

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Х. А. Рахматулин

(Москва)

§ 1. **Постановка задачи.** Пусть на границе  $z = 0$  полупространства  $xuz$  задано распространяющееся и изменяющееся давление  $p(x, y, t)$ . Как известно, в этом случае в упругом полупространстве появляются две изменяющиеся во времени области; в одной будут только продольные волны (передняя область), а в другой — как продольные, так и поперечные.

Заметим, что передний фронт поперечных волн в рассматриваемом случае будет волной слабого разрыва. Для случая распространения упруго-пластических волн качественная картина движений будет такая же.

Ниже излагается приближенный метод решения задачи о распространении волн слабого разрыва в полупространстве, у которого на границе  $z = 0$  задано нормальное давление.

Прежде всего заметим, что существенным будет смещение по оси  $z$ , направленной вдоль давления, действующего на границе.

Если в динамических уравнениях теории упругости  $u = v = 0$ , то получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.1)$$

Из вида этого уравнения можно заключить, что передний фронт возмущенной области отличается от таковой для случая точного решения. Мы предполагаем подправить уравнение (1.1) так, чтобы форма переднего фронта совпала с действительной.

Очевидно, что в этом случае уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

Следует подчеркнуть, что наша постановка задачи существенно отличается от имеющего место в литературе акустического варианта динамической теории упругости.

Соотношение (1.2) является опять волновым уравнением, но для него граничные условия отличаются от таковых для потенциала смещения  $\varphi$ , а также напряжения выражаются через  $w$  иначе, чем через  $\varphi$ . Кроме того, решение (1.2), при заданной нормальной производной  $\partial w / \partial z$ , имеет более простой вид, чем для  $\varphi$ . Даже качественно решение задачи в нашей постановке будет существенно отличаться от акустической.

В самом деле, акустическая теория соответствует движению упругой жидкости, поэтому если на границе области, в части, где приложено давление, имеется впадина, то в свободной части будет, наоборот, подъем,

что не будет наблюдаться в упругом полупространстве. Многие свойства, а также решение уравнения (1.2) близки к тому, что имеет место в действительности.

Наконец, заметим, что решение статической задачи показывает справедливость допущения  $u = v = 0$ .

**§ 2. Решение приближенной задачи о распространении волн в упругом полупространстве.** Следуя Рэлею, ищем решение уравнения (1.2) в виде

$$w = \iiint_{\omega} \frac{C(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \quad (2.1)$$

Область интегрирования  $\omega$  есть часть пространства, ограниченная поверхностью гиперboloида

$$\tau = t - \frac{1}{a} V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 \quad (2.2)$$

и плоскостью  $\tau = 0$ . Легко показать следующее равенство:

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z=0} = -2\pi \int_0^t C(x, y, \tau) d\tau \quad (2.3)$$

Заметим, что если  $\partial w / \partial z = \text{const}$  при  $z = 0$ , то из уравнения (2.3) получаем, что  $C(x, y, t) \equiv 0$ , если предположить  $C(x, y, t)$  непрерывной функцией  $t$ .

Это затруднение будет преодолено, если отказаться от условия непрерывности  $C$  и положить

$$C(x, y, t) = A \delta(t) + B(x, y, t) \quad (2.4)$$

где  $\delta(t)$  — функция Дирака,  $B(x, y, t)$  — функция, непрерывная по  $t$ .

При условии (2.4) получаем

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = -A - 2\pi \int_0^t B(x, y, \tau) d\tau \quad (2.5)$$

а из (2.5) находим

$$B(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (2.6)$$

Подставляя из (2.4) и (2.6) в (2.1), получаем

$$w(x, y, z, t) = \iiint_{\omega} \frac{A \delta(\tau) d\xi d\eta d\tau}{V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} - \frac{1}{2\pi} \iiint_{\omega} \frac{w_{z\tau}(x, y, 0\tau) d\tau d\xi d\eta}{V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай распространения волны от мгновенно приложенной осесимметрической, остающейся во времени постоянной нагрузки.

