальные смещения точек поверхности трещины, определяющие ее ширину. При заданной нагрузке радиус трещины R определяется соотношением (2.11). Зная радиус R , можно определить упомянутые смещения, пользуясь формулами (2.1) и (2.5). Имеем

$$\phi = \frac{\pi E w}{4(1-\nu^2)R} = \phi_1 - \phi_2 \quad (3.1)$$

где при $\rho < r_0/R$

$$\phi_1 = \int_{\rho}^{r_0/R} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{x p(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{r_0/R}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^{r_0/R\mu} \frac{x p(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.2)$$

$$\phi_2 = \int_{1-d/R}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_{(R-d)/R\mu}^1 \frac{x G(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.3)$$

Рассмотрим внутренний интеграл в выражении для ϕ_2 . Поскольку μ близко к единице, этот интеграл близок к интегралу

$$\int_{1-d/R}^1 \frac{x G(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (3.4)$$

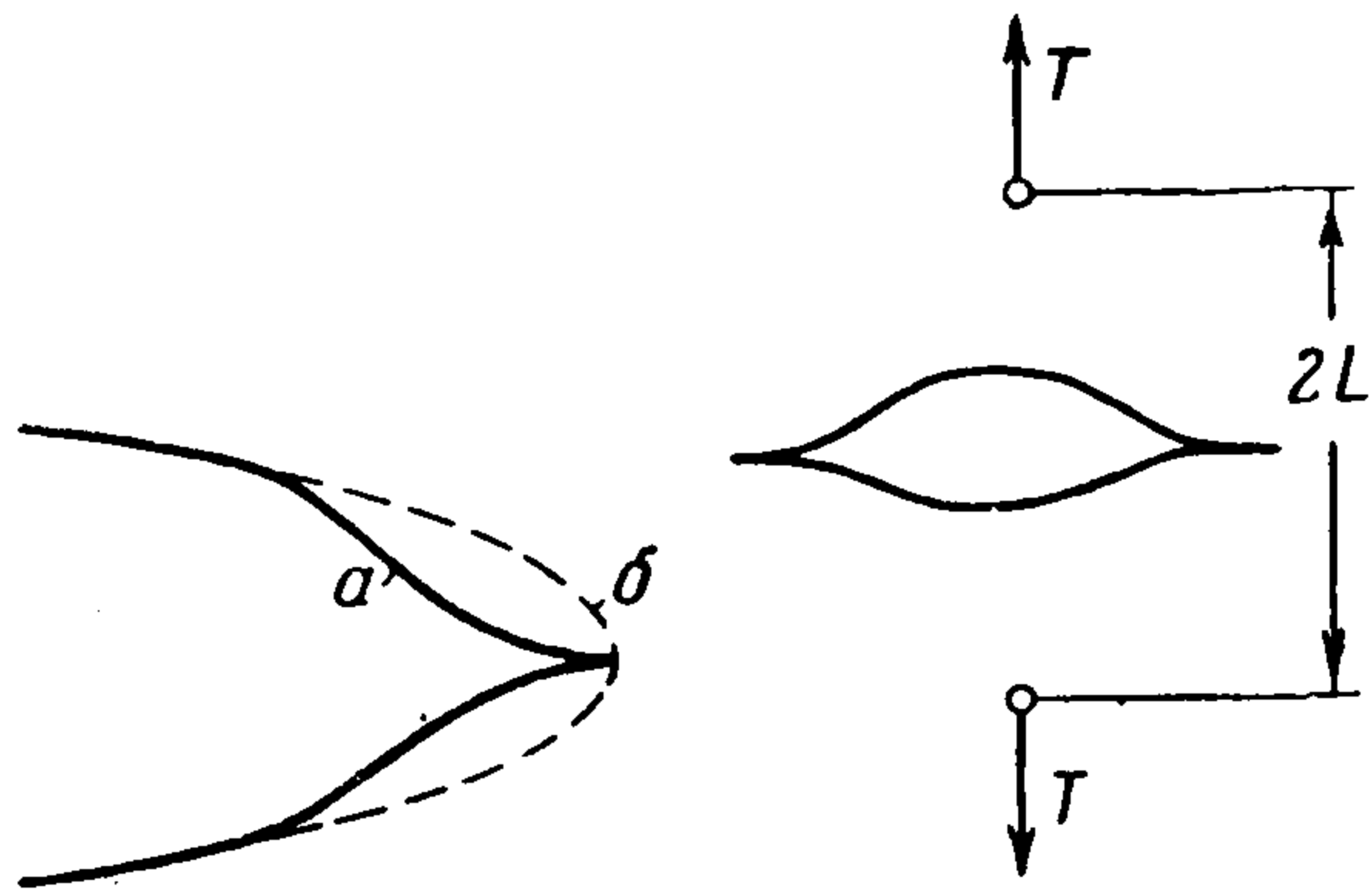
Отсюда и из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \phi_2 &\approx \int_{1-d/R}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \frac{K}{\sqrt{2R}} = \frac{K}{\sqrt{2R}} \left[\sqrt{1-\rho^2} - \sqrt{\left(1-\frac{d}{R}\right)^2 - \rho^2} \right] \approx \\ &\approx \frac{K}{\sqrt{2R}} \sqrt{1-\rho^2} \left[1 - \sqrt{1-\frac{2d/R}{1-\rho^2}} \right] \approx \frac{K}{\sqrt{2R}} \frac{(d/R)}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку d/R мало, ψ_2 мало сравнительно с ψ_1 . Пусть теперь $\rho > r_0/R$, но $1 - \rho \gg d/R$, т. е. рассматриваемая точка поверхности трещины отстоит от ее кромки на расстояние, значительное сравнительно с размером концевой области d . В этом случае

