Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ПОРШНЯ С ЖЕСТКИМ ФЛАНЦЕМ В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Д. Н. Четаев

(Москва)

Рассматривается задача о поле установившихся колебаний, возбуждаемых в упругом полупространстве круглым жестким поршнем с бесконечным жестким и гладким фланцем. Получены формулы для активного и реактивного сопротивления связи между полем излучения и поршнем, выраженные через табулированные функции. Приведены результаты расчетов для случая излучения в упругую среду Пуассона.

Рассмотрим упругое полупространство $z > 0$, на поверхности которого в вырезе жесткого фланца колеблется по гармоническому закону $dz / dt = v \exp(i\omega t)$ круглый поршень радиуса c. Контакт поршня с упругой средой на протяжении всего периода колебания можно представить себе обеспеченным некоторой постоянной нагрузкой, при которой около равновесного положения совершаются малые колебания поршня. В силу принципа суперпозиции напряженных состояний линейной теории упругости, статическое поле и поле установившихся колебаний независимы.

Расчет последнего сводится к решению динамических уравнений теории упругости при условии, что нормальные смещения в точках жесткого поршня равны $z = (v / i\omega) \exp(i\omega t)$, где v — амплитуда скорости поршня. В точках жесткого фланца, который при достаточных размерах можно при расчетах полагать бесконечным, нормальные смещения равны нулю. При этом, считая поверхность поршня и фланца достаточно гладкой, будем пренебрегать тангенциальными напряжениями, могущими возникнуть на поверхности среды.

Математическая задача расчета волнового поля, зависящего от времени по закону $\exp(i\omega t)$, сводится к нахождению ограниченных решений уравнений для амплитуд скалярного потенциала смещения φ и единственной в силу симметрии задачи угловой компоненты векторного потенциала смещения ψ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_a^2\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k_b^2\psi = 0 \qquad (2)$$

при граничных условиях, выражающих заданные значения касательных напряжений τ_{rz} и нормальных смещений u_z на поверхности:

$$\frac{1}{\mu}\tau_{rz}|_{z=0} = \left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2\psi}{r^2} + k_b^2\psi\right]_{z=0} = 0 \qquad (3)$$

$$u_z|_{z=0} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\right]_{z=0} = \begin{cases} v / i\omega & (r < c) \\ 0 & (r > c)\end{cases} \qquad (4)$$

Здесь

$$k_a = \frac{\omega}{a} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \qquad k_b = \frac{\omega}{b} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

— волновые числа, соответствующие скоростям распространения продольных и поперечных волн a и b (ρ — плотность среды, а λ и μ — ее постоянные Ламе).

Решение уравнений (1) и (2) методом разделения переменных дает следующие общие представления ограниченных решений

$$\varphi = \int_0^\infty C_1(\lambda) J_0(\lambda r) \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\right) d\lambda \tag{5}$$

$$\psi = \int_0^\infty C_2(\lambda) J_1(\lambda r) \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k_b^2}\right) d\lambda \tag{6}$$

где выбраны ветви корней, положительные при больших значениях λ.

Функции $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ определяются из краевых условий. Подставив (5) и (6) в (3) и (4), получим

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r) \left[2\lambda \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\, C_1(\lambda) + (k_b^2 - 2\lambda^2) C_2(\lambda)\right] d\lambda = 0 \tag{7}$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) \left[-\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\, C_1(\lambda) + \lambda C_2(\lambda)\right] d\lambda = \begin{cases} v / i\omega & (r < c) \\ 0 & (r > c) \end{cases} \tag{8}$$

Учитывая известный разрывный интеграл Вебера [1]

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda c)\, d\lambda = \begin{cases} 1 / c & (r < c) \\ 0 & (r > c) \end{cases}$$

видим, что для выполнения равенств (7), (8) достаточно положить

$$2\lambda \sqrt{\lambda^2 + k_a^2}\, C_1 + (k_b^2 - 2\lambda^2) C_2 = 0; \quad -\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\, C_1 + \lambda C_2 = (vc / i\omega) J_1(\lambda c)$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{vc}{i\omega} \frac{2\lambda}{k_b^2} J_1(\lambda c), \qquad C_1 = \frac{vc}{i\omega} \frac{2\lambda^2 - k_b^2}{k_b^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}} J_1(\lambda c)$$

