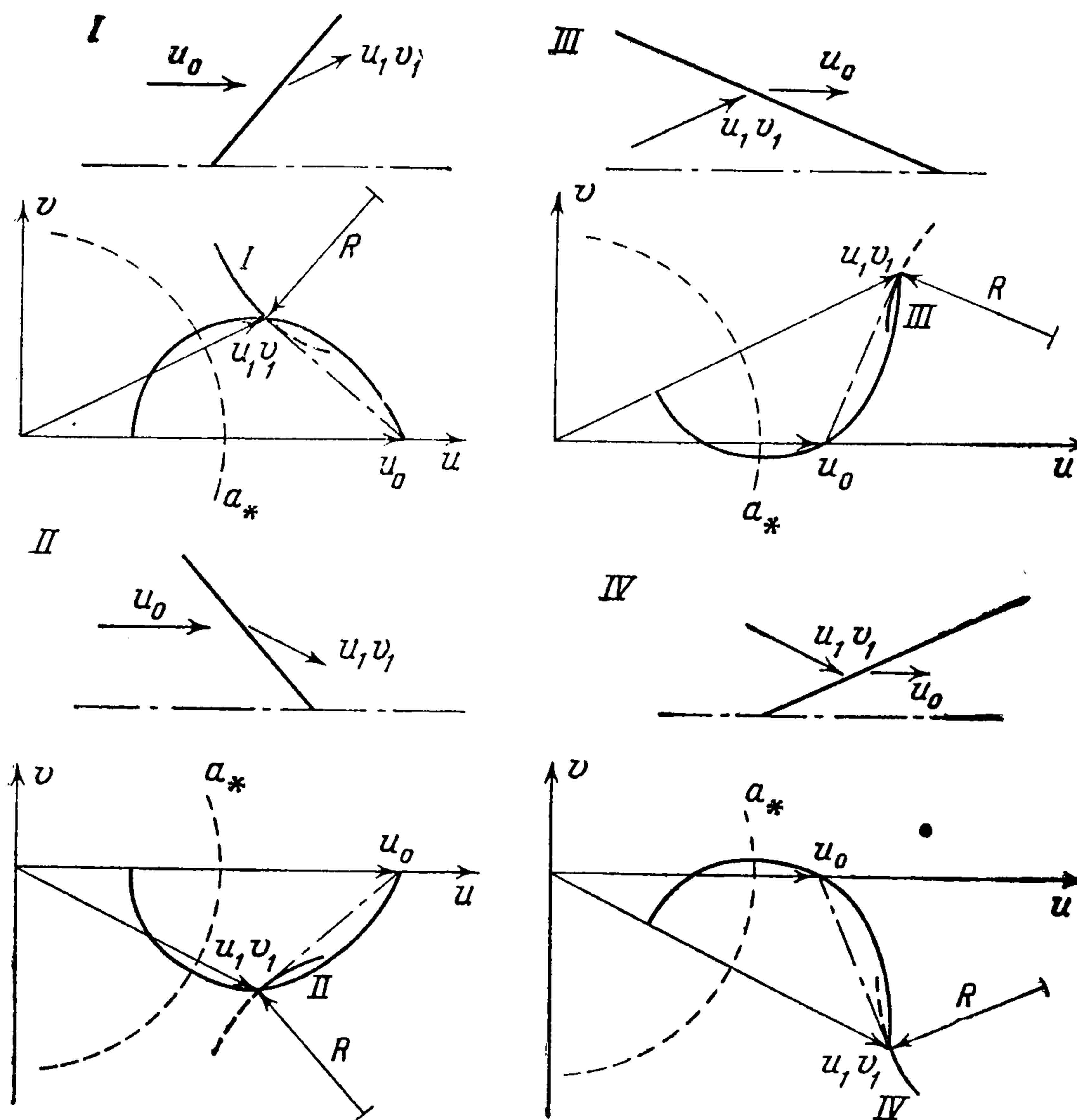


СВЕРХЗВУКОВЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ
С КОНИЧЕСКИМИ СКАЧКАМИ, ГРАНИЧАЩИМИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ
РАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ

Г. Л. Гродзовский

(Москва)

А. Бузман [1, 2] дал общую теорию осесимметричных конических сверхзвуковых течений и рассмотрел детально два класса таких течений: течение вокруг круглого конуса и течение в сопле сжатия с коническим скачком сзади. А. А. Никольский [3]



Фиг. 1

рассмотрел коническое бескачковое течение расширения, соответствующее обтеканию хвостовых частей определенной формы. Ниже рассматриваются все возможные типы сверхзвуковых осесимметричных конических течений с коническими скачками, граничащими с параллельным равномерным потоком. Установлены еще два новых класса конических течений: сходящееся коническое течение за коническим скачком и расходящееся коническое течение перед коническим скачком, которые соответствуют Течениям в каналах определенной формы.

Нами показано, что при сверхзвуковых скоростях существуют четыре класса осесимметричных конических течений с коническими скачками, граничащими с параллельным равномерным потоком: расходящиеся и сходящиеся течения перед и за коническим скачком.

