ОБ УСЛОВИЯХ НА ФРОНТАХ УПРУГИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. А. Гвоздев

(Москва)

В однородной упругой среде могут распространяться независимо один от другого два типа волн. В продольных волнах смещения $\mathbf{u}$ таковы, что отсутствуют элементарные вращения ($\operatorname{rot}\mathbf{u}=0$), а в поперечных — отсутствуют изменения объема ($\operatorname{div}\mathbf{u}=0$).

В неоднородной упругой среде не существует независимых продольных и поперечных волн, в волновых движениях присутствуют одновременно и изменения объема и элементарные вращения.

Ниже рассматривается характер смещений около фронта волны (поверхности, на которой смещения претерпевают конечный разрыв), движущегося в идеально упругой неоднородной среде. Фронты с такими разрывами могут соответствовать источникам волн с зависимостью от времени типа включающейся силы (функции Хевисайда) или интеграла от нее [1].

Выделим из среды некоторый конечный объем V и примем, что свойства материала внутри V таковы, что упругие параметры Ламэ λ и μ изменяются непрерывно вместе со своими производными и плотность ρ — непрерывная функция координат.

Смещения при волновых движениях зависят от координат и времени, поэтому их можно рассматривать как векторные функции точек в четырехмерном пространстве — времени.

Фронт волны проходит весь объем V за конечное время. Поэтому весь процесс можно считать происходящим в ограниченной области пространства — времени G.

Движущемуся фронту в области G соответствует гиперповерхность Γ, на которой смещения претерпевают конечный скачок. Пусть существует только одна поверхность разрыва Γ, разделяющая G на две части G_1 и G_2.

Введем декартову систему координат x_1, x_2, x_3. Уравнения движения в этой системе координат можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

где τ_{ij} — компоненты напряжений, а u_i — смещений.

По предположению неоднородная среда подчиняется закону Гука, т. е.

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \tag{2}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Оператор, действующий на вектор-функцию $\mathbf{u}(x,t)$, получающийся подстановкой (2) в (1), обозначим L. Функция, имеющая конечный скачок внутри области, не может быть обычным решением системы дифференциальных уравнений (1). Поэтому потребуем, чтобы разрывная функция была обобщенным решением в смысле С. Л. Соболева [2].

Вектор-функция $\mathbf{u}(x,t)$ называется обобщенным решением уравнений теории упругости в области G, если для любой дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{f}(x,t)$, обращающейся в нуль вместе с первыми производными на границе:

$$\int_G(\mathbf{u}\cdot L\mathbf{f})\,d^3x\,dt=0 \tag{3}$$

Введем величины

$$\tau_{ij}^{\ *}=\mu\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \tag{4}$$

связанные с компонентами вектор-функции $\mathbf{f}$ так же, как компоненты напряжений связаны со смещениями. Все величины τ_{ij}^* обращаются в нуль на границе области G.

Оператор L — самосопряженный и выражение

$$(\mathbf{f}\cdot L\mathbf{u})-(\mathbf{u}\cdot L\mathbf{f})=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}+\frac{\partial P_t}{\partial t} \tag{5}$$

имеет вид четырехмерной дивергенции. В этом выражении

$$P_i=\sum_{j=1}^{3}(f_j\tau_{ij}-u_j\tau_{ij}^{*}) \tag{6}$$

$$P_t=-\rho\sum_{j=1}^{3}\left(f_j\frac{\partial u_j}{\partial t}-u_j\frac{\partial f_j}{\partial t}\right) \tag{7}$$

Предположим, что уравнение гиперповерхности разрыва Г можно записать в виде $t-\psi(x_1,x_2,x_3)=0$.

Разобьем интеграл (3) на интегралы по G_1 и G_2, подставим выражения из (5) и интегралы, содержащие четырехмерную дивергенцию, преобразуем к поверхностным по формуле Гаусса — Остроградского. Получим

$$\int_{G_1}(\mathbf{f}\cdot L\mathbf{u})\,d^3x\,dt+\int_{G_2}(\mathbf{f}\cdot L\mathbf{u})\,d^3x\,dt- \tag{8}$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{3}P_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-P_t\right\}\frac{dS}{\sqrt{(\nabla\psi)^2+1}}+\int_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{3}P_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-P_t\right\}\frac{dS}{\sqrt{(\nabla\psi)^2+1}}=0$$

Поверхностные интегралы распространены по разным сторонам поверхности Г. Объединяя их в один интеграл, получим

$$\int_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{3}[P_i]\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-[P_t]\right\}\frac{dS}{\sqrt{(\nabla\psi)^2+1}},$$

где $[P_i]$ и $[P_t]$ — разности соответствующих значений (скачки) величин по разные стороны Г. В дальнейшем будем опускать прямые скобки, подразумевая всюду скачки функций, если таковые имеются. Преобразуем выражения, стоящие под поверхностным интегралом, так, чтобы в них входили сами функции f_i, их производные по направлениям, лежащим в касательной плоскости к Г, и производные по нормали к поверхности Г. Члены, содержащие производные по касательным направлениям, имеют вид:

$$\int_{\Gamma}\Phi\frac{\partial f_i}{ds}\,dS=-\int_{\Gamma}f_i\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,dS \tag{9}$$

где Φ — некоторая функция, а дифференцирование производится в касательном к Г направлении. Здесь мы воспользовались интегрированием по частям и тем, что f_i обращаются в нуль на границах области G. Формулу (8) можно переписать в виде

$$\int_{G_1}(\mathbf{f}\cdot L\mathbf{u})\,d^3x\,dt+\int_{G_2}(\mathbf{f}\cdot L\mathbf{u})\,d^3x\,dt-\int_{\Gamma}\left\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{f})+\left(\mathbf{b}\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\nu}\right)\right\}\frac{dS}{\sqrt{(\nabla\psi)^2+1}}=0 \tag{10}$$

