ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЗАИМНО ТЯГОТЕЮЩИХ ЧАСТИЦ

А. Н. Герасимов

(Москва)

Известная барометрическая формула Лапласа

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{mgh}{kT}\right] \tag{1}$$

является частным и весьма несовершенным примером применения общей формулы Л. Больцманна

$$\rho = \rho_0 \exp\left[-\frac{\Pi}{kT}\right] \tag{2}$$

где Π — потенциальная энергия частицы и T — абсолютная температура, одна и та же во всех местах области, к которой относится распределение плотности ρ частиц. Но состояние системы, будучи стационарным в тепловом отношении, не непременно должно быть изотермическим.

Ниже рассматривается неограниченно простирающееся тело, частицы которого подчинены лишь силам взаимного тяготения по ньютоновскому закону. Уравнение состояния может не уточняться — оно может быть любым. В конце концов устанавливается некоторое состояние системы, обладающее непременно сферической симметрией (мы считаем, что количество частиц бесконечно велико). Выводится нелинейное интегральное уравнение, связывающее распределение температур с распределением плотностей. Из этого уравнения, зная одно из распределений, можно найти другое. Для состояния по Клапейрону задача легко доводится до конца. Приведенные выше формулы (1) и (2) получаются как частные случаи для изотермического состояния.

Рассмотрим газообразное тело, состоящее из громадного числа частиц с массой m каждая, тяготеющих друг к другу по закону

$$f = \gamma \frac{m^2}{l^2} \qquad \left([\gamma] = \frac{дин\ см^2}{г^2}\right) \tag{3}$$

(Здесь γ — постоянная тяготения). В формуле (3) хотелось бы писать вместо l^2 для ньютоновского тяготения более общее l^n, имея в виду возможность применения излагаемого также и к микрофеноменам молекулярного и атомного порядка, как это имеет место, например, в случае действия ван-дер-ваальсовых или обменных сил. Но тогда нельзя было бы использовать то замечательное свойство притягивающего по Ньютону сферического слоя, которое лежит в основе дальнейшего. Такое обобщение усложнило бы выкладки.

По достижении стационарного состояния газ неизбежно примет форму со сферической симметрией вокруг центра массы. Это состояние и будем рассматривать.

Пусть O — центр массы. Представим телесный угол $d\omega$ с вершиной в O и элемент объема в нем между сферическими поверхностями радиусов α и $\alpha + d\alpha$. Если плотность газа в этом объеме есть $\rho(\alpha)$, то масса в нем равна

$$\rho(\alpha)\, \alpha^2\, d\omega\, d\alpha \tag{4}$$

Результирующее действие всех сил тяготения на эту порцию газа таково, как если бы ее притягивал газ, который заключен только внутри шара радиуса α, и притом так, как если бы притягивающий газ заключался в центре O шара.

Притягивающая масса равна

$$\int_0^\alpha \rho(\beta)\, 4\pi\beta^2\, d\beta \tag{5}$$

На основании (3) сила тяготения между массами (4) и (5) есть

$$\gamma\rho(\alpha)\, d\alpha\, d\omega \int_0^\alpha \rho(\beta)\, 4\pi\beta^2\, d\beta \tag{6}$$

Вообразим теперь сферическую поверхность с центром в O и радиусом r и ту ее часть, которая находится внутри телесного угла $d\omega$. Площадь этой части есть

$r^2 d\omega$. Над $r^2 d\omega$ находится бесконечно простирающаяся совокупность элементарных объемов, каждый из которых имеет массу вида (4) при $\alpha \geqslant r$ и каждый из которых притягивается к O с силой (6). Эти силы, складываясь, создают силу давления на площадку $r^2\, d\omega$, равную

$$\int\limits_r^\infty \gamma\rho(\alpha)\, d\alpha\, d\omega \int\limits_0^\alpha \rho(\beta)\, 4\pi\beta^2 d\beta \tag{7}$$

Разделив (7) на площадь $r^2 d\omega$, получим давление газа $p(r)$ на расстоянии r от центра масс:

$$p(r) = \frac{\gamma}{r^2} \int\limits_r^\infty \rho(\alpha)\, d\alpha \int\limits_0^\alpha \rho(\beta)\, 4\pi\beta^2\, d\beta \tag{8}$$

С другой стороны, предположим, что состояние газа описывается уравнением

$$p = \varphi(\rho, T) \tag{9}$$

где по условиям стационарности и симметрии ρ и T могут зависеть только от r.

Подставляя (9) в (8), находим

$$r^2 \varphi[\rho(r), T(r)] = \gamma \int\limits_r^\infty \rho(\alpha)\, d\alpha \int\limits_0^\alpha \rho(\beta)\, 4\pi\beta^2\, d\beta \tag{10}$$

При заданном распределении температур из этого нелинейного интегрального уравнения можно определить распределение плотностей $\rho(r)$ и обратно.

