

Отсюда видно, что влияние свободной поверхности жидкости на величину R_y такое же, как и влияние твердой стенки. Для другого предельного случая скорости движения источника ($v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$) нужно в равенстве (3.1) положить $N = 0$.

На фиг. 2 показаны кривые коэффициента силы бокового сопротивления источника $a_1 = R_y : \rho Q^2 / 16\pi b^2$ в функции от $p = h / |\zeta|$ при некоторых значениях $q = |\zeta| : b$, построенные на основании равенств (3.3) и (3.1) при $N = 0$ (кривая 1 при $v \rightarrow 0$, $q = |\zeta| : b = 1$, кривая 2 при $v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, кривая 3 при $v \rightarrow \infty$, $q = 1$ кривая 4 при $v \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$). Для случая неограниченной глубины жидкости ($h = \infty$)

$$a_1 = 1 \pm \frac{1}{(1 + q^2)^{1/2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{плюс при } v \rightarrow 0 \\ \text{минус при } v \rightarrow \infty \end{array} \right) \quad (3.4)$$

Выражение (3.3) является справедливым и для определения подъемной силы A_d подводного источника при достаточно малых значениях скорости в случае его движения в канале бесконечной глубины. При этом в формуле (3.3) следует поменять местами b и $|\zeta|$, а под h понимать ширину канала (при $h = \infty$ получим значение A_d для случая движения источника вблизи одной вертикальной стенки). Точно так же равенство (2.1) позволяет определить силу бокового сопротивления источника в потоке, ограниченном двумя параллельными стенками.

Аналогичным путем может быть решена задача о движении подводного диполя вблизи вертикальной стенки.

Поступила 30 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. К о с т ю к о в А. А. О формулах для вычисления волнового сопротивления и подъемной силы тел, погруженных в жидкость. ПММ, т. XVIII, вып. 2, стр. 225—232, 1954.
2. К о с т ю к о в А. А. Сопротивление тел в жидкости при их движении вблизи вертикальной стенки. Докл. АН СССР, т. 99, № 3, стр. 349—352, 1954.

О МЕТОДЕ ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

Я. З. Клейман

(Москва)

Уравнения движения и неразрывности для многокомпонентной среды в декартовых координатах получены в работе [1]. Аналогичные уравнения могут быть написаны в криволинейных координатах.

Ограничимся рассмотрением плоских, цилиндрических и сферических волн¹. Число компонент смеси равно N .

Пользуясь системами декартовых, цилиндрических и сферических координат, имеем, как и обычно, общие для рассматриваемых трех случаев уравнения движения и неразрывности (пренебрегая влиянием массовых сил):

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_n} \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial \rho_n}{\partial x} + \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{s}{x} \rho_n v_n = 0 \quad (n = \{1, \dots, N\}) \quad (2)$$

Здесь p — давление, v_n , ρ_n , ρ_n — скорость, истинная и приведенная² плотности n -й компоненты, K_{jn} — функция взаимодействия n -й компоненты с j -й компонентой.

¹ Случай плоских волн в применении к двухкомпонентной среде рассматривался в работе [1].

² Приведенной плотностью n -й компоненты в некотором объеме смеси называется такая плотность, которую имела бы n -я компонента, если бы она одна занимала весь этот объем.

Для плоских волн $s = 0$, для цилиндрических и сферических волн соответственно $s = 1$ и $s = 2$. В случаях осевой и центральной симметрии под x понимаем величину радиуса-вектора в соответствующей системе координат.

Систему (1), (2) дополняем уравнением

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\rho_n^{\circ}} = 1 \quad (3)$$

вытекающим из того, что величина ρ_n / ρ_n° есть часть единицы объема среды, занимаемая n -й компонентой, и зависимостями

$$p = f_n(\rho_n^{\circ}, p_0^{\circ}, \rho_{0n}^{\circ}) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (4)$$

где $p_0^{\circ}, \rho_{0n}^{\circ}$ — некоторые начальные значения давления и истинной плотности n -й компоненты.

Таким образом, имеем замкнутую систему $3N + 1$ уравнений.