Решение будет иметь вид

$$w(x, y, z, t) = A \iiint_{\omega} \frac{\delta(\tau) d\tau d\xi d\eta}{V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \quad (2.8)$$

Пользуясь соотношениями (2.3) и (2.4), находим

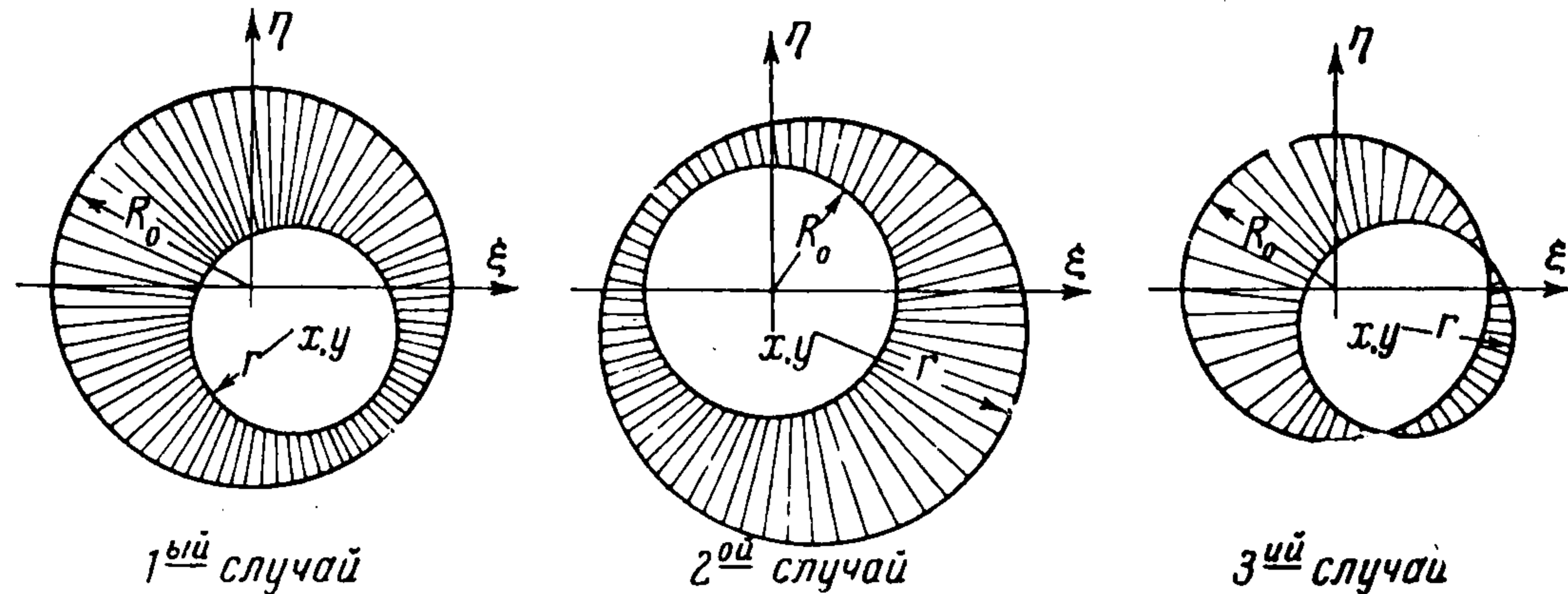
$$A = - \left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z=0} \frac{1}{2\pi} = - \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (2.9)$$

Областью интегрирования в (2.7) является общая часть цилиндра радиуса  $R_0$  (радиус нагрузки) и гиперboloида (2.2)

При интегрировании по переменной  $\tau$  переменные  $\xi$  и  $\eta$  отделяются, а следовательно, в области  $\xi\eta$  может быть рассмотрено три случая взаимного расположения окружностей

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = a^2t - z^2 = r^2, \quad \xi^2 + \eta^2 = R_0^2$$

Интегрирование ведется по общей части окружностей радиусов  $R_0$  и  $r$ .