Таким образом, решение дается следующими формулами

$$\varphi = \frac{vc}{i\omega} \int_0^\infty \frac{2\lambda^2 - k_b^2}{k_b^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}} J_1(\lambda c) J_0(\lambda r) \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\right) d\lambda \tag{9}$$

$$\psi = \frac{vc}{i\omega} \int_0^\infty \frac{2\lambda}{k_b^2} J_1(\lambda c) J_1(\lambda r) \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k_b^2}\right) d\lambda \tag{10}$$

В акустическом случае ($k_b \to \infty$) формула (9) дает новое представление интеграла Рэлея [2] для потенциала смещений

$$\varphi = \frac{ivc}{\omega} \int_0^\infty \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) J_1(\lambda c) J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = -\frac{iv}{2\pi\omega} \iint_S \frac{e^{-ivR}}{R}\, dS \tag{11}$$

где R — расстояние от точки поля (r, θ, z) до элемента поршня с координатами (ρ, φ)

$$R = \sqrt{z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta)}$$

а интегрирование производится по площади поршня S.

С другой стороны, формула (11) позволяет выразить решение (9), (10) через интеграл

$$I(k) = \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{e^{-kR}}{R}\, dS$$

в следующем виде

$$\varphi = \frac{iv}{\omega}\frac{2k_a^2 - k_b^2}{k_b^2} I(k_a) + \frac{iv}{\omega}\frac{2}{k_b^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(k_a) \tag{12}$$

$$\psi = \frac{iv}{\omega}\frac{2}{k_b^2}\frac{\partial^2}{\partial z \partial r} I(k_b) \tag{13}$$

Не останавливаясь на исследовании поля излучения, потенциалы которого даны формулами (9), (10) или (12), (13), перейдем к более сложному вопросу об определении активного и реактивного сопротивления связи поршня с полем излучения. Полный механический импеданс поршня Z связывает силу F реакции упругой среды на поршень с его скоростью v

$$F\exp(i\omega t) = Zv\exp(i\omega t)$$

где сила, действующая на поршень, равна интегралу по площади поршня S от нормального напряжения σ_{zz} среды на поверхности, взятому с обратным знаком:

$$F = -\iint_S \sigma_{zz}|_{z\to 0}\, dS \tag{14}$$

Так как

$$\sigma_{zz} = \mu\left[2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - k_b^2\varphi\right] \qquad \left(\mu = \frac{\omega^2\rho}{k_b^2}\right)$$

то, подставляя сюда значения потенциалов (9), (10) и полагая $z = 0$, получим

$$\sigma_{zz}|_{z\to 0} = -i\omega\rho vc\int_0^\infty J_1(\lambda c)\, J_0(\lambda r)\,\Phi(\lambda)\, d\lambda \tag{15}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \frac{(2\lambda^2 - k_b^2)^2}{k_b^4\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}} - \frac{4\lambda^2}{k_b^4}\sqrt{\lambda^2 - k_b^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}} + \frac{4\lambda^2}{k_b^2}\left(\frac{\lambda^2}{k_b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_b^2}}\right) \tag{16}$$

Отсюда видно, что при $\lambda \to \infty$

$$\Phi(\lambda) \sim 2\frac{k_a^2 - k_b^2}{k_b^4}\lambda$$

то есть, что интеграл (15) не является сходящимся в обычном смысле. Отсутствие сходимости означает, что использованное аналитическое выражение для σ_{zz} отказывает при $z = 0$, что вполне естественно при разрывных краевых условиях (4) для u_z.

Нам требуется определить предельное значение σ_{zz} при $z \to 0$, поэтому равенство (15), если понимать его в терминах сходящихся интегралов, лишено смысла. Однако равенство (15) приобретает вполне определенный смысл, если условиться рассматривать символ интеграла как предельное значение сходящегося интеграла

$$\int_0^\infty J_1(\lambda c) J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda = \lim_{\delta \to 0} \int_0^\infty e^{-\delta\lambda} J_1(\lambda c) J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda,$$

конечно, если такое предельное значение существует. Такой смысл употребления расходящихся интегралов в вычислениях, восходящий к Эйлеру и Пуассону, известен под названием метода суммирования расходящихся интегралов по Абелю [3]. Таким образом, употребляя символ расходящегося интеграла, мы будем иметь в виду операции со сходящимся интегралом до предельного перехода.