Выведем уравнения характеристик этой системы. Для параметров, заданных вдоль характеристик, можем написать

$$dv_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} dt + \frac{\partial v_n}{\partial x} dx, \quad d\rho_n = \frac{\partial \rho_n}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho_n}{\partial x} dx \quad (n = 1, \dots, N)$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{dv_n}{dt} - \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \frac{d\rho_n}{dt} - \frac{\partial \rho_n}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (n = 1, \dots, N)$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial x} (v_n - x_t) + \frac{1}{\rho_n^{\circ}} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_n} \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) &= 0 \quad (n = 1, \dots, N) \\ \frac{d\rho_n}{dt} + \frac{\partial \rho_n}{\partial x} (v_n - x_t) + \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{s}{x} \rho_n v_n &= 0 \end{aligned}$$

где

$$x_t = \frac{dx}{dt}$$

Исключая из этих уравнений $\frac{\partial v_n}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial x} = \frac{1}{(v_n - x_t)^2} \left[\frac{\rho_n}{\rho_n^{\circ}} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_n \frac{dv_n}{dt} - (v_n - x_t) \left(\frac{d\rho_n}{dt} + \frac{s}{x} \rho_n v_n \right) - \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) \right] \quad (5)$$

Дифференцируя (3) частным образом¹ по x и учитывая соотношение

$$\frac{\partial \rho_n^{\circ}}{\partial x} = \frac{1}{a_n^2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

где $a_n^2 = dp / d\rho_n^{\circ}$ является известной функцией, если задана зависимость (4), будем иметь

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\rho_n^{\circ}} \frac{\partial \rho_n}{\partial x} - \frac{\rho_n}{\rho_n^{\circ 2} a_n^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

¹ Заметим, что равенство (3) можно дифференцировать либо частным образом по t (в данной точке пространства), либо частным образом по координатам (в данный момент времени). Дифференцирование в полных производных по t не имеет в общем случае физического смысла, поскольку частицы различных компонент, которые в данный момент находились в одной точке пространства, могут в последующие моменты оказаться в разных точках.

Подставляя сюда (5), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial x} \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\rho_n^{\circ 2}} \left[\frac{1}{(v_n - x_t)^2} - \frac{1}{a_n^2} \right] = \\ & = - \sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n^{\circ} (v_n - x_t)^2} \left[\rho_n \frac{dv_n}{dt} - (v_n - x_t) \left(\frac{d\rho_n}{dt} + \frac{s}{x} \rho_n v_n \right) - \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) \right] \end{aligned}$$

Уравнения характеристик получим, приравняв нулю коэффициент при $\partial p / \partial x$ и правую часть в последнем уравнении:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\rho_n^{\circ 2}} \left[\frac{1}{(v_n - x_t)^2} - \frac{1}{a_n^2} \right] = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n^{\circ} (v_n - x_t)^2} \left[\rho_n \frac{dv_n}{dt} - (v_n - x_t) \left(\frac{d\rho_n}{dt} + \frac{s}{x} \rho_n v_n \right) - \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) \right] = 0 \quad (7)$$

Можно показать, что уравнение (6) совпадает с уравнением, служащим для определения скорости перемещения в смеси волн слабого разрыва. Таким образом, аналогично случаю однокомпонентной среды характеристические многообразия системы уравнений (1) — (4) и перемещающиеся поверхности слабого разрыва — это одно и то же.

Исследование уравнения (6) показывает, что количество действительных характеристик при данном числе компонент смеси может быть различным (от двух до $2N$) в зависимости от параметров среды. При этом некоторые характеристики могут оказаться как мнимыми, так и совпадающими действительными. Таким образом, для решения задач о нестационарных движениях смесей в отличие от однокомпонентной среды применение обычного метода характеристик возможно не всегда. Для численного решения задач необходимо либо дополнять уравнения характеристик исходными уравнениями, написанными в конечных разностях, либо пользоваться только разностными уравнениями исходной системы.

