О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА «ТИП-ТОП», НАХОДЯЩЕГОСЯ НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Л. С. Исаева

(Москва)

Волчком «тип-топ» называют волчок со сферическим основанием, центр тяжести которого находится ниже центра сферы основания.

Предполагается, что волчок находится на абсолютно шероховатой плоскости, трение его основания об эту плоскость является сухим, он представляет собой консервативную систему и для него существует интеграл энергии.

Ниже выводятся уравнения движения волчка «тип-топ», находящегося на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, эллипсоид инерции которого относительно центра тяжести есть эллипсоид вращения, определяются первые интегралы уравнений движения и находятся условия устойчивости малых колебаний его оси около вертикали.

Пусть p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижной системы координат $0\xi\eta\zeta$, направленные по главным осям инерции волчка из центра тяжести; γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{k}_1$, направленного по направлению силы тяжести mg волчка вверх, относительно подвижных осей ξ, η, ζ. Обозначим через A — главный момент инерции волчка относительно осей ξ и η, через C — главный момент инерции волчка относительно оси ζ, через $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси ζ, через $\mathbf{L}_0$ — кинетический момент волчка относительно центра тяжести.

Для кинетического момента волчка относительно точки контакта основания имеем

$$\mathbf{L} = (a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k}) \times \mathbf{Q} + \mathbf{L}_0 \qquad \left(\mathbf{Q} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \tag{1}$$

Здесь $d\mathbf{r}/dt$ — скорость центра тяжести волчка, a — радиус сферы, l — расстояние от центра сферы до центра тяжести.

Из (1) получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k}) \times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}$$

По теореме о кинетическом моменте относительно точки контакта имеем

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} + (a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k}) \times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = mg(a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k}) \times \mathbf{k}_1 \tag{2}$$

Скорость точки контакта основания волчка равна нулю

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times (a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k}) = 0$$

Обозначим через u, v, w проекции $d\mathbf{r}/dt$ на подвижные оси. Проектируя (2) на подвижные оси, получим

$$\begin{gathered} A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr + ma\gamma_2\frac{dw}{dt} - m(a\gamma_3 - l)\frac{dv}{dt} = mgl\gamma_2 \\ A\frac{dq}{dt} + (A - C)pr + m(a\gamma_3 - l)\frac{du}{dt} - ma\gamma_1\frac{dw}{dt} = -mgl\gamma_1 \\ C\frac{dr}{dt} + ma\gamma_1\frac{dv}{dt} - ma\gamma_2\frac{du}{dt} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$w = a(\gamma_2 p - \gamma_1 q), \qquad v = a\gamma_1 r - (a\gamma_3 - l)p, \qquad u = (a\gamma_3 - l)q - a\gamma_2 r \tag{4}$$

Так как направление силы тяжести постоянно, то, следовательно

$$\frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = \frac{d'\mathbf{k}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1 = 0 \tag{5}$$

Здесь символом штрих обозначена локальная производная.

Проектируя (5) на подвижные оси, получим уравнения Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{6}$$

По теореме живой силы имеем

$$dT = d\left[\frac{1}{2}\mathbf{L}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] = -mgd\,(l\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1) \tag{7}$$

Из (7) получаем интеграл энергии

$$\mathbf{L}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2mgl\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1 = 2h = \mathrm{const}$$

или

$$[A + m(a^2 - 2al\gamma_3 + l^2)](p^2 + q^2) + [C + ma(a - 2l\gamma_3)]\,r^2 -$$
$$- ma^2\omega_1^2 + 2malr\omega_1 + 2mgl\gamma_3 = 2h$$

где

$$\omega_1 = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3$$

Для получения второго интеграла умножим (2) скалярно на $(a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k})$; так как $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\mathbf{k}$, а $\mathbf{L}_0 = A\boldsymbol{\omega}' + C\boldsymbol{\omega}''$, $\boldsymbol{\omega}' = (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}'' = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\mathbf{k}$, то $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$ и, значит,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{L}_0 \cdot (a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k})] = 0$$

Отсюда

$$\mathbf{L}_0 \cdot (a\mathbf{k}_1 - l\mathbf{k}) = P_0 = \mathrm{const}$$

или

$$Aa\omega_1 + (C - A)\,a\gamma_3 r - Clr = P_0 \qquad \text{(интеграл Желле)} \tag{8}$$

Из интеграла (8) видно, что проекция вектора кинетического момента относительно центра тяжести на радиус-вектор, соединяющий центр тяжести с точкой контакта, есть величина постоянная. Для получения третьего интеграла подставим в уравнение (2) выражение производной $d^2\mathbf{r}/dt^2$ и умножим результат скалярно на $\mathbf{k}$, учитывая, что $d\mathbf{k}/dt \perp \mathbf{L}_0$, получим

$$[C + ma^2(1 - \gamma_3^2)]\frac{dr}{dt} - ma(a\gamma_3 - l)\left(\gamma_1\frac{dp}{dt} + \gamma_2\frac{dq}{dt}\right) - malr(\gamma_1 q - \gamma_2 p) = 0$$