Подставляя (15) в (14), получим

$$Z = i\omega\rho c \iint_S \int_0^\infty J_1(\lambda c) J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda\, dS = 2\pi i\omega\rho c \int_0^c \int_0^\infty J_1(\lambda c) J_0(\lambda r) \Phi(\lambda) d\lambda\, r dr$$

Переставив порядок интегрирования, возьмем интеграл по r:

$$\int_0^c J_0(\lambda r)\, r dr = \frac{c}{\lambda} J_1(\lambda c)$$

Отсюда

$$Z = 2\pi i\omega\rho c^2 \int_0^\infty J_1^2(\lambda c) \Phi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Представляя функцию (16) в виде

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{k_b^4} [(2k_a^2 - k_b^2)^2 (\lambda^2 - k_a^2)^{-1/2} + 4(2k_a^2 - k_b^2)(\lambda^2 - k_a^2)^{1/2} -$$
$$- 4k_b^2 (\lambda^2 - k_b^2)^{1/2} + 4(\lambda^2 - k_a^2)^{3/2} - 4(\lambda^2 - k_b^2)^{3/2}]$$

и вводя обозначения

$$A_n(k) = \int_0^\infty J_1^2(\lambda c) (\lambda^2 - k^2)^{n-1/2} \frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (17)$$

где знак интеграла понимается в смысле суммирования по Абелю, будем иметь

$$Z = 2\pi i\omega\rho c^2 \left[\frac{(2k_a^2 - k_b^2)^2}{k_b^4} A_0(k_a) + \frac{4(2k_a^2 - k_b^2)}{k_b^4} A_1(k_a) - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{k_b^2} A_1(k_b) + \frac{4}{k_b^4} A_2(k_a) - \frac{4}{k_b^4} A_2(k_b)\right] \qquad (18)$$

Перейдем к вычислению интегралов (17). Прежде всего произведем замену переменного

$$\lambda c = u \qquad (kc = v) \qquad (19)$$

тогда

$$A_n(k) = \frac{1}{c^{2n-1}} \int_0^\infty J_1^2(u) (u^2 - v^2)^{n-1/2} \frac{du}{u}$$

Далее, воспользовавшись интегралом Неймана

$$J_1^2(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_2(2u\sin\theta)\,d\theta$$

можем написать:

$$A_n(k) = \frac{2}{\pi c^{2n-1}}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_2(2u\sin\theta)\,(u^2 - v^2)^{n-\frac{1}{2}}\frac{d\theta\,du}{u}$$

С помощью рекуррентной формулы

$$J_2(2u\sin\theta) = \frac{u\sin\theta}{2}\,[J_1(2u\sin\theta) + J_3(2u\sin\theta)]$$

записанной через интегралы Бесселя

$$J_2(2u\sin\theta) = \frac{u\sin\theta}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\varphi + \sin 3\varphi)\sin(2u\sin\theta\sin\varphi)\,d\varphi$$

получим (20)

$$A_n(k) = \frac{8}{\pi^2 c^{2n-1}}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\theta\sin(2u\sin\varphi\sin\theta)\,(u^2 - v^2)^{n-\frac{1}{2}}\,d\varphi\,d\theta\,du$$

Теперь переставим порядок интегрирования и внутренний интеграл по переменной и просуммируем по Абелю. Этот интеграл имеет вид

$$B_n = \int_0^{\infty}\sin(2u\sin\varphi\sin\theta)\,(u^2 - v^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du = \qquad (x = 2v\sin\varphi\sin\theta)$$

$$= -i\,(-1)^n v^{2n}\int_0^1\sin(xt)\,(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt + v^{2n}\int_1^{\infty}\sin(xt)\,(t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt \tag{21}$$

Интеграл в конечных пределах является обычным интегралом. Он определяет функцию Струве с индексом n

$$\int_0^1\sin(xt)\,(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}x\right)^n}\,\mathbf{H}_n(x) \tag{22}$$

Второй интеграл вычислим, пользуясь представлением Шлефли

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}\,(t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n}\,K_n(z) \qquad \left(z = \delta - ix,\ \delta > 0,\ n > -\frac{1}{2}\right)$$

Так как существует предел

$$\lim_{\delta\to 0}\int_1^{\infty} e^{-zt}\,(t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \lim_{z\to -ix}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n}\,K_n(z) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{ix}{2}\right)^n}\,K_n(-ix) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n}\,\frac{(-1)^n}{i^n}\,\frac{\pi i}{2}\exp\frac{n\pi i}{2}\,[J_n(x) + iY_n(x)]$$

то получаем

$$\int_1^{\infty}\sin(xt)\,(t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \lim_{\delta\to 0}\int_1^{\infty} e^{-\delta t}\sin(xt)\,(x^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} Im\int_1^{\infty} e^{-zt}\,(t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{x}{2}\right)^n}\,(-1)^n J_n(x) \tag{23}$$

Отсюда следует, что обобщенная формула Мелера-Сонина [1]

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}\int_1^\infty \frac{\sin(xt)\,dt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}$$

справедлива в смысле суммирования по Абелю не только при значениях $-1/2<\nu<1/2$, но при всех отрицательных значениях ν.