Замежим, что при учете массовых сил F_n ($n = 1, \dots, N$) в случае одномерного движения среды по направлению действия этих сил в левой части уравнения (1) добавляется слагаемое $-F_n$, и тогда уравнение (7) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n^{\circ} (v_n - x_t)^2} \left[\rho_n \frac{dv_n}{dt} - (v_n - x_t) \frac{d\rho_n}{dt} - \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) - \rho_n F_n \right] = 0$$

Рассмотрим случай двухкомпонентной среды. Тогда уравнения характеристик (6) и (7) запишем в виде

$$\frac{\rho_1}{\rho_1^{\circ 2}} (v_2 - x_t)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_2^{\circ 2}} (v_1 - x_t)^2 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_1^{\circ 2} a_1^2} + \frac{\rho_2}{\rho_2^{\circ 2} a_2^2} \right) (v_1 - x_t)^2 (v_2 - x_t)^2 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\rho_2 \rho_1^{\circ} (v_1 - x_t)^2}{\rho_1 \rho_2^{\circ} (v_2 - x_t)^2} = - \frac{b_1}{b_2} \quad (9)$$

Здесь

$$b_i = (v_i - x_t) \left(\frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{sv_i}{x} \right) - \frac{dv_i}{dt} \pm \frac{K (v_2 - v_1)}{\rho_i} \quad (i = 1, 2)$$