Фиг. 1

*Первый случай.* Вводя полярные координаты, получим

$$w = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_1^{\rho} \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = -\varepsilon (at - z)$$

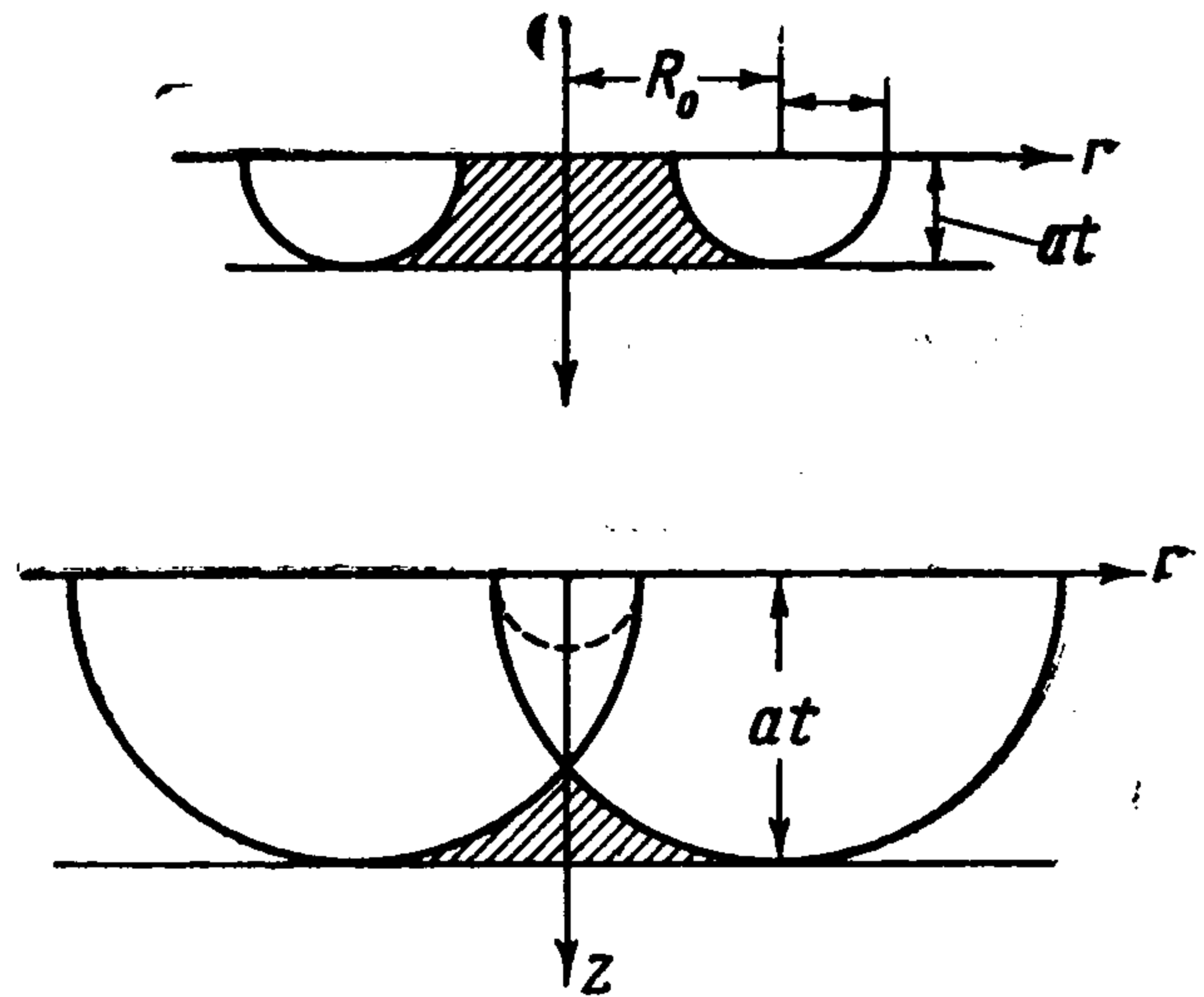
$$(\rho = \sqrt{a^2t^2 - z^2}) \quad (2.10)$$