Заменяя здесь $q\gamma_1 - p\gamma_2$ согласно (6) и введя ω_1, получим

$$(C + ma^2)\frac{dr}{dt} - ma(a\gamma_3 - l)\frac{d\omega_1}{dt} - mal\frac{d}{dt}(r\gamma_3) = 0 \tag{9}$$

Подставив в (9) выражение производной $d(r\gamma_3)/dt$ согласно (8) и в полученном результате заменяя снова согласно (8) выражение $(C - A)\,a\gamma_3 - Cl$, интегрируя, получим

$$[(C - A)(C + ma^2) - Cml^2]\,r^2 - 2maP_0\omega_1 + Ama^2\omega_1^2 = Q_0 = \mathrm{const} \tag{10}$$

Из интеграла (10) видно, что проекция кинетического момента волчка относительно точки контакта на главную ось инерции есть величина постоянная. Уравнения (6) дают интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Рассмотрим устойчивость вращения волчка вокруг вертикальной оси ζ, т. е. движения, определяемого частным решением уравнений движения (3) и (6)

$$u = v = w = 0, \quad p = q = 0, \quad r = r_0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1$$

Устойчивость вращения волчка исследуем по отношению к переменным p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 при условии (4)

В возмущенном движении положим

$$p = \xi_1, \quad q = \xi_2, \quad r = r_0 + \xi_3, \quad \gamma_1 = \eta_1, \quad \gamma_2 = \eta_2, \ \gamma_3 = 1 + \eta_3 \tag{11}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 — малые величины.

Так как $\omega_1 = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3$, то в возмущенном движении

$$\omega_1 = r_0 + \xi_4, \qquad \xi_4 = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + r_0\eta_3 + \xi_3$$

Уравнения возмущенного движения получим из (3) и (6), исключая из них u, v, w и полагая p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 равными согласно (11), а $\omega_1 = r_0 + \xi_4$.

Уравнения возмущенного движения имеют первые интегралы

$$V_1 = \{A + m[a^2 - 2al(1+\eta_3) + l^2]\}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2mgl\eta_3 + 2mal\xi_4(r_0 + \xi_3) + \\ + \{C + ma[a - l(1 + 2\eta_3)]\}(2r_0\xi_3 + \xi_3^2) - ma^2\xi_4(2r_0 + \xi_4) = \text{const}$$

$$V_2 = Aa\xi_4 + (C - A)ar_0\eta_3 + [C(a-l) - Aa]\xi_3 + (C - A)a\xi_3\eta_3 = \text{const}$$

$$V_3 = [(C-A)(C+ma^2) - Cml^2]\xi_3^2 + 2r_0[(C-A)(C+ma^2) - Cml^2]\xi_3 - \\ - 2mar_0[C(a-l) - Aa]\xi_4 + Ama^2\xi_4^2 = \text{const}$$

$$V_4 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_3 + \eta_3^2 = 0$$

Функцию Ляпунова ищем по методу Н. Г. Четаева в виде связки интегралов

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 + \nu V_4 + \rho V_4^2$$

Постоянные λ и μ определим из равенства нулю в функции V всех линейных членов, кроме положительного $(-2ma^2r_0^2\eta_3)$

$$\lambda = 2\frac{(mgl + \nu)[C - A + ml(a-l)] - mar_0^2[a(A - C) + Al - ml^2(a-l)]}{ar_0^2(A-C)[C + ma(a-l)]}$$

$$\mu = \frac{Car_0^2 - (a-l)[ml(g + ar_0^2) + \nu]}{ar_0^2(A-C)[C + ma(a-l)]}$$

Постоянные ρ и ν — произвольные, причем ρ — отрицательное или достаточно малое положительное число. Пусть

$$V^* = A_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + A_2\xi_3^2 + 2A_3\xi_3\eta_3 + A_4\eta_3^2 + \nu(\eta_1^2 + \eta_2^2) + A_5(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + \\ + \rho(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 4\eta_3) + ma^2(1 + \mu A)[\xi_1^2\eta_1^2 + \xi_2^2\eta_2^2 + \\ + \xi_3^2\eta_3^2 + 2(\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_3\eta_1\eta_3 + \xi_1\xi_3\eta_1 + r_0\xi_1\eta_1\eta_3 + \xi_2\xi_3\eta_2\eta_3 + \xi_2\xi_3\eta_2 + r_0\xi_2\eta_2\eta_3 + \\ + \xi_3^2\eta_3 + r_0\xi_3\eta_3^2 + r_0\xi_3\eta_3)] + 2mal(\xi_1\xi_3\eta_1 + \xi_2\xi_3\eta_2 + \xi_3^2\eta_3) - 2ma^2r_0^2\eta_3$$

$$V^* \leqslant V$$

где

$$A_1 = A + m(a-l)^2$$
$$A_2 = C + 2ma^2 + \mu C[C - A + m(a^2 - l^2)]$$
$$2A_3 = Ca[\lambda - 2\mu mr_0(a-l)]$$
$$A_4 = r_0^2ma^2(1 + \mu A) + \nu + 4\rho$$
$$A_5 = a[-2mr_0(a-l)(1 + \mu C) + A(2\mu mr_0a + \lambda)]$$