где знак плюс соответствует $i = 1$, а знак минус соответствует $i = 2$

Вводя обозначения

$$z = x_t - v_1, \quad y = x_t - v_2 \quad (10)$$

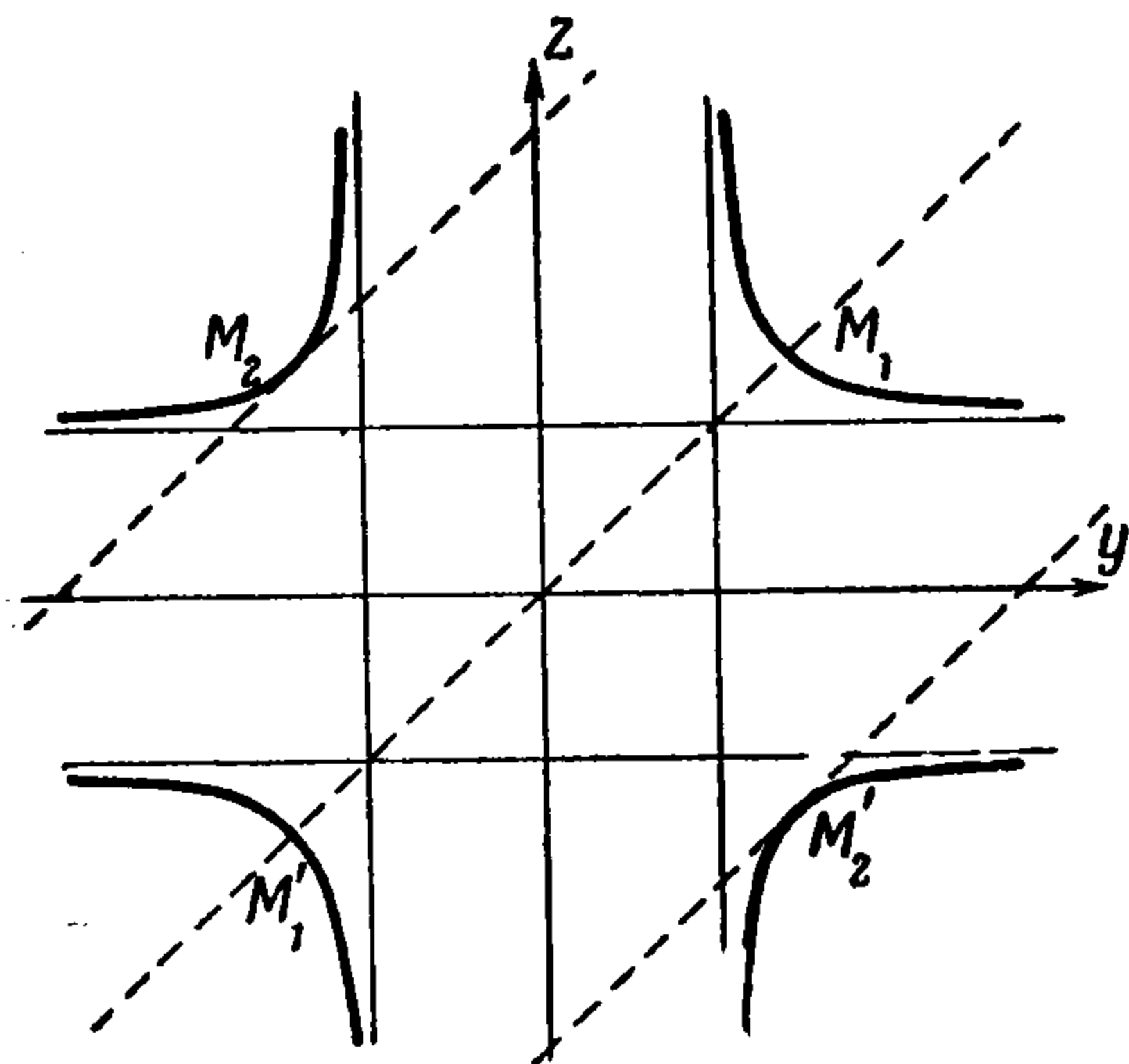
представим уравнение (8) в виде

$$z = \pm \sqrt{\frac{A a_1^2 y^2}{(A + a_1^2 / a_2^2) y^2 - a_1^2}} \quad \left(A = \frac{\rho_1 \rho_2^{\circ 2}}{\rho_2 \rho_1^{\circ 2}} \right) \quad (11)$$

Из (10) имеем

$$z = y + \Delta v \quad (\Delta v = v_2 - v_1) \quad (12)$$

Графики функций (11) и (12) представлены на фигуре. Точки пересечения кривых (11) с прямыми (12) дают значения y и z , по которым определяются



величины x_t , соответствующие действительным характеристикам. Видим, что с ростом величины $|\Delta v|$ от нуля до некоторого критического значения $|\Delta v_k|$, соответствующего точкам M_2 и M_2' , имеют место две различные действительные характеристики, а при $|\Delta v| > |\Delta v_k|$ — четыре различные действительные характеристики. В случае $|\Delta v| = |\Delta v_k|$ две действительные характеристики (из четырех) совпадают.

Таким образом, применение обычного метода характеристик в случае двухкомпонентной среды возможно при значениях $|\Delta v| > |\Delta v_k|$.

Покажем, однако, что $|\Delta v_k|$ является весьма значительной величиной (порядка скорости распространения возмущений в двухкомпонентной среде) и, следовательно, во многих случаях $|\Delta v| < |\Delta v_k|$.

Действительно, определяя из (11) производную dz/dy и имея в виду, что в точках M_2 и M_2' в силу (12) $dz/dy = 1$, получим для данных точек

$$y_k = (x_t - v_2)_k = \pm a_1 \sqrt{\frac{A^{1/3} + 1}{A + a_1^2 / a_2^2}}$$

$$z_k = (x_t - v_1)_k = \mp a_1 A^{1/3} \sqrt{\frac{A^{1/3} + 1}{A + a_1^2 / a_2^2}}$$

Из этих выражений можно получить

$$\Delta v_k = \pm B a_*$$

где

$$B = \sqrt{\frac{(A^{1/3} + 1)^3}{A + 1}}, \quad a_* = a_1 \sqrt{\frac{A + 1}{A + a_1^2 / a_2^2}}$$

Величина a_* представляет скорость распространения волны слабого разрыва в ранее неподвижной двухкомпонентной среде (в случае $v_1 = v_2 = v_0$ из (8) получим $x_t - v_0 = \pm a_*$). Легко проверить, что коэффициент B изменяется в пределах

$$1 \leq B \leq 2$$

если

$$0 \leq \rho_1 / \rho_2 \leq 1$$

$$\infty \geq \rho_1 / \rho_2 \geq 1$$

Следовательно, для оценки значений $|\Delta v_k|$ имеем

$$a_* < |\Delta v_k| < 2a_*$$

Таким образом, для случая двухкомпонентной среды во многих задачах, представляющих в настоящее время практический интерес, число действительных характеристик равно двум, т. е. обычный метод характеристик неприменим.

Поступила 10 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.