Объединяя формулы (22) и (23), получаем следующее выражение интеграла (21):

$$B_n = \frac{(-1)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)v^{2n}}{2\left(\frac{\alpha\sin\theta}{2}\right)^n}\left[J_n(\alpha\sin\theta)-i\mathbf{H}_n(\alpha\sin\theta)\right] \qquad (\alpha=2v\sin\varphi)$$

Оставшиеся интегралы в выражении (20) имеют обычный смысл. С учетом (19), это выражение принимает вид:

$$A_n(k) = \frac{(-1)^n 4}{\pi^2}\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)k^{2n}c\times$$

$$\times\int_0^{1/2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\int_0^{1/2\pi}\left[J_n(\alpha\sin\theta)-i\mathbf{H}_n(\alpha\sin\theta)\right]\left(\frac{\alpha\sin\theta}{2}\right)^{-n}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \qquad (24)$$

Интегрирование по θ выполним, разлагая функции Бесселя и Струве в степенные ряды:

$$C_n(\varphi) = \int_0^{1/2\pi}\left[J_n(\alpha\sin\theta)-i\mathbf{H}_n(\alpha\sin\theta)\right]\left(\frac{\alpha\sin\theta}{2}\right)^{-n}\sin\theta\,d\theta =$$

$$=\int_0^{1/2\pi}\left(\frac{\alpha\sin\theta}{2}\right)^{-n}\sin\theta\sum_{m=0}^\infty\frac{\exp-\frac{m\pi i}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\left(\frac{\alpha\sin\theta}{2}\right)^{n+m}d\theta =$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{\exp-\frac{m\pi i}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m\int_0^{1/2\pi}\sin^{m+1}\theta\,d\theta =$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{\exp-\frac{m\pi i}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}$$

Отсюда

$$C_n(\varphi) = \sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\frac{\exp-\frac{m\pi i}{2}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m$$

Теперь можно вычислить последний интеграл по φ:

$$D_n(k) = \int_0^{1/2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\, C_n(\varphi)\,d\varphi =$$

$$=\int_0^{1/2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\frac{\exp-\frac{m\pi i}{2}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^m d\varphi =$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\frac{\exp\left(-\frac{m\pi i}{2}\right)v^m}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\int_0^{1/2\pi}\sin^{m+1}\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\frac{\exp\left(-\frac{m\pi i}{2}\right)v^m}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+2\right)}$$

что можно записать следующим образом

$$D_n(k) = \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{m\pi i}{2}\right) v^m 2^n}{\Pi(l)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+2\right)} \qquad \left(\Pi(l) = \prod_{l=1}^{n}(m+2l)\right) \tag{25}$$

Как легко заметить,

$$\frac{d}{dv}\left(v^{2n} D_n\right) = \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{m\pi i}{2}\right) v^{m+2n-1} 2^n (m+2n)}{\Pi(l)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+2\right)} = 2v^{2n-1} D_{n-1}$$

Отсюда, учитывая, что D_n является целой функцией и ограничена в нуле, получаем рекуррентную формулу

$$D_n = \frac{2}{v^{2n}} \int_0^v v^{2n-1} D_{n-1}\, dv \tag{26}$$

При $n = 0$ ряд (25) принимает вид

$$D_0(k) = \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{m\pi i}{2}\right) v^m}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+2\right)} =$$

$$= \frac{\pi}{8v^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp\frac{i\pi}{2}\exp\left(-\frac{p\pi i}{2}\right) v^{p+1}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+1\right)} = -\frac{\pi i}{8v}\left[1 - \frac{J_1(2v)}{v} + i\frac{\mathbf{H}_1(2v)}{v}\right]$$