$$\psi_1 = \int_{\rho}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^{r_0/R\mu} \frac{x p(x\mu R) dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (3.6)$$

а ψ_2 по-прежнему определяется соотношением (3.3) и, следовательно, соотношением (3.5). Очевидно, что и в этом случае $\psi_2 \ll \psi_1$. Но величина ψ_1 представляет собой относительное смещение, определяемое при данном фиксированном радиусе R приложенной нагрузкой в отсутствие сил сцепления (и, разумеется, не удовлетворяющее условию плавного смыкания при $r = R$), а величина ψ_2 — компоненту относительного смещения, обусловливаемую силами сцепления. Таким образом, везде, кроме непосредственной близости кромки трещины, распределение смещений почти совпадает с распределением смещений, имеющим [место при данном фиксированном радиусе трещины R в отсутствие сил сцепления. Это означает, что силы сцепления существенно влияют только на величину радиуса трещины и на распределение смещений вблизи кромки трещины и не влияют на распределение смещений в основной части трещины.



Фиг. 6

Фиг. 7

На фиг. 6,а изображено истинное распределение смещений, на фиг. 6,б изображено распределение смещений при том же радиусе трещины R , но найденное без учета сил сцепления.

2°. Остановимся теперь на тех изменениях, которые нужно внести в предыдущие рассуждения, если разрывающая нагрузка прикладывается внутри тела, а не на поверхности трещины. Поскольку, согласно условию, нагрузка симметрична относительно плоскости трещины, касательные напряжения на этой плоскости отсутствуют. Представим, согласно предыдущему, напряженное состояние, действующее в рассматриваемом хрупком теле с трещиной в виде суммы двух напряженных состояний, одно из которых представляет собой напряженное состояние в сплошном теле без трещины под действием данной нагрузки, а другое — напряженное состояние в теле с трещиной при наличии разрывающей нагрузки на поверхности трещины. Пусть $p(r)$ представляет собой распределение нормального напряжения в плоскости симметрии при заданной нагрузке в отсутствие трещины. Тогда сжимающее напряжение на поверхности трещины, определяющее второе напряженное состояние, равно $-p(r)$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим вместо уравнения (2.11) уравнение, определяющее радиус трещины, в виде

$$\int_0^R \frac{rp(r) dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = K \sqrt{\frac{R}{2}} \quad (3.7)$$

которое отличается от уравнений (2.11) только тем, что вместо радиуса r_0 в нем фигурирует полный радиус трещины R .

Поскольку нормальное смещение точек поверхности трещины, соответствующее первому напряженному состоянию, равно нулю, все выводы относительно распределения смещений точек поверхности трещины, сформулированные в предыдущем пункте, также сохраняют силу.

