

О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ ИСТОЧНИКА И ДИПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

А. А. Костюков

(Одесса)

Приводятся значения подъемной силы (и силы бокового сопротивления), действующей на гидромеханические особенности при их движении с достаточно малыми и большими скоростями под свободной поверхностью идеальной жидкости, ограниченной стенками.

§ 1. Принимаем обычные допущения теории волн малой амплитуды. Расположим оси координат x и y на свободной поверхности жидкости в состоянии ее покоя, а ось z направим вверх. Систему координат считаем неизменно связанной с особенностью (источником, диполем), движущейся под поверхностью жидкости равномерно со скоростью v в направлении оси x . Источник (диполь) располагаем в точке $(0, 0, \zeta)$. Глубину жидкости обозначим через h .

Формулы для определения гидродинамической подъемной силы A_d , испытываемой источником и диполем, можно записать в следующем виде [1]:

для источника

$$A_d = -\frac{\rho Q^2}{4\pi} \left[\frac{1}{4(\zeta + h)^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \chi(\lambda, \theta) \lambda d\lambda \right] \quad (1.1)$$

для диполя

$$A_d = -\frac{\rho m^2}{4\pi} \left[\frac{3}{16(\zeta + h)^4} - \frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} \chi(\lambda, \theta) \lambda^3 d\lambda \right] \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем ρ — массовая плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, Q — интенсивность источника, m — момент диполя в направлении оси x ,

$$\chi(\lambda, \theta) = \frac{e^{-\lambda h} (v + \lambda \cos^2 \theta) \operatorname{sh} 2\lambda (\zeta + h)}{(v \operatorname{th} \lambda h - \lambda \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \lambda h} \quad \left(v = \frac{g}{v^2} \right) \quad (1.3)$$

В формулах (1.1) и (1.2) под знаком интеграла подразумевается его главное значение в смысле Коши.

Если в (1.2) подставить вместо m выражение $2\pi v r^3$, то получим приближенную формулу для гидродинамической подъемной силы, приложенной к сфере радиуса r , центр которой находится на глубине ζ под свободной поверхностью жидкости. Полная подъемная сила A , действующая на сферу, равна:

$$A = \frac{4}{3} \pi \rho g r^3 + A_d \quad (1.4)$$

§ 2. Найдем приближенные выражения для A_d при достаточно малых значениях скорости v . Устремляя в формулах (1.1) и (1.2) $v \rightarrow \infty$ ($v \rightarrow 0$) и выполняя интегрирование, находим при малых скоростях движения асимптотические выражения:

для источника

$$A_d \sim \frac{\rho Q^2}{16\pi\zeta^2} \left[1 - 4p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(p^2 k^2 - 1)^2} \right] \quad (2.1)$$

диполя

$$A_d \sim \frac{3\rho m^2}{64\pi\zeta^4} \left[1 - 8p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(p^2 k^2 + 1)}{(p^2 k^2 - 1)^4} \right] \quad \left(p = \frac{h}{|\zeta|} \right) \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что при $v \rightarrow 0$ влияние свободной поверхности жидкости на величину A_d такое же, как и влияние неподвижной твердой стенки, расположенной на уровне спокойной поверхности жидкости.

Устремим теперь $v \rightarrow 0$ в равенствах (1.1) и (1.2). Тогда получим при достаточно больших значениях скорости v следующие асимптотические выражения:

