ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ В ГАЗЕ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

В. П. Коробейников и Е. В. Рязанов

(Москва)

Постановка и точное решение автомодельной задачи о сильном точечном взрыве в газе, начальная плотность которого постоянна или меняется по закону $\rho_1 = Ar^{-\omega}$, даны в работах Л. И. Седова [1, 2, 3]. В дальнейшем будем рассматривать общий случай переменной начальной плотности. Если ввести безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \qquad f(\lambda) = \frac{v}{v_2}, \qquad g(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_2}, \qquad h(\lambda) = \frac{p}{p_2}$$

где v — скорость, ρ — плотность, p — давление, $r_2(t)$ — радиус ударной волны, $v_2 = v(r_2, t)$, $\rho_2 = \rho(r_2, t)$, $p_2 = p(r_2, t)$, то решение задачи сводится к интегрированию системы уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\lambda} &= \frac{1}{2}\left[2\gamma(\gamma-1)(\nu-1)\frac{f}{\lambda} + (\nu-\omega)(\gamma+1)\left(f - \frac{\gamma+1}{2}\lambda\right) f \frac{g}{h} - \nu(\gamma^2-1)\right] \times \\
&\quad \times \left[2\left(f - \frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)^2 \frac{g}{h} - \gamma(\gamma-1)\right]^{-1} \\
\frac{dg}{d\lambda} &= -g\left[\frac{df}{d\lambda} + (\nu-1)\frac{f}{\lambda} - \frac{\gamma+1}{2}\omega\right]\left(f - \frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)^{-1} \qquad (1)\\
\frac{dh}{d\lambda} &= h\left\{\frac{\gamma+1}{2}\nu - \gamma\left[\frac{df}{d\lambda} + (\nu-1)\frac{f}{\lambda}\right]\right\}\left(f - \frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Здесь $\gamma > 1$ — отношение теплоемкостей, $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Граничные условия задачи имеют вид:

$$f(1) = g(1) = h(1) = 1, \qquad f(0) = 0 \qquad (2)$$

Система (1) имеет два первых интеграла (см. [3]), которые с учетом условий (2) в принятых переменных записываются так:

$$\frac{g}{h} = \gamma f^{-2}\left(\frac{f}{\lambda} - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{f}{\lambda}\right)^{-1} \qquad (3)$$

$$g^{\gamma-1} = \left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{f}{\lambda}\right)\right]^{1-\frac{\omega\gamma}{\nu}} h^{1-\frac{\omega}{\nu}} \lambda^{\nu-\omega\gamma} \qquad (4)$$

Здесь (3) — интеграл энергии, а (4) — интеграл адиабатичности. Система (1) интегрируется, и ее решение, удовлетворяющее граничным условиям (2), представляется формулами

$$\begin{aligned}
\lambda(F) &= F^{-\delta}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{-\alpha_2} \times \\
&\quad \times \left[\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)-(\gamma+1)\omega}\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{\nu+2-\omega}{\gamma\nu-\nu+2} - F\right)\right]^{-\alpha_1} \\
g(F) &= F^{\omega\delta}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\alpha_3+\omega\alpha_2}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2} - F\right)\right]^{\alpha_5} \times \\
&\quad \times \left[\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)-(\gamma+1)\omega}\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{\nu+2-\omega}{\gamma\nu-\nu+2} - F\right)\right]^{\alpha_4+\omega\alpha_1} \qquad (5)\\
h(F) &= F^{\nu\delta}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2} - F\right)\right]^{1+\alpha_5} \times \\
&\quad \times \left[\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)-(\gamma+1)\omega}\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{\nu+2-\omega}{\gamma\nu-\nu+2} - F\right)\right]^{\alpha_4+(\omega-2)\alpha_1}
\end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{2}{\nu+2-\omega}, \qquad F = \frac{f}{\lambda} \qquad (6)$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma\nu-\nu+2} - \delta - \alpha_2, \qquad \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma-1)+\nu-\omega\gamma} \qquad (7)$$

$$\alpha_3 = \frac{\nu-\omega}{2(\gamma-1)+\nu-\omega\gamma}, \qquad \alpha_4 = \frac{(\nu-\omega)(\nu+2-\omega)}{2\nu-\nu\gamma-\omega}\alpha_1, \qquad \alpha_5 = \frac{\omega(\gamma+1)-2\nu}{2\nu-\nu\gamma-\omega}$$

