УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КЕПЛЕРА

А. И. Лурье

(Ленинград)

Уравнения возмущенного движения планеты были частично известны Ньютону; история вопроса и вывод этих уравнений изложены в известном курсе небесной механики Тиссерана [1] и в работе А. Н. Крылова [2]. Тиссеран, следуя общим методам теории возмущенного движения, вычисляет скобки Лагранжа для эллиптических элементов орбиты; вывод А. Н. Крылова основан на геометрических построениях. Уравнения, о которых идет речь, выводятся также в книге Г. Н. Дубошина [3].

Вывод, предлагаемый далее, основан на прямом применении метода вариации произвольных постоянных. Уравнение эллиптической орбиты записывается в векторной форме

$$\mathbf{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\,\mathbf{e}_r = r\mathbf{e}_r \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор из центра притяжения к движущейся точке; a, e — большая полуось и эксцентриситет орбиты, $\cos\varphi = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{i}_1$, где $\mathbf{i}_1$ — единичный вектор направления на перигей (большой полуоси орбиты).

Вводится в рассмотрение ортогональный триедр единичных векторов $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\varphi$; единичный вектор $\mathbf{e}_\varphi$ направлен в сторону возрастания угла φ в плоскости орбиты перпендикулярно $\mathbf{e}_r$, вектор $\mathbf{e}_3$ определяет плоскость орбиты в невозмущенном движении.

В невозмущенном движении этот триедр имеет угловую скорость $\dot\varphi\mathbf{e}_3$, так что

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot\varphi\mathbf{e}_\varphi, \qquad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot\varphi\mathbf{e}_r, \qquad \dot{\mathbf{e}}_3 = 0 \tag{2}$$

и по теореме площадей

$$\dot\varphi = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2} \tag{3}$$

где μ — коэффициент пропорциональности закона тяготения.

Положение плоскости орбиты определяется долготой восходящего узла Ω, дающей направление единичного вектора $\mathbf{n}$ линии узлов, и углом наклона i плоскости орбиты к плоскости $O\xi\eta$ системы неподвижных осей $O\xi\eta\zeta$; положение перигея в плоскости орбиты задается угловым расстоянием перигея от узла ω, так что $\cos\omega = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}_1$.

Вектор скорости в невозмущенном движении, как следует из (1), (2), (3), равен

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\mathbf{e}_r e\sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi(1+e\cos\varphi)\right] \tag{4}$$

а вектор ускорения

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{5}$$

Следуя методу вариации призвольных постоянных, сохраняем для векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ те же выражения (1) и (4) в возмущенном движении, что и в невозмущенном; но эллиптические элементы орбиты a, e, Ω, i, ω будут уже не постоянными, а неизвестными функциями времени. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ триедра $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3$, вследствие изменения углов Ω, i, ω, в возмущенном движении равна

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}\dot\Omega + \mathbf{n}\frac{di}{dt} + e_3(\dot\varphi + \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{6}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор на оси $O\zeta$.

Ее проекции на оси триедра $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3$ определяются известными формулами

$$\begin{aligned} \omega_r &= \dot\Omega\sin i\sin u + \frac{di}{dt}\cos u \\ \omega_\varphi &= \dot\Omega\sin i\cos u - \frac{di}{dt}\sin u \\ \omega_3 &= \dot\Omega\cos i + \dot\omega + \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \omega'_3 + \dot\varphi \end{aligned} \tag{7}$$

где $u = \omega + \varphi$. Заметим еще, что $\dot\varphi$ в этих формулах возмущенного движения отлично от величины, определяемой по (3); последнюю далее обозначаем $\dot{\varphi}^\circ$; вообще нулик сверху будет далее отличать величины в невозмущенном движении.