для источника

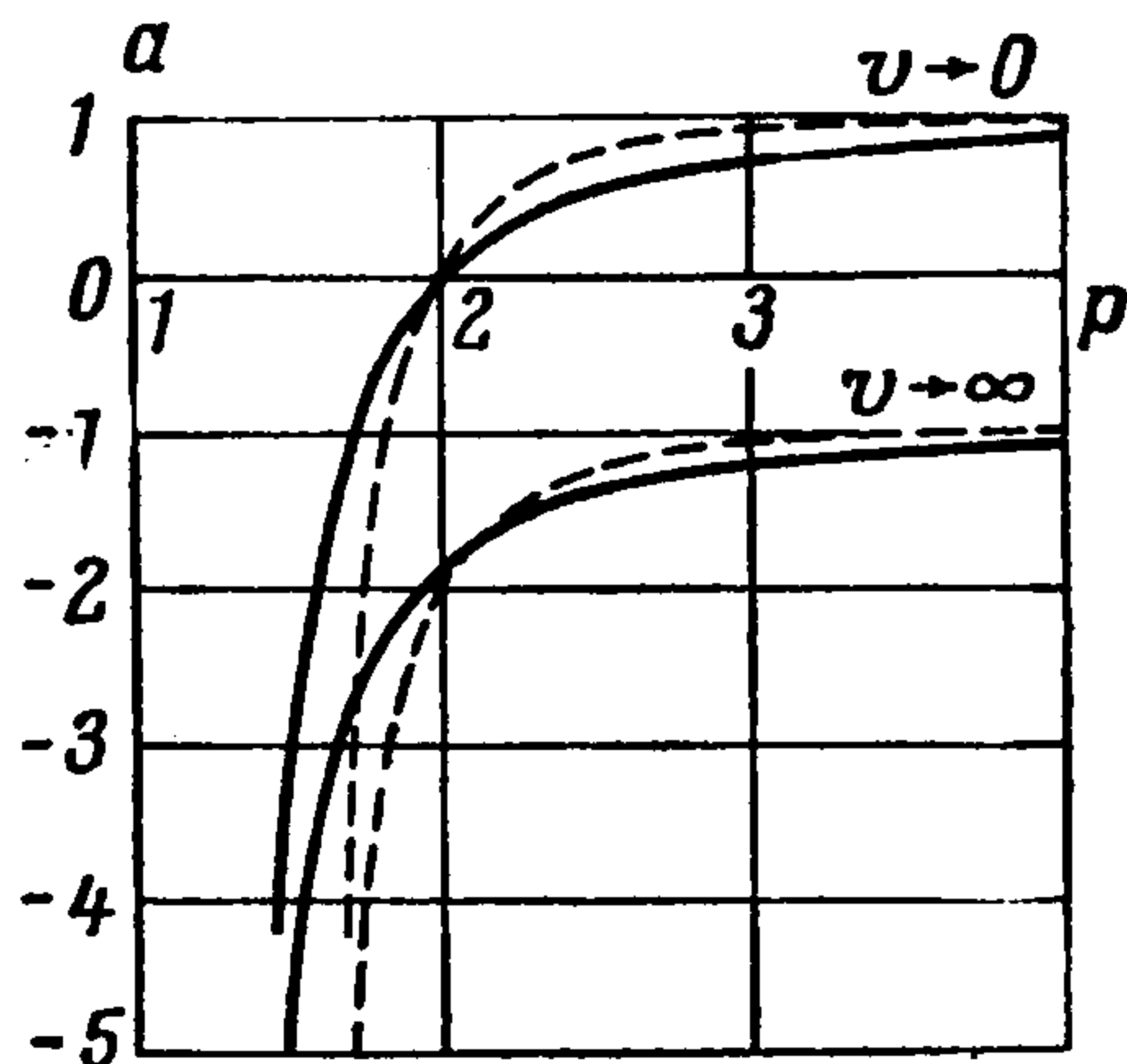
$$A_d \sim \frac{\rho Q^2}{16\pi\zeta^2} \left[-1 + 4p \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(p^2 k^2 - 1)^2} \right] \quad (2.3)$$