3°. Рассмотрим в качестве примера задачу образования трещины двумя противоположно направленными сосредоточенными силами T , приложенными в точках, отстоящих друг от друга на расстояние $2L$ (фиг. 7). Естественно предположить, что трещина лежит в плоскости симметрии нагрузки. Суммируя известные решения Буссинеска [14], легко получаем, что

$$p(r) = \frac{T}{4\pi(1-\nu)} \frac{L}{\sqrt{(r^2+L^2)^3}} \left\{ 3 \frac{L^2}{r^2+L^2} + 1 - 2\nu \right\} \quad (3.8)$$

Условие (3.7) можно переписать в виде

$$\int_0^1 \frac{xp(xR) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8) в (3.9), получаем

$$\frac{T}{4\pi(1-\nu)L^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+R^2x^2/L^2)^3(1-x^2)}} \left[3 \frac{L^2}{1+R^2x^2/L^2} + 1 - 2\nu \right] x dx = \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (3.10)$$

Вычисляя интегралы, находим

$$g\left(\frac{L}{R}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{L}{R}\right)^{-3/2} \left(1 + \frac{L^2}{R^2}\right)^2 \left[1 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{L^2}{R^2}\right]^{-1} = \frac{T}{\pi K L^{3/2}} \quad (3.11)$$

График функции $g(L/R)$ имеет вид, изображенный на фиг. 8. (На фиг. 8 представлен случай $\nu = 0.5$.)

Физический смысл имеет только левая часть кривой до точки минимума, проведенная сплошной линией. В самом деле, правая часть кривой соответствует возрастанию радиуса трещины при уменьшении нагрузки. Как видно из графика фиг. 8, при