Функция V будет определенно положительной функцией переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3, если таковой будет квадратичная форма тех же переменных

$$V^{**} = A_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + A_2\xi_3^2 + 2A_3\xi_3\eta_3 + A_4\eta_3^2 + \nu(\eta_1^2 + \eta_2^2) + A_5(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)$$

Согласно критерию Сильвестра, необходимыми и достаточными условиями положительной определенности формы V^{**} являются условия:

$$1)\ A_2 > 0,\quad 2)\ 4A_1\nu - A_5^2 > 0,\quad 3)\ A_2A_4 - A_3^2 > 0,\quad 4)\ \nu > 0,\quad 6)\ A_4 > 0$$

или

1) $C + 2ma^2 + \mu C[C - A + m(a^2 - l^2)] > 0$

2) $4[A + m(a-l)^2]\nu - a^2[-2mar_0(a-l)(1 + C\mu) + A(2\mu mr_0a + \lambda)]^2 > 0$ (12)

3) $4\{C + 2ma^2 + \mu C[C - A + m(a^2 - l^2)]\}[r_0^2ma^2(1 + \mu A) + \nu + 4\rho] - C^2a^2[\lambda - 2\mu mr_0(a-l)]^2 > 0$

4) $r_0^2ma^2(1 + \mu A) + \nu + 4\rho > 0$

5) $\nu > 0$

Условия (12) являются по теореме Ляпунова достаточными условиями устойчивости вращения волчка вокруг вертикальной оси. Условия (12) примут вид:

при $\mu = 0$

1) $4[A + m(a-l)^2]\nu - a^2[-2mr_0(a-l) + \lambda A]^2 > 0$

2) $4(C + 2ma^2)(r_0^2ma^2 + \nu + 4\rho) - C^2a^2\lambda^2 > 0$

3) $r_0^2ma^2 + \nu + 4\rho > 0$

4) $r_0^2 > \dfrac{(a-l)mgl}{a[C - (a-l)ml]}$

где
$$\nu = \frac{Car_0^2 - (a-l)(g + ar_0^2)\,ml}{a-l}, \qquad \lambda = -\frac{2r_0}{a-l}$$

при $\mu = 0$ и $\rho \geqslant 0$

1) $4\,[A + m\,(a-l)^2]\,\nu - a^2\,[-2mr_0\,(a-l) + \lambda A]^2 > 0$

2) $4\,(C + 2ma^2)\,(r_0^2 + ma^2 + \nu) - C^2a^2\lambda^2 > 0$

3) $r_0^2 > \dfrac{(a-l)\,mgl}{a\,[C - (a-l)\,ml]}$

где
$$\nu = \frac{Car_0^2 - (a-l)(g + ar_0^2)\,ml}{a-l}, \qquad \lambda = -\frac{2r_0}{a-l}$$

при $\lambda = 0$

1) $C + 2ma^2 + C\mu\,[C - A + m\,(a^2 - l^2)] > 0$

2) $4\,[A + m\,(a-l)^2]\,\nu - a^2\,[-2mr_0\,(a-l)(1 + C\mu) + 2\mu Amar_0]^2 > 0$

3) $\{C + 2ma^2 + C\mu\,[G - A + m\,(a^2 - l^2)]\}\,[r_0^2ma^2\,(1 + \mu A) + \nu + 4\rho] - C^2a^2m^2\mu^2r_0^2\,(a-l)^2 > 0$

4) $r_0^2ma^2\,(1 + \mu A) + \nu + 4\rho > 0$

5) $r_0^2 > \dfrac{gl\,[C - A + ml\,(a-l)]}{a\,[(A-C)\,a + Al - ml^2\,(a-l)]}$

где
$$\mu = -\frac{1}{C - A + ml\,(a-l)}, \qquad \nu = \frac{mar_0^2\,[(A-C)\,a + Al - ml^2\,(a-l)]}{C - A + ml\,(a-l)} - mgl$$

Поступила 21 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат., М., 1955.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат., М.—Л., 1952.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
4. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
5. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1, 1948.
6. Colombo G. Riduzione alle quadvature di un notevole pvoblema di Stereodinamica.Atti Della Accademia Nazionale dei Lincel Classe di Scienze fisiche,matematiche e naturali, 18, № 2, 168—172, 1955.
7. O'Brien S., Synge I. L. The instability of the tippe-top explained by sliding friction. Proc. Roy. Irish Academy, V. 56, s. A, № 3, 1954.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ ЭЙЛЕРА

М. П. Гуляев

(Алма-Ата)

Дифференциальные уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Эйлера записываются в следующем виде:

$$A\frac{dp}{dt} - (B - C)\,qr = 0, \ldots, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \ldots \tag{1}$$

где A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно главных осей центрального эллипсоида, p, q, r — компоненты мгновенной угловой скорости тела по осям подвижной системы координат x, y, z, совпадающих с главными центральными осями инерции, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы неподвижной оси ζ относительно упомянутой системы координат.

Среди всех движений твердого тела в случае Эйлера практический интерес представляют постоянные вращения тела вокруг своих главных осей инерции, проходящих через неподвижную точку и соответственно совпадающих с осью ζ.