В решении Л. И. Седова [3] вместо F взят параметр V, связанный с F зависимостью

$$V = \frac{4}{(\nu + 2 - \omega)(\gamma + 1)} F$$

Если решение продолжимо до центра симметрии [3], то параметрическое переменное F меняется в пределах

$$1 \geqslant F \geqslant \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$$

В дальнейшем будем рассматривать только этот случай. Решение (5) имеет особенности по параметру γ там, где обращаются в ∞ либо коэффициенты правых частей, либо показатели α_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$, определяемые формулами (7).

Эти случаи будем называть особыми по γ. Во всех этих случаях при вычислении функций $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ решением системы (1), записанным в форме (5)—(7), пользоваться нельзя. С этой целью необходимо получить новые представления решения задачи для указанных особых случаев.

Решение задачи для первого случая, соответствующего значению $\omega = \omega_1$, определяемому по формуле

$$\omega_1 = \frac{3\nu - 2 + \gamma(2 - \nu)}{\gamma + 1}$$

было исследовано ранее [3] и записывается так:

$$f = \lambda, \qquad g = \lambda^{\nu - 2}, \qquad h = \lambda^{\nu} \tag{8}$$

Ниже устанавливается вид решения в двух других случаях, когда

$$\omega \to \omega_2 = \frac{2(\gamma - 1) + \nu}{\gamma} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \to \infty)$$

и когда

$$\omega \to \omega_3 = \nu(2 - \gamma) \qquad (\alpha_4, \alpha_5 \to \infty)$$

Вид решения в этих случаях можно получить либо предельным переходом в решении (5)—(7) при $\omega \to \omega_j$ $(j = 2, 3)$, либо непосредственно из системы дифференциальных уравнений (1), подставляя в них $\omega = \omega_j$. Более просто это делается вторым путем.

Систему (1) при помощи интеграла энергии (3) можно привести к виду

$$\frac{df}{d\lambda} = -\frac{f}{\lambda}\left[\frac{\gamma(\gamma - 1)(\nu - 1)}{\gamma + 1}\left(\frac{f}{\lambda}\right)^2 + \frac{\omega\gamma + \nu - 2\nu\gamma}{2}\frac{f}{\lambda} + \frac{(\nu - \omega)(\gamma + 1)}{4}\right] \times$$
$$\times \left[\gamma\left(\frac{f}{\lambda}\right)^2 - (\gamma + 1)\frac{f}{\lambda} + \frac{\gamma + 1}{2}\right]^{-1} \tag{9}$$

$$\frac{dg}{d\lambda} = -g\left[\frac{df}{d\lambda} + (\nu - 1)\frac{f}{\lambda} - \frac{\gamma + 1}{2}\omega\right]\left(f - \frac{\gamma + 1}{2}\lambda\right)^{-1} \tag{10}$$

В уравнениях (9) и (10) можно сделать замену переменных $f = \lambda F$ [формула (6)] после этого, полагая $\omega = \omega_2$, интегрируем уравнение (9). Если учесть граничные условия (2), то зависимость $\lambda(F)$ будет выглядеть так:

$$\lambda(F) = F^{-2\gamma\delta_2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(F - \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)\right]^{(\gamma - 1)\delta_2} \exp\left[-(\gamma + 1)\delta_2 \frac{1 - F}{F - (\gamma + 1)/2\gamma}\right] \tag{11}$$
$$\delta_2 = \frac{1}{\gamma\nu - \nu + 2}$$