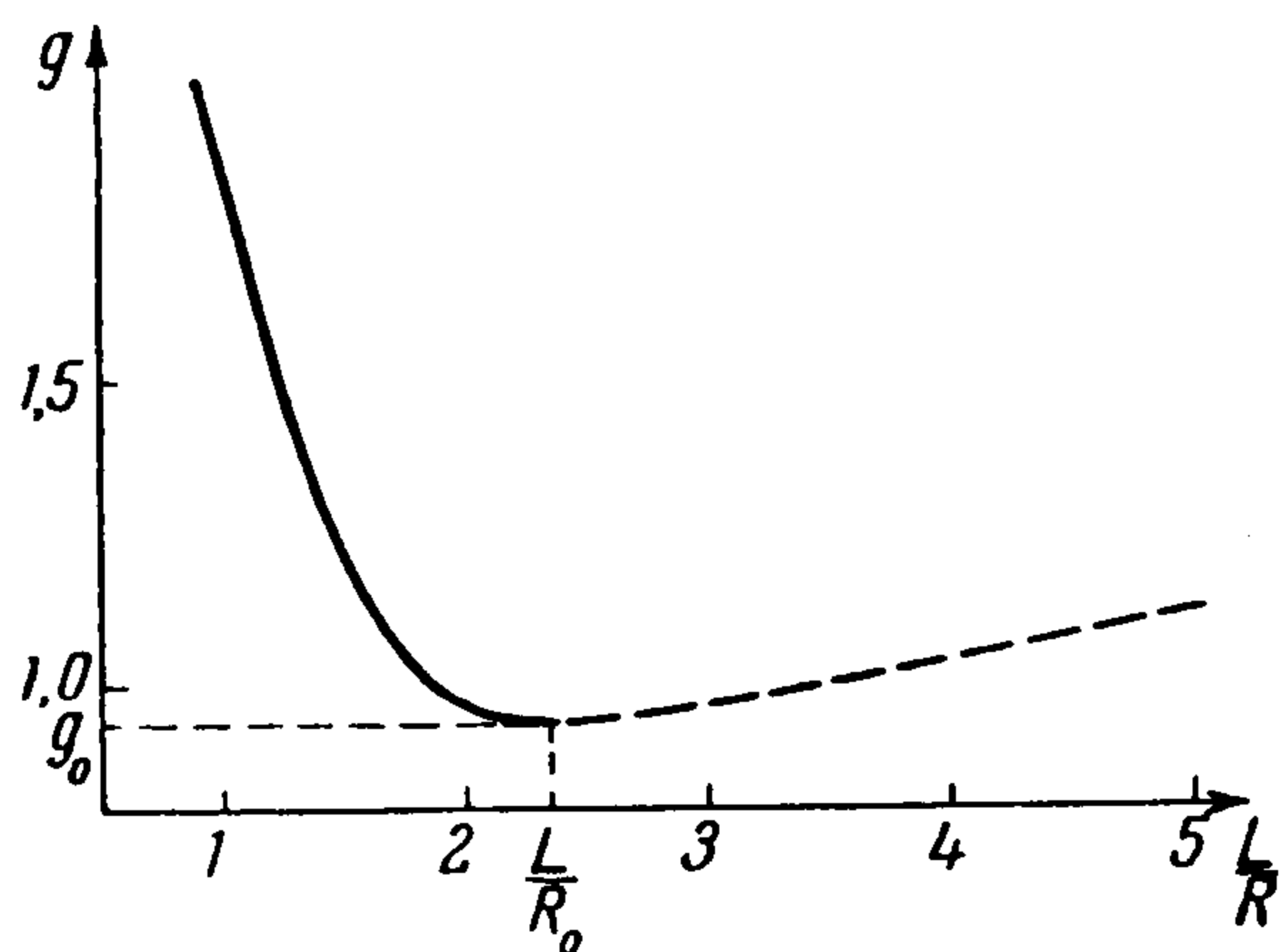
$$T < \pi g_0 K L^{3/2} \quad (3.12)$$

уравнение (3.11) не имеет решения.

Вполне аналогично предыдущему, это

означает, что при столь малых T трещина не образуется. При $T = \pi g_0 K L^{3/2}$ сразу же образуется трещина определенного конечного радиуса R_0 ; с дальнейшим увеличением T радиус трещины R увеличивается. Величины g_0 и R_0 находятся элементарно: при $\nu = 0.5$ имеем $g_0 = 0.945$, $L/R_0 = 2.35$, при $\nu = 0$ получим $g_0 = 1.39$, $L/R_0 = 2.05$.

Обобщая рассуждения п. 3 § 2 применительно к уравнению (3.7), можно показать, что такое положение является типичным при приложении нагрузки внутри тела в условиях тела бесконечных размеров. Именно,



Фиг. 8

имеет место следующий факт: если приложенная внутри тела нагрузка пропорциональна некоторому параметру, то при достаточно малых значениях этого параметра равновесная трещина вообще не образуется. При достижении некоторого критического значения параметра сразу же образуется трещина конечного радиуса. При дальнейшем увеличении параметра радиус трещины непрерывно возрастает.

Отметим также любопытный предельный случай, соответствующий стремлению L к нулю, т. е. сближению точек приложения сил. Из соотношения (3.11) при $L/R \rightarrow 0$ получаем снова соотношение

$$R = \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi K}} \right)^{2/3}$$

совпадающее, как и следовало ожидать, с соотношением (2.15).

Случай плоских трещин будет рассмотрен в отдельной работе.

Поступила 27 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A. vol. 221, 1920.
2. Orowan E. Energy Criteria of Fracture. Welding Journal, Research Supplement, March, 1955.
3. Irwin G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. J. Appl. Mech., vol. 24, No 3, 1957.
4. В у е с к н е р Н. Ф. The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation. Trans. ASME, vol. 80, № 6, 1958.
5. Mott N. F. Fracture of Metals: Theoretical Consideration. Engineering, vol 165, No 4275, 4276, 1948.
6. Ф р е н к е л ь Я. И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах. Ж. тех. физ., т. 22, вып. 11, 1952.
7. Ж е л т о в Ю. П. и Х р и с т и а н о в и ч С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1955.
8. Б а р е н б л а т т Г. И. и Х р и с т и а н о в и ч С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1955.
9. Б а р е н б л а т т Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
10. Б а р е н б л а т т Г. И. Об образовании горизонтальных трещин при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1956.
11. Ж е л т о в Ю. П. Об образовании вертикальных трещин в пласте при помощи фильтрующей жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1957.
12. S n e d d o n J. D. Fourier Transforms. N.-Y., 1951. Имеется русский перевод: И. Снеддон, Преобразования Фурье. Изд-во иностр. лит., М., 1955.
13. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М.—Л., 1957.
14. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.