Выясним теперь, где имеет место это решение. Для первого случая из фигуры 1 видно, что

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2t^2 - z^2} \leq R_0$$

Вводя полярные координаты, имеем  $x^2 + y^2 = r^2$  и, следовательно,

$$at \leq \sqrt{(R_0 - r)^2 + z^2} \quad (2.11)$$



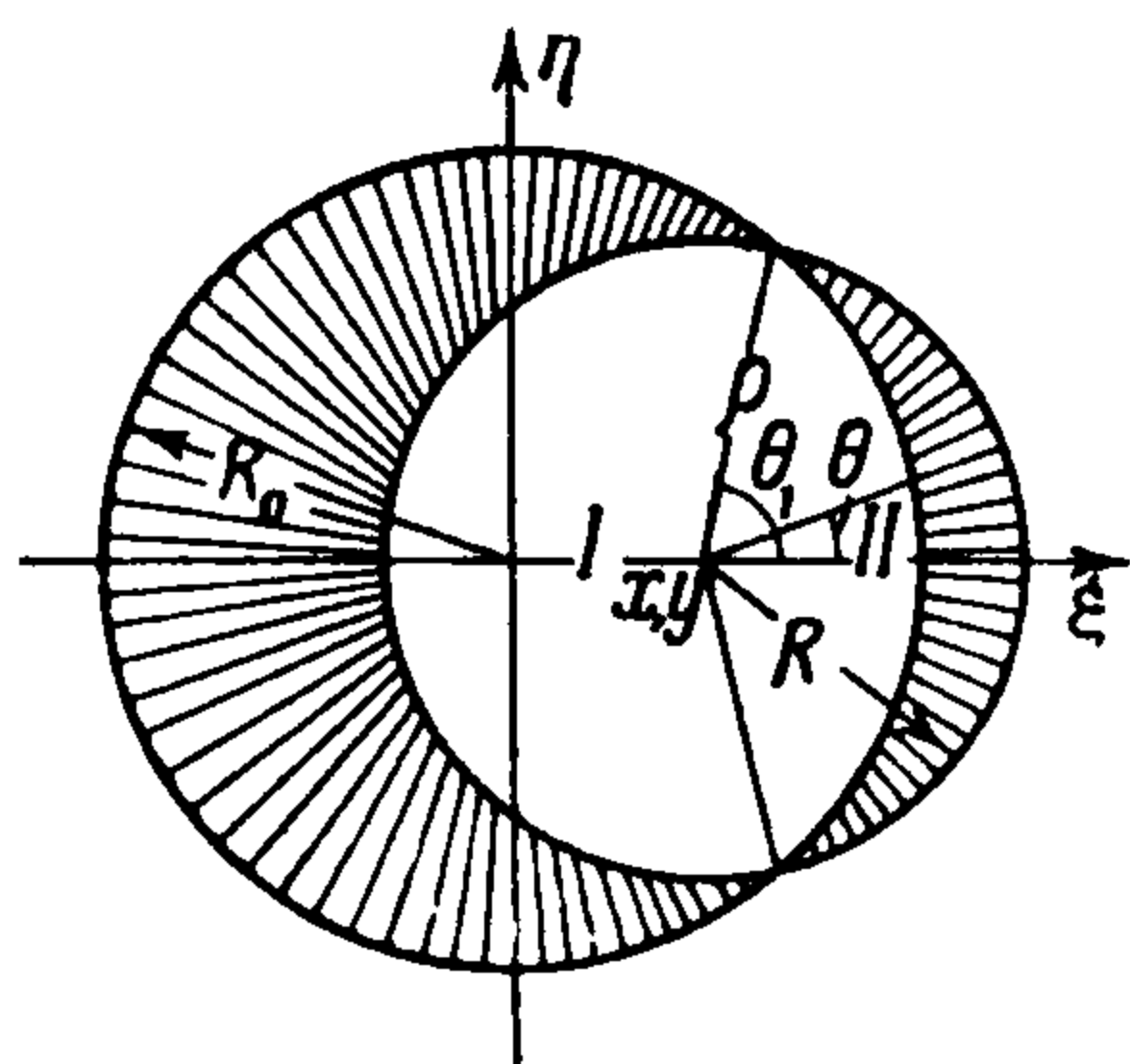
Фиг. 2

Так как  $at$  есть расстояние от переднего фронта волны, то (2.11) означает, что решение (2.9) справедливо в заштрихованных на фиг. 2 областях, что вполне согласуется с физической картиной движения. Таким образом, показано, что плоская часть переднего фронта несет давление, приложенное в начальный момент.

