О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

С. Д. Клячко

(Новосибирск)

Как известно, в случае решения первой основной задачи плоской теории упругости для двух и более связных областей, когда главные векторы внешних усилий для некоторых контуров, ограничивающих область, отличны от нуля, напряженное состояние оказывается зависящим от коэффициента Пуассона.

Для случая обобщенного плоско-напряженного состояния С. Г. Лехницким [1], [2] и Н. Г. Ченцовым [3] предложен способ определения напряжений при помощи экспериментов над двумя моделями, изготовленными из материалов с различными коэффициентами Пуассона и находящимися также в обобщенном плоско-напряженном состоянии.

Общий случай плоской задачи был рассмотрен В. И. Моссаковским [4]. Им было предложено определять функции напряжений натуры $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ через функции напряжений $(\varphi_1(z), \psi_1(z), \varphi_2(z), \psi_2(z), \varphi_3(z), \psi_3(z))$ трех моделей, изготовленных из материалов с различными коэффициентами Пуассона, при помощи следующей зависимости (здесь и в дальнейшем использованы обозначения [4]):

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}[\alpha_1\varphi_1(z)+\alpha_2\varphi_2(z)+\alpha_3\varphi_3(z)]\\ \psi_0(z) &= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}[\alpha_1\psi_1(z)+\alpha_2\psi_2(z)+\alpha_3\psi_3(z)]\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь α_1, α_2 и α_3 должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{1+\varkappa_0}=\frac{\alpha_1}{1+\varkappa_1}+\frac{\alpha_2}{1+\varkappa_2}+\frac{\alpha_3}{1+\varkappa_3} \quad \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\varkappa_0}{1+\varkappa_0}=\frac{\alpha_1\varkappa_1}{1+\varkappa_1}+\frac{\alpha_2\varkappa_2}{1+\varkappa_2}+\frac{\alpha_3\varkappa_3}{1+\varkappa_3} \qquad (2)$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$ — упругие постоянные натуры и моделей.

Однако легко убедиться, вычтя, например, из обеих частей второго уравнения этой системы величину $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, что эта система состоит из двух одинаковых уравнений. Таким образом, имеем вместо системы двух уравнений с тремя неизвестными одно уравнение с тремя неизвестными. Положив в этом уравнении $\alpha_3=0$ и подставляя в формулы (1) значения α_1 и α_2, удовлетворяющие этому уравнению, получим

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= \frac{(1+\varkappa_1)(\varkappa_2-\varkappa_0)}{(1+\varkappa_0)(\varkappa_2-\varkappa_1)}\varphi_1(z)+\frac{(1+\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_0)}{(1+\varkappa_0)(\varkappa_1-\varkappa_2)}\varphi_2(z)\\ \psi_0(z) &= \frac{(1+\varkappa_1)(\varkappa_2-\varkappa_0)}{(1+\varkappa_0)(\varkappa_2-\varkappa_1)}\psi_1(z)+\frac{(1+\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_0)}{(1+\varkappa_0)(\varkappa_1-\varkappa_2)}\psi_2(z)\end{aligned} \qquad (3)$$

Для напряжений получим формулы

$$X_{x_0}=\frac{(1+\varkappa_1)(\varkappa_2-\varkappa_0)}{(1+\varkappa_0)(\varkappa_2-\varkappa_1)}X_{x_1}+\frac{(1+\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_0)}{(1+\varkappa_0)(\varkappa_1-\varkappa_2)}X_{x_2} \text{ и т. д.} \qquad (4)$$

Таким образом, и в общем случае плоской задачи, рассмотренном в работе [4], для экспериментального определения напряжений достаточно произвести эксперименты только с двумя моделями из материалов с различными коэффициентами Пуассона.

Рассматривая частный случай, когда натура и обе модели находятся в обобщенном плоско-напряженном состоянии, получим, выразив упругие постоянные $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ через коэффициенты Пуассона [5], формулы, имеющиеся в работах [1], [2] и [3].