В случае состояния по уравнению Клапейрона, например (10) обращается в

$$T(r)\rho(r)\, 4\pi r^2 = \frac{\gamma m}{k} \int\limits_r^\infty \frac{\rho(\alpha)\, 4\pi\alpha^2\, d\alpha}{\alpha^2} \int\limits_0^\alpha \rho(\beta)\, 4\pi\beta^2\, d\beta \tag{11}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^z \rho(\zeta)\, 4\pi\zeta^2\, d\zeta = M(z) \tag{12}$$

есть масса газа в шаре радиуса z. Из (12) следует

$$\rho(z)\, 4\pi z^2 = M'(z) \tag{13}$$

Имея в виду (12) и (13), представим (11) так:

$$T(r)\, M'(r) = \frac{\gamma m}{k} \int \frac{M'(\alpha)\, M(\alpha)}{\alpha^2}\, d\alpha \tag{14}$$

Дифференцируя, получим

$$[T(r)\, M'(r)]' = -\frac{\gamma m}{k} \frac{M(r)\, M'(r)}{r^2} \quad \text{или} \quad TM'' + T'M' = -\frac{\gamma m}{k} \frac{MM'}{r^2} \tag{15}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно M и первого относительно T связывает расспределение масс с распределением температур идеального газа при стационарном тепловом режиме. Любое из этих двух распределений может быть установлено по-другому.

Относительно M уравнение (15) сводится к такому типу уравнений Лиувилля, которые не интегрируются в конечном виде. Но представим себе, что газовый шар имеет внутри ядро с радиусом r_0 и с массой M_0 столь значительной, что по сравнению с ней внешняя масса газа оказывается исчезающе малой. Тогда уравнение (15) может быть представлено в виде

$$TM'' = -\left[\frac{a}{r^2} + T'\right] M', \qquad \frac{\gamma M_0 m}{k} = a, \qquad [a] = \textit{град см} \tag{16}$$

При данном $T(r)$ это уравнение, наоборот, легко решается. Впрочем, из него достаточно определять $M'(r)$, чтобы потом при помощи (13) найти $\rho(r)$.

Но сначала выясним вопрос о распределении температур.

Рассмотрим бесконечно тонкий сферический слой с радиусами поверхностей r и $r + dr$. При стационарном режиме температура в нем $T(r)$. Коэффициент теплопроводности обозначим σ и будем считать его не зависящим от r.

Через поверхность $r+dr$ за каждую единицу времени из слоя вытекает количество тепла, равное

$$-4\pi\sigma\,[r^2T'(r)]_{r+dr} \tag{17}$$

Через поверхность r за каждой единицей времени в него втекает количество тепла

$$-4\pi\sigma\,[r^2T'(r)]_r \tag{18}$$

Следовательно с каждой единицей времени в слое остается количество тепла

$$4\pi\sigma\,\{[r^2T']_{r+dr}-[r^2T']_r\} \quad \text{или} \quad 4\pi\sigma\,[r^2T']'\,dr \tag{19}$$

Если эта величина была отличной от тождественного нуля, режим не мог бы иметь стационарный характер. Условие стационарности приводит к уравнению Лапласа (для сферической симметрии)

$$[r^2T']'=0 \tag{20}$$

Его общий интеграл

$$T(r)=\frac{A}{r}+B \tag{21}$$

где A и B — произвольные постоянные, определяемые согласно краевым условиям.

Пусть, например, между поверхностями радиусов R_1 и R_2 $(r_0\leqslant R_1\leqslant R_2)$ имеется слой, удерживаемый при постоянной температуре T^* благодаря перманентно действующему в слое равномерно распределенному радиоизотопному излучению. Пусть на поверхности r_0 удерживается постоянная температура T_0. Пусть далее при $r\to\infty$, $T(r)\to 0$. Для этого случая простой подсчет дает

$$T(r)=\frac{R_1T^*(r-r_0)+r_0T_0(R_1-r)}{(R_1-r_0)r} \qquad (r_0\leqslant r\leqslant R_1) \tag{22}$$

$$=T^* \qquad (R_1\leqslant r\leqslant R_2) \tag{23}$$

$$=\frac{R_2T^*}{r} \qquad (r\geqslant R) \tag{24}$$

В частности, если $R_2=R_1=r_0$ и $T^*=T_0$, причем $T\to 0$ для $r\to\infty$, имеем монотонное падение температуры то T_0 до 0 по гиперболическому закону

$$T(r)=\frac{r_0T_0}{r} \qquad (r\geqslant r_0) \tag{25}$$

Дальше мы ограничиваемся именно этим случаем распределения температур. Из уравнения (16) выводим на основании (13):

$$\rho(r)=\rho(r_0)\frac{r_0^2}{r^2}\exp\left[-\int_{r_0}^{r}\left[\frac{a}{r^2}+T'\right]\frac{dr}{T}\right] \tag{26}$$

Согласно (16) это дает

$$\rho(r)=\rho(r_0)\frac{r_0^2}{r^2}\exp\left[\ln\frac{r}{r_0}-\frac{a}{r_0T_0}\ln\frac{r}{r_0}\right] \tag{27}$$

или

$$\rho(r)=\rho(r_0)\,\frac{r_0}{r}\exp\left[-\frac{a}{r_0T_0}\ln\left(1+\frac{r-r_0}{r_0}\right)\right] \tag{28}$$

Замечая, что $r-r_0=h$ — высота над уровнем r_0, считающаяся малой по сравнению с r_0, можем положить

$$\ln\left(1+\frac{r-r_0}{r_0}\right)=\frac{h}{r_0} \tag{29}$$

Наконец используя (16) и то обстоятельство, что

$$\frac{\gamma M_0m}{r^2}=mg \tag{30}$$

представляет вес частицы с массой m, получим вместо (28)

$$\rho(r)=\rho(r_0)\frac{r_0}{r}\exp\left[-\frac{mgh}{kT_0}\right] \tag{31}$$

Отождествление r с r_0 приводит к формуле (1) Лапласа.

Поступила 24 IV 1958