Далее при помощи интегралов (3) и (4) находим

$$g(F) = F^{2(2\gamma - 2 + \nu)\delta_2}\left[\frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{\gamma + 1}{2} - F\right)\right]^{[\nu - 2(\gamma + 1)]\delta_2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(F - \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)\right]^{(4 - \nu - 2\gamma)\delta_2} \times$$
$$\times \exp\left[2(\gamma + 1)\delta_2 \frac{1 - F}{F - (\gamma + 1)/2\gamma}\right] \tag{12}$$

$$h(F) = F^{2\nu\gamma\delta_2}\left[\frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{\gamma + 1}{2} - F\right)\right]^{\gamma(\nu - 2)\delta_2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(F - \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)\right]^{-\gamma\nu\delta_2} \tag{13}$$

Формулы (6), (11), (12), (13) дают решение задачи во втором особом случае.

Рассмотрим теперь третий особый случай $\omega = \omega_3 = \nu(2-\gamma)$.

Из уравнения (10) с учетом уравнений (6) и (9) и при условии, что $\omega = \omega_3$, легко интегрированием получить вид функции $g(F)$, после чего, используя (3) и (4), определим $\lambda(F)$ и $h(F)$. Решение будет иметь вид:

$$\lambda(F) = F^{-2\delta_2}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)\right]^{-\gamma\delta_2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\delta_2}$$

$$g(F) = F^{2\nu(2-\gamma)\delta_2}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)\right]^{(\nu\gamma-\nu-2)\delta_2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\nu(\gamma-1)\delta_2}\times$$

$$\times\exp\left[-\nu\gamma(\gamma+1)\delta_2\frac{1-F}{{}^1/_2(\gamma+1)-F}\right] \tag{14}$$

$$h(F) = F^{2\nu\delta_2}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)\right]^{2(\nu\gamma-\nu-\gamma)\delta_2}\exp\left[-\nu\gamma(\gamma+1)\delta_2\frac{1-F}{{}^1/_2(\gamma+1)-F}\right]$$

Зависимость радиуса ударной волны и ее скорости от времени в силу автомодельности имеет вид [2,3]:

$$r_2(t) = \left(\frac{E_0}{\alpha A}\right)^{{}^1/_2\delta} t^{\delta}, \qquad c(t) = \delta\frac{r_2(t)}{t} \tag{15}$$

Здесь E_0 — энергия взрыва, α есть функция от γ, ν, ω, определяемая из интегрального закона сохранения энергии

$$E_0 = \sigma_\nu\int_0^{r_2}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)r^{\nu-1}\,dr \tag{16}$$

который в принятых безразмерных переменных записывается так:

$$\alpha(\gamma,\nu,\omega) = \frac{2\sigma_\nu\delta^2}{(\gamma^2-1)}\int_0^1(h+gf^2)\,\lambda^{\nu-1}\,d\lambda \tag{17}$$

$$\sigma_\nu = 2\pi(\nu-1)+(\nu-2)(\nu-3)$$

Очевидно, что для первого особого случая, которому соответствует решение (8) зависимость $\alpha(\gamma,\nu,\omega)$ имеет вид:

$$\alpha(\gamma,\nu,\omega_1) = \frac{2\sigma_\nu}{\nu}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\gamma\nu-\nu+2}\right)^2$$

Величины параметров фронта ударной волны находятся из условий на сильной ударной волне

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1}c, \qquad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \qquad p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 c^2 \tag{18}$$

Формулы (11), (12), (13), (6), (14), (15), (17) и (18) дают полное решение задачи в случаях $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$.

Как уже отмечалось выше, каждое особое решение можно получить соответствующим предельным переходом. Мы покажем, как это делается, для простоты на примере третьего случая, когда $\omega \to \omega_3$, причем будем считать, что $\omega_3 = 0$. Следовательно, для всех значений ν будем иметь $\gamma \to 2$.