*Второй случай.* Разобьем область интегрирования на две части, как указано на фиг. 3.

В обозначениях  $x^2 + y^2 = r^2$  и  $a^2t - z^2 = \rho^2$  для определения  $\theta_1$  имеем соотношение (фиг.3)

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - \left[ \frac{R_0^2 - \rho^2 - r^2}{2\rho r} \right]^2} \quad (2.12)$$



Фиг. 3

Уравнение полярного радиуса в области II будет иметь вид

$$R = \sqrt{R_0^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \theta} - r \cos \theta \quad (2.13)$$

С помощью формул (2.8) и (2.9) получаем

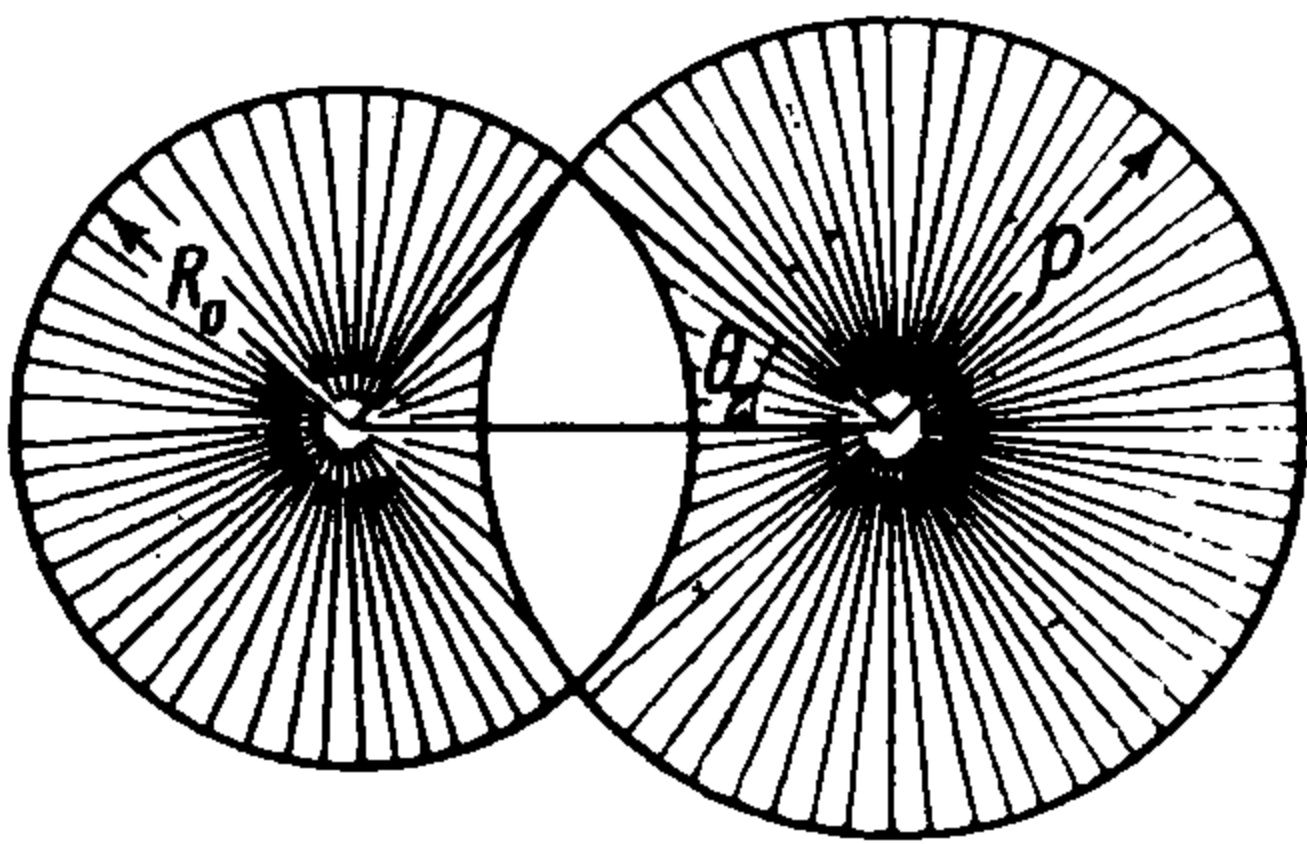
$$w(x, y, z, t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \iint_{II+I} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}$$

