# ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

**Г. И. Назаров**
(Томск)

Уравнение для стоксовой функции тока $\psi$ в цилиндрической системе координат $x$, $y$, $\theta$ при установившемся потенциальном осесимметричном течении несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \qquad (y>0) \tag{1}$$

Полагая $\psi=\sqrt{y}\,\psi^0$, получим

$$\frac{\partial^2\psi^0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi^0}{\partial y^2}-\frac{3\psi^0}{4y^2}=0 \tag{2}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде [1]

$$\psi^0=\Phi_0(x,\ y)+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(x,\ y)\,f_k(y) \tag{3}$$

где $\Phi_0$, $\Phi_k$ — произвольные гармонические функции. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$-\frac{3}{4y^2}\Phi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}f_k'+\Phi_k\left(f_k''-\frac{3}{4y^2}f_k\right)\right]=0 \tag{4}$$

При этом на функции $f_k$ и $\Phi_k$ наложим условия

$$f_k''-\frac{3f_k}{4y^2}=f_{k+1}',\qquad 2\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}=-\Phi_{k-1} \tag{5}$$

Тогда (4) принимает вид:

$$-\left(\frac{3}{4y^2}+f_1'\right)\Phi_0+\Phi_k f_{k+1}'=0,\qquad \lim_{k\to\infty}\Phi_k f_{k+1}'=0 \tag{6}$$

Следовательно,

$$f_1=-\frac{3}{4}\int_{\infty}^{y}\frac{dy}{y^2}=\frac{3}{4y},\qquad f_{k+1}=\frac{df_k}{dy}-\frac{3}{4}\int_{\infty}^{y}\frac{f_k}{y^2}dy,\qquad \Phi_k=-\frac{1}{2}\int_{\infty}^{y}\Phi_{k-1}\,dy \tag{7}$$

Легко получить формулу

$$f_k=(-1)^k\frac{k!\,C_k}{y^k},\qquad C_k=\frac{C_{k-1}\,(k+{}^1\!/_2)\,(k-{}^3\!/_2)}{k^2},\qquad C_0=1 \tag{8}$$

Введем комплексный потенциал $W(z)=\varphi_0(x,\ y)+i\Phi_0(x,\ y)$ $(z=x+iy)$. Тогда

$$\Phi_0=\operatorname{Im}W(z),\qquad \Phi_k=\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,2^k}\operatorname{Im}\int_0^z(z-\zeta)^{k-1}W(\zeta)\,d\zeta \tag{9}$$

$$\psi^0=\operatorname{Im}\left\{W(z)-\int_0^z W(\zeta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-\zeta)^{k-1}}{2^k(k-1)!}f_k(y)\,d\zeta\right\} \tag{10}$$

Учитывая, что $C_k$ и (8) изменяются так же, как в гипергеометрическом ряде, легко получим

$$\psi^0=\operatorname{Im}\left\{W(z)-\int_0^z W(\zeta)\frac{d}{d\zeta}H\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{z-\zeta}{2y}\right)d\zeta\right\} \tag{11}$$

Полагая $W(0)=0$, имеем решение для (1) в виде

$$\psi=\sqrt{y}\operatorname{Im}\left\{\int_0^z\frac{dW(\zeta)}{d\zeta}H\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{z-\zeta}{2y}\right)d\zeta\right\} \tag{12}$$

где $W(\zeta)$ — произвольная функция. Осесимметричная задача несжимаемой жидкости приведена к комплексному потенциалу плоской задачи. Можно получить более общее решение, если в (7) рассматривать неопределенные интегралы.

Поступила 23 XII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизес Р., Шиффер М. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости, Сб. ст. «Проблемы механики», ИА, М, стр. 489—518, 1955.