Возможны четыре вида сочетания конического скачка и равномерного параллельного потока u_0 (фиг. 1): расходящийся или сходящийся конический скачок с потоком u_0 до или после скачка.

Докажем, что каждому виду сочетания соответствует особый класс конического течения, примыкающего к скачку. В плоскости годографа граничные параметры конического потока u_1, v_1 можно определить при помощи ударной поляры [4] (фиг. 1)

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_1 = \frac{v_1}{u_1 - u_0} \quad (1)$$

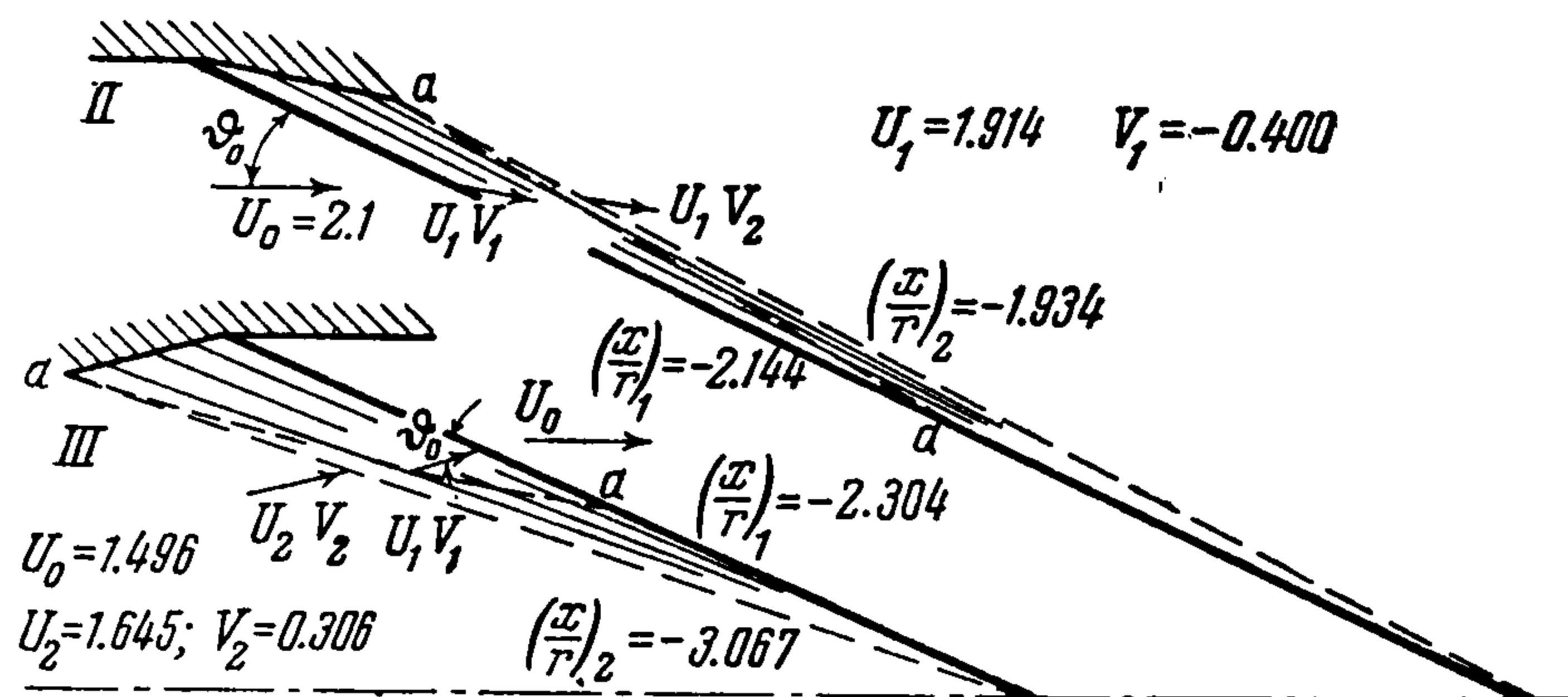
Осесимметричное коническое течение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка [2]

$$v \frac{d^2v}{du^2} = 1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{2 / (\kappa + 1) (u + v dv/du)^2}{a_*^2 - (u^2 + v^2) (\kappa - 1) / (\kappa + 1)} \quad (2)$$

и следующим соотношением между плоскостями rx и uv :