где

$$\mathbf{a}=2\mu(\nabla\psi\cdot\nabla)\,\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{u})+(\lambda+\mu)\nabla\psi\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\psi\,\mathbf{u}+(\nabla\mu\cdot\nabla\psi)\,\mathbf{u}+$$
$$+(\nabla\mu\mathbf{u})\nabla\psi+(\nabla\psi,\mathbf{u})\nabla\lambda+\mu(\nabla\psi)^2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\lambda+\mu)\left(\nabla\psi,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)\nabla\psi+\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\mathbf{b}=(\lambda+\mu)(\nabla\psi,\mathbf{u})\nabla\psi-\{\rho-\mu(\nabla\psi)^2\}\,\mathbf{u} \tag{12}$$

Из того, что (10) должно удовлетворяться при любой вектор-функции $\mathbf{f}$ с указанными выше свойствами, следует, что $L\mathbf{u}=0$ в областях G_1 и G_2, а на поверхности Г выполняются условия $\mathbf{a}=0$ и $\mathbf{b}=0$. Обобщенное решение должно быть обыкновенным решением в областях, где оно непрерывно вместе со своими производными и удовлетворять дополнительным условиям на поверхности разрыва.

Уравнение $\mathbf{b}=0$ проанализировано в работе [3]. Это — система линейных однородных уравнений относительно компонент $\mathbf{u}$. Приравнивая определитель системы нулю, получим уравнение для функции ψ, характеризующей фронт волны — поверхность разрыва:

$$\{\rho-\mu(\nabla\psi)^2\}^2\{\rho-(\lambda+2\mu)(\nabla\psi)^2\}=0 \tag{13}$$

Первая скобка дает уравнение для фронта, передвигающегося со скоростью поперечных волн, а вторая — со скоростью продольных волн. Как показано в [3], скачок смещений в поперечной волне обязательно перпендикулярен нормали к фронту волны, а в продольной волне обязательно параллелен нормали к фронту. Используя эти свойства и уравнение (13), можно получить дальнейшие следствие из уравнения $\mathbf{a} = 0$.

Рассмотрим сначала условие $\mathbf{a} = 0$ на фронте продольной волны. Умножая скалярно это уравнение на единичный вектор нормали к фронту $\mathbf{t}$, можно получить дифференциальное уравнение, выведенное в [4] и [5] и описывающее изменение интенсивноти скачка вдоль луча. Умножая условие $\mathbf{a} = 0$ векторно на $\mathbf{t}$ и производя простые преобразования, можно получить формулу для скачка $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ на фронте продольной волны:

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{P}}{\lambda+\mu} \qquad (\mathbf{P} = a^2\nabla\rho - 2\nabla\mu) \tag{14}$$

где $\mathbf{u}$ — скачок вектора смещений на фронте, a — скорость распространения продольной волны.

Аналогично можно рассмотреть условие $\mathbf{a} = 0$ на фронте поперечной волны. Умножая векторно это условие на $\mathbf{t}$, можно получить дифференциальные уравнения изменения интенсивности скачка на фронте поперечной волны вдоль луча [4], [5]. Умножив это условие скалярно на t и произведя несложные преобразования, можно прийти к формуле для скачка дивергенции на фронте поперечной волны:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{S})}{\lambda+\mu} \qquad (\mathbf{S} = b^2\nabla\rho - 2\nabla\mu) \tag{15}$$

где $\mathbf{u}$ — скачок вектора смещений на фронте поперечной волны, b — скорость поперечных волн.

По формулам (14) и (15), зная скачки смещений на фронте, можно вычислить скачки ротора или дивергенции смещений соответственно для фронтов продольных и поперечных волн. Если известны начальные значения для скачков смещений, то их можно вычислить для всех точек, через которые проходит фронт, решая обыкновенные дифференциальные уравнения, выведенные в [4] и [5].

Из формул (14) и (15) видно, что в однородной среде скачки ротора смещений на фронте продольной волны и дивергенции смещений на фронте поперечной волны равны нулю.

Формулы (14) и (15) имеют смысл и для непрерывно изменяющихся полей смещений. Если в каждой точке пространства смещения после момента t_0 прохождения фронта через эту точку изменяются по закону $f(t)$, то ошибка при использовании формул (14) и (15) имеет порядок

$$f_1(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

Такую оценку можно получить, составляя непрерывное решение из разрывных при помощи интеграла Дюамеля.

Для быстро изменяющейся функции $f(t)$ ошибками можно пренебречь вблизи фронта волны и считать, что полученные формулы связывают в этой зоне значения смещений $\mathbf{u}$ со значениями соответственно $\operatorname{div}\mathbf{u}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Этот результат можно получить способом разложения решения вблизи фронта, изложенным в статье [4].

Поступила 20 XII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Огурцов К. И., Успенский И. Н., Ермилова Н. И. Некоторые количественные исследования по распространению волн в простейших упругих средах. Сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн», № 1. Гостоптехиздат, 1957.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа. Изд. ЛГУ, 1950.
3. Левин М. Л. и Рытов С. М. О переходе к геометрическому приближению в теории упругости. Акуст. ж., вып. 2, 1956.
4. Бабич В. М., Алексеев А. С. О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1958.
5. Скуридин Г. А., Гвоздев А. А. О краевых условиях для скачков разрывных решений динамических уравнений теории упругости. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1958.