диполя

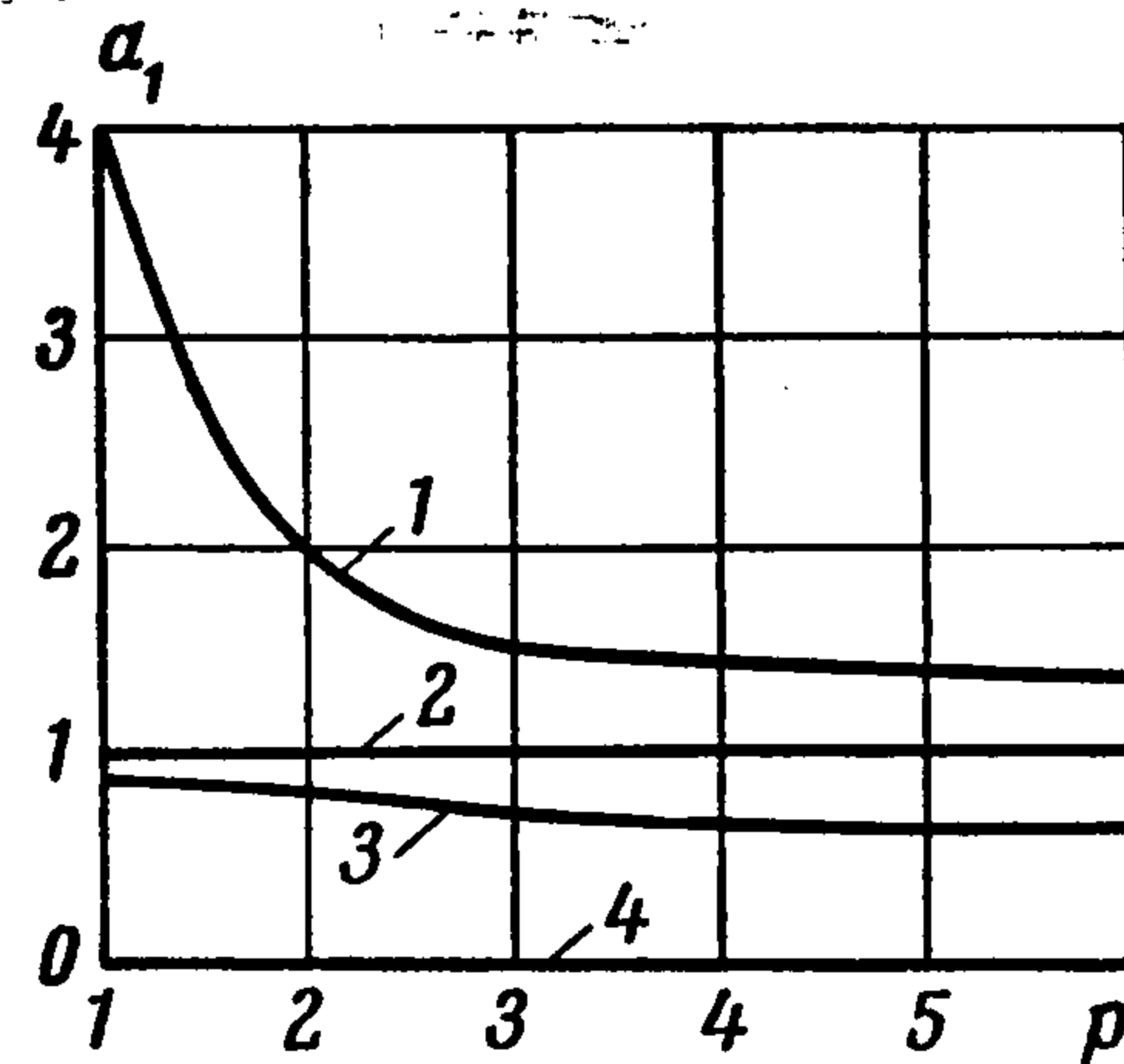
$$A_d \sim \frac{3\rho m^2}{64\pi\zeta^4} \left[-1 + 8p \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(p^2 k^2 + 1)}{(p^2 k^2 - 1)^4} \right] \quad (2.4)$$

Для рассмотренного случая $v \rightarrow 0$ поле скоростей, индуцированных движущейся особенностью, асимптотически стремится к полю скоростей, получаемому при условии равенства нулю потенциала скоростей на свободной поверхности жидкости.

Ряды формул (2.1)—(2.4) сходятся достаточно быстро ($p > 1$). На фиг. 1 показаны кривые коэффициента подъемной силы $a = A_d : \rho Q^2 / 16\pi\zeta^2$ источника (сплошные линии) и диполя $a \approx A_d : 3\rho m^2 / 64\pi\zeta^4$ (курсивные линии) в функции от $p = h / |\zeta|$, построенные на основании формул (2.1)—(2.4). Эта фигура наглядно показывает при зафиксированном значении ζ влияние глубины воды h на величину подъемной силы особенности при достаточно малых и больших скоростях движения. Если $p > 4$, то можно полагать $a \approx \pm 1$, т. е. таким же, как и для случая глубокой воды.