Рекуррентная формула (26) дает

$$D_1(k) = -\frac{\pi i}{4v}\left[1 - \frac{1}{v}\int_0^{2v} \frac{J_1(x)}{x}\,dx + \frac{i}{v}\int_0^{2v} \frac{\mathbf{H}_1(x)}{x}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{\pi i}{4v}\left[1 - \frac{\bar{J}(2v) - J_1(2v)}{v} + i\frac{\bar{\mathbf{H}}(2v) - \mathbf{H}_1(2v)}{v}\right] \tag{28}$$

где

$$\bar{J}(x) = \int_0^x J_0(\xi)\,d\xi, \qquad \bar{\mathbf{H}}(x) = \int_0^x \mathbf{H}_0(\xi)\,d\xi$$

— табулированные функции. Аналогичным образом

$$D_2(k) = -\frac{\pi i}{6v}\left\{1 - \frac{3}{v^3}\int_0^v \left[\bar{J}(2v) - J_1(2v)\right] v\,dv + \frac{3i}{v^3}\int_0^v \left[\bar{\mathbf{H}}(2v) - \mathbf{H}_1(2v)\right] v\,dv\right\} =$$

$$= -\frac{\pi i}{6v}\left\{1 - 3\left[\frac{\bar{J}(2v) - J_1(2v)}{2v} + \frac{J_0(2v)}{4v^2} - \frac{\bar{J}(2v)}{8v^3}\right] + \right.$$

$$\left. + 3i\left[\frac{\bar{\mathbf{H}}(2v) - \mathbf{H}_1(2v) - 1/\pi}{2v} + \frac{\mathbf{H}_0(2v)}{4v^2} - \frac{\bar{\mathbf{H}}(2v)}{8v^3}\right]\right\}$$

Теперь выражения (24) принимают вид:

$$A_0(k) = \frac{4c}{\pi} D_0 = -\frac{i}{2k}\left[1 - \frac{J_1(2kc)}{kc} + i\frac{\mathbf{H}_1(2kc)}{kc}\right]$$

$$A_1(k) = -\frac{2k^2c}{\pi} D_1 = \frac{ik}{2}\left[1 - \frac{\bar{J}(2kc) - J_1(2kc)}{kc} + i\frac{\bar{\mathbf{H}}(2kc) - \mathbf{H}_1(2kc)}{kc}\right]$$

$$A_2(k) = \frac{3k^4c}{\pi} D_2 = -\frac{ik^3}{2}\left\{1 - 3\left[\frac{\bar{J}(2kc) - J_1(2kc)}{2kc} + \frac{J_0(2kc)}{(2kc)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\bar{J}(2kc)}{(2kc)^3}\right] + 3i\left[\frac{\bar{\mathbf{H}}(2kc) - \mathbf{H}_1(2kc) - 1/\pi}{2kc} + \frac{\mathbf{H}_0(2kc)}{(2kc)^2} - \frac{\bar{\mathbf{H}}(2kc)}{(2kc)^3}\right]\right\}$$

Подстановка этих функций в формулу (18) дает следующие расчетные формулы для сопротивления излучения поршня

$$Z = S\rho a\,[R\,(k_a c;\ k_b c) + iX\,(k_a c,\ k_b c)]$$

где $S = \pi c^2$ — площадь поршня, ρ — плотность среды, a — скорость распространения продольных волн, c — радиус поршня k_a и k_b — волновые числа, соответствующие скоростям распространения продольных и поперечных волн, а безразмерные активное R и реактивное X сопротивления связи поршня с полем излучения выражаются через табулированные функции следующим образом:

$$R = 1 - \left[1 - 8\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 6\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]\frac{J_1(2k_a c)}{k_a c} - 2\left(\frac{b}{a}\right)\frac{J_1(2k_b c)}{k_b c} - \tag{29}$$
$$- \left[4\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]\frac{\bar{J}(2k_a c)}{k_a c} + 2\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\bar{J}(2k_b c)}{k_b c} -$$
$$- 3\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{J_0(2k_a c)}{(k_a c)^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\bar{J}(2k_a c)}{(k_a c)^3} + 3\left(\frac{b}{a}\right)\frac{J_0(2k_b c)}{(k_b c)^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\bar{J}(2k_b c)}{(k_b c)^3}$$

$$X = \left[1 - 8\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 6\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]\frac{\mathbf{H}_1(2k_a c)}{k_a c} + 2\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\mathbf{H}_1(2k_b c)}{k_b c} + \tag{30}$$
$$+ \left[4\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]\frac{\bar{\mathbf{H}}(2k_a c)}{k_a c} - 2\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\bar{\mathbf{H}}(2k_b c)}{k_b c} +$$
$$+ 3\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\mathbf{H}_0(2k_a c)}{(k_a c)^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\bar{\mathbf{H}}(2k_a c)}{(k_a c)^3} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{1}{k_a c} -$$
$$- 3\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\mathbf{H}_0(2k_b c)}{(k_b c)^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\bar{\mathbf{H}}(2k_b c)}{(k_b c)^3} + \frac{6}{\pi}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{1}{k_b c}$$

В случае жидкости ($b = 0$) формулы (29) и (30) переходят в известные формулы Рэлея.