Рассмотрим предел зависимости

$$g(F) = \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\alpha_3}\left[\frac{\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)}\left(\frac{(\gamma+1)(\nu+2)}{2(\nu\gamma-\nu+2)}-F\right)}{\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)}\right]^{-\alpha_5}\times$$

$$\times\left[\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)}\left(\frac{(\gamma+1)(\nu+2)}{2(\nu\gamma-\nu+2)}-F\right)\right]^{\alpha_4+\alpha_5}$$

определенной формулой (5); при $\gamma \to 2$ имеем

$$\lim_{\gamma\to 2} g(F) = \lim_{\gamma\to 2}\left\{\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\alpha_3}\right\}\times$$
$$\times\lim_{\gamma\to 2}\left\{\left[\frac{\frac{(\gamma-1)(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)}\left(\frac{(\gamma+1)(\nu+2)}{2(\nu\gamma-\nu+2)}-F\right)}{\frac{\gamma+1}{2}-F}\right]^{-\alpha_5}\right\}\times$$
$$\times\lim_{\gamma\to 2}\left\{\left[\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)}\left(\frac{(\gamma+1)(\nu+2)}{2(\nu\gamma-\nu+2)}-F\right)\right]^{\alpha_4+\alpha_5}\right\}$$

После преобразований второй фигурной скобки в этой формуле получим

$$\lim_{\gamma\to 2} g(F) = \lim_{\gamma\to 2}\left\{\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\alpha_3}\right\}\lim_{\substack{x\to\infty\\ \gamma\to 2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{2\nu(\gamma+1)}{\nu+2}\frac{1-F}{\frac{\gamma+1}{2}-F}x}\times$$
$$\times\lim_{\gamma\to 2}\left\{\left[\frac{2(\nu\gamma-\nu+2)}{3\nu-2-\gamma(\nu-2)}\left(\frac{(\gamma+1)(\nu+2)}{2(\nu\gamma-\nu+2)}-F\right)\right]^{\alpha_4+\alpha_5}\right\},$$

Здесь введено обозначение

$$x = (\nu+2)\,(2-\gamma)^{-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)[\nu(\gamma+1)(1-F)]^{-1}$$

Переходя к пределу, найдем

$$g(F) = \left[4\left(F-\frac{3}{4}\right)\right]^{\frac{\nu}{\nu+2}}\left[2\left(\frac{3}{2}-F\right)\right]^{\frac{\nu-2}{\nu+2}}\exp\left(-\frac{6\nu}{\nu+2}\,\frac{1-F}{3/2-F}\right)$$

Можно получить предельным переходом и зависимости $h(F)$, $\lambda(F)$, причем предельный переход в $\lambda(F)$ совсем тривиален, но можно этого и не делать, так как при помощи интегралов (3) и (4) и полученного выражения для $g(F)$ можно найти полное решение, которое при $\gamma = 2$ будет эквивалентно решению (14). Предельный переход в случае произвольных значений $\omega_3(\gamma, \nu) \neq 0$ проводится аналогично. Таким же способом можно получить решение и для $\omega \to \omega_2$.

Проведенное исследование показывает, что решение задачи о сильном взрыве непрерывно по γ, что и следовало бы ожидать из вида исходной системы дифференциальных уравнений (1). В частности, это исследование устраняет всякие сомнения в поведении решения при $\gamma \to 2$.

В связи с этим заметим, что в рассматриваемой задаче в работе [4] (стр. 556 — 557) при $\omega = 0$ и $\gamma \to 2$ имеются неточности при описании поведения давления в окрестности центра симметрии ($\lambda = 0$, $F = (\gamma+1)/2\gamma$). Для этого случая из (14) находим значение h в центре:

$$h_0 = 3^{\frac{4(\nu-1)}{\nu+2}}\,4^{\frac{2-3\nu}{\nu+2}}\,e^{-\frac{2\nu}{\nu+2}} \neq 0$$

Поступила 2 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, т. 42, № 1, 1946.
2. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 4-е изд., М., 1957.
4. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1955.