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 3. Рассмотрим теперь движение подводного источника вблизи вертикальной стенки, расположенной параллельно оси x . Обозначим через b расстояние от источника до вертикальной стенки. Положительное направление оси y считаем от источника к стенке. Согласно формулам, приведенным в работе [2], можно получить выражение для бокового сопротивления источника

$$R_y = \frac{\rho Q^2}{16\pi b^2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+q^2)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{2}{(1+p^2 q^2 k^2)^{3/2}} - \frac{1}{[1+q^2(pk+1)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[1+q^2(pk-1)^2]^{3/2}} \right] + N(h, b, \zeta, v) \right\} \quad (3.1)$$

где

$$N = \frac{8vb^2}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} (1 + \text{th } \lambda h) \text{ch}^2 \lambda (\zeta + h)}{(v \text{th } \lambda h - \lambda \cos^2 \theta) \text{ch } \lambda h} \sin(2b\lambda \sin \theta) \sin \theta \lambda d\lambda \quad (3.2)$$

$q = |\zeta|/b$, p — прежнее обозначение.

Для случая малых скоростей движения источника из формулы (3.1) находим

$$R_y \sim \frac{\rho Q^2}{16\pi b^2} \left\{ 1 + \frac{1}{(1+q^2)^{3/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(1+p^2 q^2 k^2)^{3/2}} + \frac{1}{[1+q^2(pk+1)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[1+q^2(pk-1)^2]^{3/2}} \right] \right\} \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что влияние свободной поверхности жидкости на величину R_y такое же, как и влияние твердой стенки. Для другого предельного случая скорости движения источника ($v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$) нужно в равенстве (3.1) положить $N = 0$.

На фиг. 2 показаны кривые коэффициента силы бокового сопротивления источника $a_1 = R_y : \rho Q^2 / 16\pi b^2$ в функции от $p = h / |\zeta|$ при некоторых значениях $q = |\zeta| : b$, построенные на основании равенств (3.3) и (3.1) при $N = 0$ (кривая 1 при $v \rightarrow 0$, $q = |\zeta| : b = 1$, кривая 2 при $v \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, кривая 3 при $v \rightarrow \infty$, $q = 1$ кривая 4 при $v \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$). Для случая неограниченной глубины жидкости ($h = \infty$)

$$a_1 = 1 \pm \frac{1}{(1 + q^2)^{1/2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{плюс при } v \rightarrow 0 \\ \text{минус при } v \rightarrow \infty \end{array} \right) \quad (3.4)$$

Выражение (3.3) является справедливым и для определения подъемной силы A_d подводного источника при достаточно малых значениях скорости в случае его движения в канале бесконечной глубины. При этом в формуле (3.3) следует поменять местами b и $|\zeta|$, а под h понимать ширину канала (при $h = \infty$ получим значение A_d для случая движения источника вблизи одной вертикальной стенки). Точно так же равенство (2.1) позволяет определить силу бокового сопротивления источника в потоке, ограниченном двумя параллельными стенками.

Аналогичным путем может быть решена задача о движении подводного диполя вблизи вертикальной стенки.

Поступила 30 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. К о с т ю к о в А. А. О формулах для вычисления волнового сопротивления и подъемной силы тел, погруженных в жидкость. ПММ, т. XVIII, вып. 2, стр. 225—232, 1954.
2. К о с т ю к о в А. А. Сопротивление тел в жидкости при их движении вблизи вертикальной стенки. Докл. АН СССР, т. 99, № 3, стр. 349—352, 1954.

О МЕТОДЕ ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

Я. З. Клейман

(Москва)

Уравнения движения и неразрывности для многокомпонентной среды в декартовых координатах получены в работе [1]. Аналогичные уравнения могут быть написаны в криволинейных координатах.

Ограничимся рассмотрением плоских, цилиндрических и сферических волн¹. Число компонент смеси равно N .

Пользуясь системами декартовых, цилиндрических и сферических координат, имеем, как и обычно, общие для рассматриваемых трех случаев уравнения движения и неразрывности (пренебрегая влиянием массовых сил):

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_n} \sum_{j=1}^N K_{jn} (v_j - v_n) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial \rho_n}{\partial x} + \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{s}{x} \rho_n v_n = 0 \quad (n = \{1, \dots, N\}) \quad (2)$$

Здесь p — давление, v_n , ρ_n , ρ_n — скорость, истинная и приведенная² плотности n -й компоненты, K_{jn} — функция взаимодействия n -й компоненты с j -й компонентой.

¹ Случай плоских волн в применении к двухкомпонентной среде рассматривался в работе [1].

² Приведенной плотностью n -й компоненты в некотором объеме смеси называется такая плотность, которую имела бы n -я компонента, если бы она одна занимала весь этот объем.