Переходя к полярным координатам, имеем

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} d\theta \int_0^{\rho} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} [\sqrt{\rho^2+z^2} - z] (2\pi - 2\theta_1) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} [\sqrt{R^2+z^2} - z] d\theta \end{aligned}$$

Так как  $\rho^2 = a^2 t^2 - z^2$ , следовательно,

$$w = -\frac{\varepsilon}{2\pi} (at - z) (2\pi - 2\theta_1) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} [\sqrt{R^2(\theta) + z^2} - z] d\theta \quad (2.14)$$



Фиг. 4

Третий случай. Заметим, что  $r - \rho \geq R_0$ ,  $r > R_0$  и, кроме того (фиг. 4),

$$R_0 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta_2, \quad \cos \theta_2 = \frac{r^2 + \rho^2 - R_0^2}{2r\rho}$$

$$r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta - R_0^2 = 0$$

$$R = r[\cos \theta - \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + R_0^2 - r^2}]$$

Поэтому имеем

$$w = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} d\theta \int_R^{\rho} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} [\sqrt{\rho^2+z^2} - \sqrt{R^2+z^2}] d\theta$$

или

$$w = -\frac{\varepsilon at}{2\pi} 2\theta_2 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \sqrt{R^2+z^2} d\theta \quad (2.15)$$

Рассмотрим одномерную задачу. Здесь  $R_0 = \infty$ , и мы будем иметь только первый случай. Для простоты предположим, что  $\partial w / \partial r = 0$  при  $z = 0$ ,  $t = 0$ .

Тогда из (2.7) получим

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_1} \varepsilon'_\tau(\tau) d\tau \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho_1} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = -\int_0^{\tau_1} \varepsilon'_\tau(\tau) [a(t-\tau) - z] d\tau \\ &\quad \left( \tau_1 = t - \frac{z}{a}, \rho_1 = \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - z^2} \right) \end{aligned}$$

Отсюда

$$w = -\int_0^{\tau_1} a\varepsilon(\tau) d\tau, \quad w_l = -a\varepsilon\left(t - \frac{z}{a}\right) = f\left(t - \frac{z}{a}\right) \quad (2.16)$$

где  $f(t)$  — значение скорости на границе.

§ 3. Приближенное решение задачи о распространении упруго-пластических волн в полупространстве. По тем же соображениям, что и в случае распространения упругих волн, для упруго-пластических существенную роль будут играть продольные смещения, т. е. смещения в направлении действия граничной (заданной) нагрузки.

Если пренебречь поперечными волнами, то в этом случае можно предположить, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2(e) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.1)$$

где  $e$  — интенсивность деформации.

Для случая схемы Прандтля, очевидно, уравнение (3.1) является линейным, но только с разрывными коэффициентами.

Прежде всего заметим, что в данном случае выражение интенсивности деформации имеет вид

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2} \quad (3.2)$$

Из этой формулы видно, что в области распространения влияния границы интенсивность напряжения увеличивается по крайней мере вблизи границы.