Полученная зависимость механического импеданса поршня с жестким фланцем от параметров ρ, λ и μ может быть использована, например, для определения физических свойств упругих тел (в частности, горных пород), аналогично тому как расчет импеданса поршня, излучающего в поток жидкости [4,5], может быть, в принципе, использован для измерения скорости потока.

Формулы (29) и (30) легко исследуются в предельных случаях. При длинах волн, малых по сравнению с размерами излучателя, $k_a c \gg 1$ и $k_b c \gg 1$. В этом случае реактивное сопротивление становится малым, а безразмерное активное сопротивление приближается к единице, так что

$$Z \approx S\rho a$$

то есть характер излучения становится таким же, как при излучении высоких частот в жидкость одинаковой плотности при скорости звука, равной скорости распространения продольных волн.

При низких частотах, когда $k_a c \ll 1$ и $k_b c \ll 1$, получаем

$$X \approx k_a c\left[\frac{4}{\pi} - \frac{16}{3\pi}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]$$
$$R = (k_a c)^2\left[\frac{1}{2} + \frac{4}{15}\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{16}{15}\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]$$

Во избежание недоразумений отметим, что в последних формулах переход к случаю жидкости ($k_b \to \infty$) невозможен, так как они получены при условии $k_b c \ll 1$, т. е. для сред, в которых скорость распространения поперечных волн сравнима со скоростью продольных волн.

Таблица

$k_a c$	$R(kc)$		$X(kc)$	
	упругая среда Пуассона	идеальная жидкость	упругая среда Пуассона	идеальная жидкость
0.25	0.0376	0.0309	0.2063	0.2087
0.50	0.1461	0.1199	0.3772	0.3969
0.75	0.2960	0.2561	0.4891	0.5471
1.00	0.4560	0.4233	0.5345	0.6468
1.25	0.5967	0.6023	0.5232	0.6905
1.50	0.7005	0.7740	0.4761	0.6801
1.75	0.7639	0.9215	0.4184	0.6238
2.00	0.7956	1.0330	0.3675	0.5349
2.25	0.8101	1.1027	0.3323	0.4293
2.50	0.8204	1.1310	0.3188	0.3231
2.75	0.8337	1.1242	0.2993	0.2300
3.00	0.8508	1.0922	0.2875	0.1594
3.25	0.8681	1.0473	0.2724	0.1159
3.50	0.8822	1.0013	0.2543	0.0989
3.75	0.8882	0.9639	0.2365	0.1036
4.00	0.8902	0.9413	0.2226	0.1220

Расчет по общим формулам (29) и (30) также достаточно прост, даже в тех случаях, когда требуется увеличение объема или точности существующих таблиц интегралов

$$\bar{J}(x) = \int_0^x J_0(\xi)\, d\xi, \qquad \bar{\mathrm{H}}(x) = \int_0^x \mathrm{H}_0(\xi)\, d\xi$$

Для иллюстрации мы приводим в таблице вычисленные по формулам (29) и (30) значения безразмерных активного и реактивного сопротивлений для случая излучения в среду Пуассона ($\lambda = \mu$). Для сравнения рядом приводятся соответствующие значения для случая жидкости [6]. Аргументом является значение kc, где волновое число соответствует значению скорости продольных волн.

Поступила 11 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, Изд-во иностр. лит., М., 1949.
2. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука, т. 2. Гостехиздат, М., 1955.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. Изд-во иностран. лит., М., 1951.
4. Четаев Д. Н. Об акустическом сопротивлении движущегося плоского излучателя. ДАН СССР, т. 90, вып. 3, 355—358, 1953.
5. Четаев Д. Н. О влиянии скорости дозвукового потока на сопротивление излучения поршня с бесконечным фланцем. Акустический журнал, т. 2, вып. 3, 302—309, 1956.
6. Морз Ф. Колебания и звук. Гостехиздат, М.— Л., 1949.