Заслуживает внимания также другой частный случай, когда натура находится в плоско-деформированном состоянии, а модели в обобщенном плоско-напряженном состоянии. Выразив [5] в этом случае $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ через коэффициенты Пуассона σ_0, σ_1 и σ_2, получим из формул (4)

$$X_{x_0}=\frac{1-(1+\sigma_2)(1-\sigma_0)}{(1-\sigma_0)(\sigma_1-\sigma_2)}X_{x_1}+\frac{1-(1+\sigma_1)(1-\sigma_0)}{(1-\sigma_0)(\sigma_2-\sigma_1)}X_{x_2} \text{ и т. д.}$$

Поступила 28 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Переход от напряжений в прозрачной модели к напряжениям в действительной детали. Сб. «Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах». ОНТИ, 1935.
2. Лехницкий С. Г. Переход от напряжений, полученных оптическим методом в прозрачной модели, к напряжениям в исследуемой детали. Тр. конфер. по оптическому методу изучения напряжений НИИММ ЛГУ и НИИМех МГУ, ОНТИ, 1937.
3. Ченцов Н. Г., Озеров Г. А. Основные положения оптического метода исследования напряжений. Тр. ЦАГИ, вып. 270, 1936.
4. Моссаковский В. И. О моделировании первой основной задачи плоской теории упругости для многосвязных областей. ПММ, т. XIX, вып. 3, 1955.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.

О ДАВЛЕНИИ ПОД БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКОЙ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. Л. Рвачев

(Бердянск)

В работе [1] получено уравнение изогнутой оси бесконечной балки, лежащей на упругом полупространстве. В данной работе приводятся формулы и таблицы, по которым можно определить реакцию упругого полупространства в любой точке области его контакта с бесконечной балкой, к которой приложена сосредоточенная сила. При этом наблюдается расхождение в формулах с М. И. Горбуновым-Посадовым [2], согласно которому реактивное давление может быть представлено в виде

$$p(x,\, y) = \frac{p(y)}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{1}$$

где a — полуширина балки. Однако сравнение числовых результатов показывает, что это расхождение несущественно с точки зрения практического применения формул. В случае, когда на балку действует сосредоточенная сила P, прогиб $w(y)$ оси балки определяется формулой

$$w(y) = \frac{Pa^3}{\pi EI}\int\limits_0^\infty \frac{R(t)\cos(yt/a)\,dt}{t\,[\alpha + t^3R(t)]}\left(\alpha = \frac{a^4\pi E_0}{EJ(1-\nu_0^2)}\right) \tag{2}$$

где EI — жесткость балки, E_0 и ν_0 — постоянные, характеризующие упругие свойства основания, $R(t)$ — некоторая известная функция, α — безразмерная постоянная.

Для того чтобы найти реакцию основания, необходимо решить контактную задачу о давлении под штампом, имеющим в плане форму бесконечной полосы: $|x| \leqslant a$, $-\infty < y < +\infty$, при условии, что поверхность его основания имеет уравнение $z = w(y)$. (Как обычно, предполагается, что балка изгибается лишь в продольном направлении.)

В статье автора [3] показано, что осадке $w(x,\, y,\, 0) = b(\lambda)\cos\lambda y$ $(|x| \leqslant a)$ соответствует давление $p(x,\, y) = \varphi(\lambda,\, x)\cos\lambda y$, $(|x| < 0)$, где

$$\varphi(\lambda,\, x) = \frac{E_0 b(\lambda)}{(1-\nu_0^2)\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\delta_{2k}(a\lambda)\cos 2k\arccos\frac{x}{a} \tag{3}$$

В последней формуле $\delta_{2k}(a\lambda)$ есть некоторые функции, зависящие лишь от $a\lambda$, а именно:

$$\delta_{2k}(a\lambda) = (-1)^k\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_0^{(2\nu)}A_{2k}^{(2\nu)}\,\mathrm{Fek}_{2\nu}'(0, -{}^1/_4a^2\lambda^2)}{\mathrm{Fek}_{2\nu}(0. -{}^1/_4a^2\lambda^2)} \tag{4}$$

где $\mathrm{Fek}_m(x,\, -q)$ — известные функции Матье, $A_{2i}^{(2\nu)}$ — коэффициенты Фурье функций Матье $\mathrm{Ce}_{2\nu}(x,\, q)$, вычисляемые при $q = {}^1/_4a^2\lambda^2$.

В силу формулы (3) осадке (2) будет соответствовать давление

$$p(x,\, y) = \frac{PE_0a^3}{\pi EI(1-\nu_0^2)\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{2k}(y)\cos 2k\arccos\frac{x}{a} \tag{5}$$