Предположим, что величина давления или  $(\partial w / \partial z)_{z=q} = \epsilon$  настолько велики, что  $|\partial w / \partial r| \gg \epsilon_s$ . Тогда во всей области влияния границы будут иметь место пластические деформации. Картина распространения упруго-пластических волн в этом случае, если принять схему Прандтля, будет иметь вид, изображений на фиг. 5.

Областью упругих деформаций является только  $ABCD$  (фиг. 5), причем поверхность  $C_1B_1BC$  является поверхностью разрыва деформации.

Из фигуры видно, что везде протекает активный процесс. Заметим еще, что глубоко проникает только давление, а большие деформации сосредоточены в области пластичности, так как при значительных увеличениях  $\epsilon$  напряжения меняются незначительно.

Примем теперь процесс жестко-пластическим.

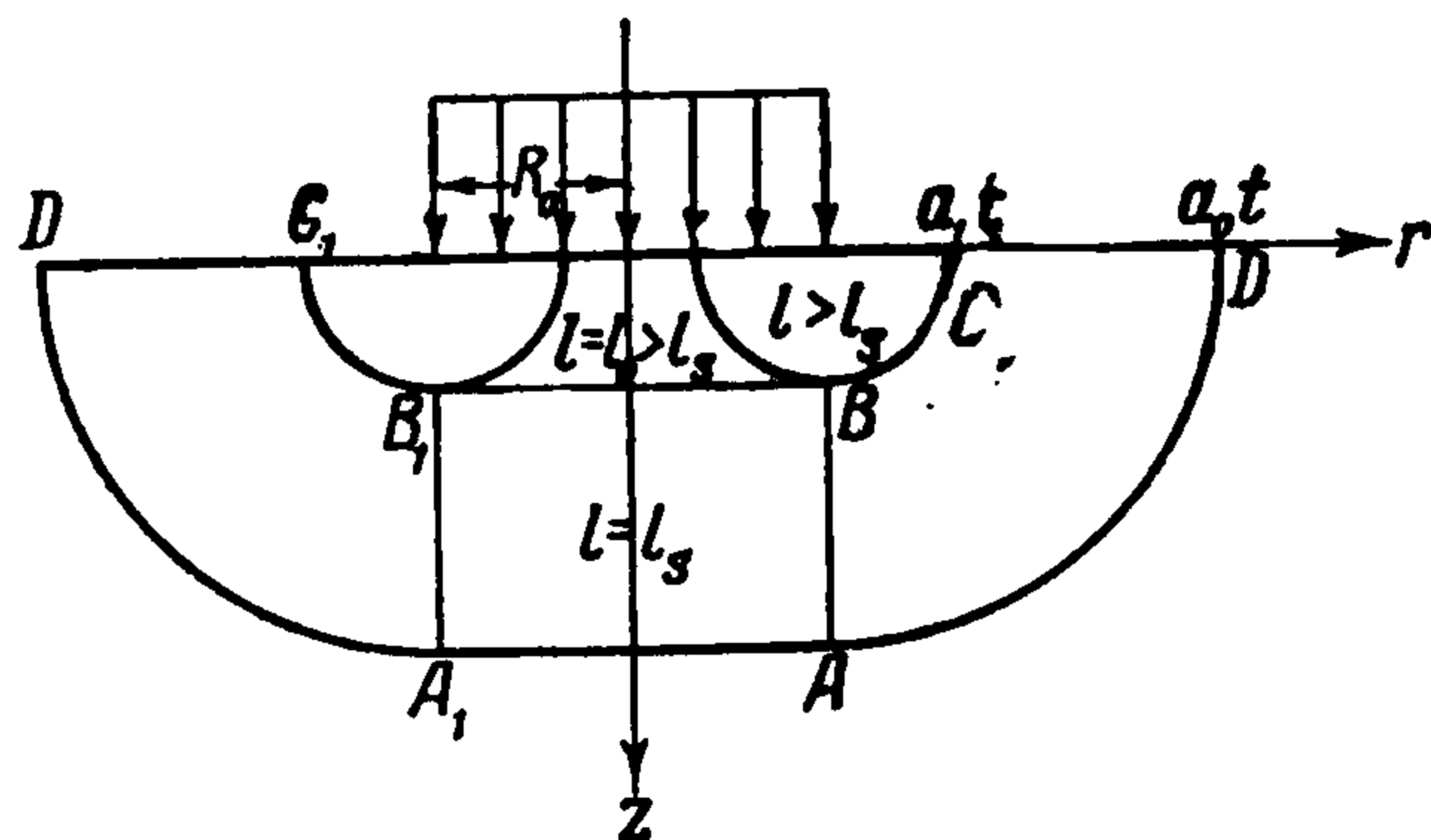
Тогда передним фронтом волн является фронт пластических волн. В этом случае решение задачи будет таким же, как и для упругих деформаций, только вместо скорости распространения упругих деформаций  $a$  следует подставить скорость распространения пластических деформаций  $a_1$ .