По формулам дифференцирования единичных векторов имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r = -\omega_\varphi \mathbf{e}_3 + (\omega_3' + \dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\varphi = \omega_r \mathbf{e}_3 - (\omega_3' + \dot{\varphi})\mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = -\omega_r \mathbf{e}_\varphi + \omega_\varphi \mathbf{e}_r \end{aligned} \tag{8}$$

Потребовав теперь, чтобы имели место равенства

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \mathbf{v}^\circ, \qquad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w}^\circ + \mathbf{F} \tag{9}$$

где $\mathbf{F}$ — добавочная сила, действующая на точку в возмущенном движении, придем после выполнения дифференцирований с учетом соотношений (8), к равенствам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial r}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial r}{\partial e}\dot{e}\right) + r\left[(\omega_3' + \dot{\varphi})\,\mathbf{e}_\varphi - \omega_\varphi \mathbf{e}_3\right] =$$

$$= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi r\right)\dot{\varphi}^\circ = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\mathbf{e}_r e \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi (1 + e\cos\varphi)\right] = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial v_r}{\partial e}\dot{e} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial e}\dot{e} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi +$$

$$+ v_r\left[-\omega_\varphi \mathbf{e}_3 + (\omega_3' + \dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi\right] + v_\varphi\left[\omega_r \mathbf{e}_3 - (\omega_3' + \dot{\varphi})\mathbf{e}_r\right] = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{e}_r + \mathbf{F} \tag{11}$$

Из (10) получаем три уравнения

$$\omega_\varphi = 0, \quad \omega_3' + \dot{\varphi} = \dot{\varphi}^\circ, \quad -\frac{\partial r}{\partial \varphi}\omega_3' + \frac{\partial r}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial r}{\partial e}\dot{e} = 0 \tag{12}$$

Последнее из этих уравнений в развернутом виде будет

$$\omega_3' e \sin\varphi - \frac{\dot{a}}{a}(1 + e\cos\varphi) + \frac{2e + e^2\cos\varphi + \cos\varphi}{1 - e^2}\dot{e} = 0 \tag{13}$$

Используя соотношения (12), можно уравнения, получающиеся из векторного равенства (11), записать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{a}}{2a} e \sin\varphi + \frac{\dot{e}}{1-e^2}\sin\varphi - \omega_3' e \cos\varphi &= \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\,F_r \\ -\frac{\dot{a}}{2a}(1 + e\cos\varphi) + \frac{\dot{e}}{1-e^2}(\cos\varphi + e) + \omega_3' e \sin\varphi &= \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\,F_\varphi \\ \omega_r &= \sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + e\cos\varphi}F_3 \end{aligned} \tag{14}$$

Из первого равенства (12) и последнего (14) находим, вспоминая значения (7) величин ω_r и ω_φ, уравнения возмущенного движения для элементов Ω и i

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + e\cos\varphi}F_3 \cos u, \quad \dot{\Omega}\sin i = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + e\cos\varphi}F_3 \sin u \tag{15}$$

Из (13) и (14) получаем

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\left(F_r \sin\varphi + \frac{e + 2\cos\varphi + e\cos^2\varphi}{1 + e\cos\varphi}F_\varphi\right) \\ \frac{\dot{a}}{2a} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[F_r e \sin\varphi + (1 + e\cos\varphi)F_\varphi\right] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\omega_3' = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(-F_r\cos\varphi + \frac{2 + e\cos\varphi}{1 + e\cos\varphi}F_\varphi \sin\varphi\right) = \dot{\Omega}\cos i + \dot{\omega}$$

Уравнения (15), (16) совместно со вторым уравнением (12) представляют искомую систему уравнений возмущенного движения.

Поступила 23.I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Tisserand F. Traité de mécanique céleste, t. 1, Chapitre X, p. 172—188, 1889.
2. Крылов А. Н. Sur la variation des éléments des orbites élliptiques de planètes, Собр. тр., VI, стр. 249—266, 1915.
3. Дубошин Г. Н. Введение в небесную механику. § 40, стр. 137—148, 1938.