Рассмотрим теперь случай упруго-пластической схемы движения. Решение представим через две функции

$$w_1 = \iiint_{\omega} \frac{C(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} \quad (3.3)$$

$$w_2 = \iint_{\sigma} \frac{A(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} + \iiint_{\Omega} \frac{B(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2}} \quad (3.4)$$

где область  $\omega$  определяется как пересечение цилиндра с основанием, равным площади действия нагрузки с гиперболоидом (2.1), при этом  $a$  нужно заменить на  $a_1$ .



Фиг. 5

Область  $\sigma$  является общей частью окружностей

$$\xi^2 = \eta^2 = R_0^2, \quad (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 = a^2 t^2$$

Область  $\Omega$  — пересечение вышеуказанного цилиндра с гиперболоидом (2.1).

Функции  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяются из уравнения

$$\left[ \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right]_{z=0} = -2\pi A_1(x, y) - 2\pi \int_0^t C(x, y, \tau) d\tau - 2\pi \int_0^t B(x, y, \tau) d\tau$$

Из этого уравнения видно, что для начального значения деформаций на линии  $C_1 B_1 B C$  имеем

$$e_s = \frac{2}{3} \sqrt{\left( \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial t} \right)^2}$$

Таким образом, решением в области пластических деформаций будет

$$w = w_1 + w_2 \quad (3.6)$$

а в области упругих деформаций

$$w = w_2 \quad (3.7)$$

**§ 4. Исследование напряженного состояния вблизи границы области нагружения.** Смещение пластического полупространства вблизи границы области нагружения определяется формулой (2.14), у которой вместо  $a$  надо подставить скорость пластических волн  $a_1$ .

Перепишем указанное соотношение

$$w = -\frac{\varepsilon a_1 t}{\pi} \theta_2 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \sqrt{R^2 + r^2} d\theta \quad (1.4)$$

где

$$\cos \theta_2 = \frac{r^2 + \rho^2 - R_0}{2\rho r}, \quad \rho^2 = a^2 t^2 - z^2 \quad (4.2)$$

Из (4.2), дифференцируя соответственно по  $z$  и  $r$ , получаем

$$-\sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = -\frac{z}{\rho r} + \frac{r^2 - \rho^2 - R_0}{2r\rho^2} \frac{z}{\rho}, \quad -\sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} = \frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + \rho^2 - R_0^2}{2\rho r^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{a_1 t \varepsilon}{\pi} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{R^2(\theta_2) + z^2} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \frac{R \partial R / \partial r}{\sqrt{R^2 + z^2}} d\theta$$

Вычислим теперь  $\partial w / \partial r$  при  $z = 0$ . В этом случае интеграл в выражении  $\partial w / \partial r$  упростится, и мы получим

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \frac{\partial R}{\partial r} d\theta = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} R d\theta = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} [r \cos \theta - \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + R_0^2 - r^2}] d\theta = \\ &= 2 \sin \theta_2 - \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + R_0^2 - r^2} d\theta = 2 \sin \theta_2 + r \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + R_0^2 - r^2}} \end{aligned}$$