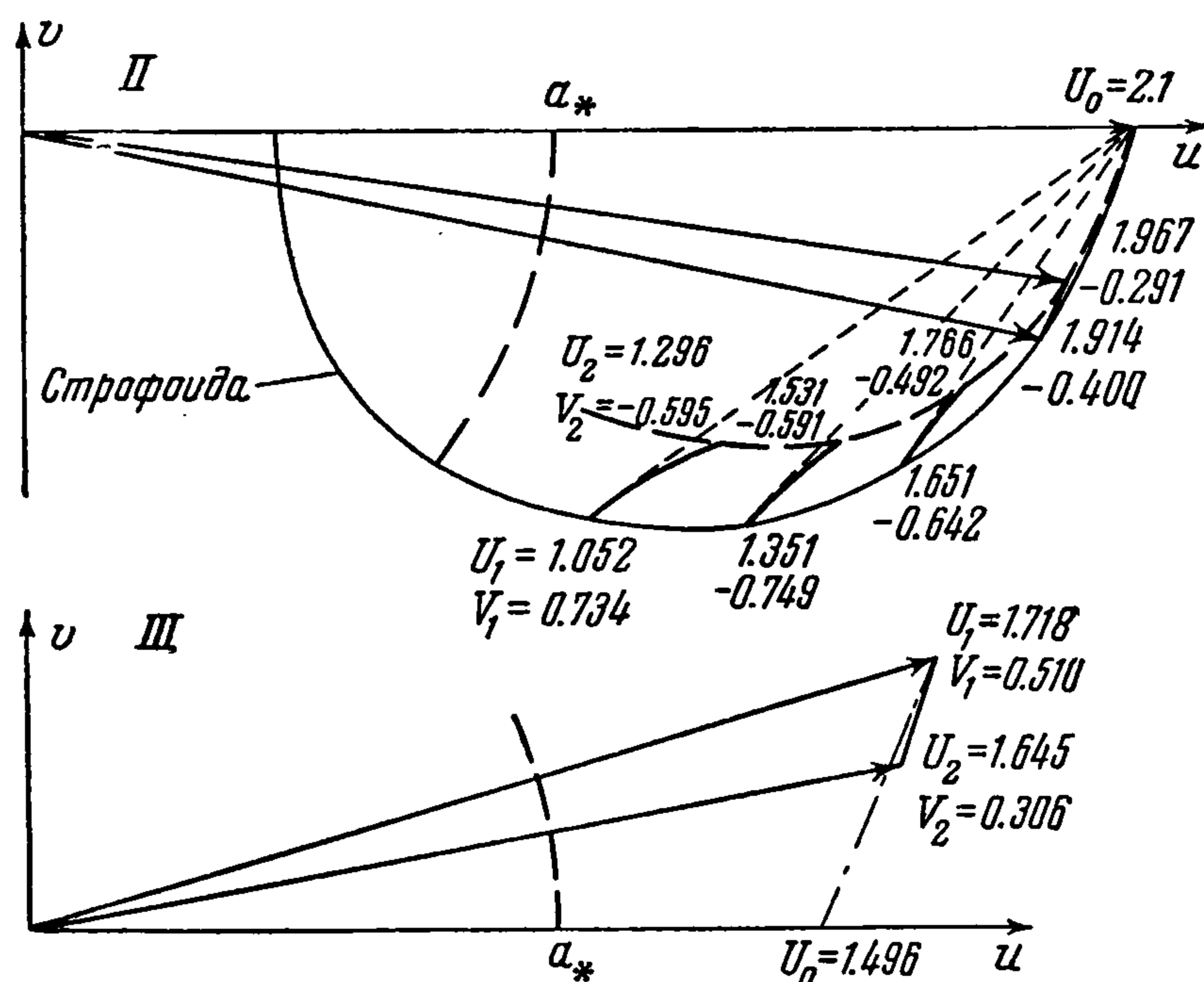
$$\frac{x}{r} = -\frac{dv}{du} \quad (3)$$

Уравнение (2) имеет особенности только на оси и на круге максимальной скорости W_{\max} . Поэтому через каждую начальную точку (u_1, v_1) с заданным наклоном (1)



Фиг. 2

проходит одна интегральная кривая уравнения (2), кривизна интегральной кривой в окрестности точки (u_1, v_1) указана на фиг. 1. Интегральная кривая пересекает точку (u_1, v_1) , физический смысл имеет только одна ветвь кривой (отмечена сплошной



Фиг. 3

линией на фиг. 1), когда коническое течение не «наползает» на поток u_0 . Четыре типа интегральных кривых I, II, III и IV (фиг. 1) определяют четыре возможных класса конических течений с коническими скачками, граничащими с параллельным потоком u_0 .

Таблица 1

Течение II, $\lambda_0 = 2.1$, $\vartheta_0 = 25^\circ$

x/r	u/a_*	v/a_*	λ	M	α	ϑ	\bar{r}_2
-2.144	1.914	-0.400	1.955	2.960	19°46	-11°48	1.000
-2.129	1.916	-0.395	1.956	2.970	19°42	-11°40	1.030
-2.114	1.918	-0.391	1.957	2.971	19°42	-11°32	1.061
-2.100	1.920	-0.387	1.958	2.975	19°38	-11°24	1.094
-2.087	1.922	-0.383	1.959	2.979	19°38	-11°16	1.128
-2.074	1.924	-0.379	1.960	2.980	19°38	-11°08	1.164
-2.062	1.926	-0.374	1.962	2.992	19°33	-11°00	1.200
-2.051	1.928	-0.370	1.963	2.996	19°30	-10°52	1.240
-2.040	1.930	-0.366	1.964	3.000	19°30	-10°45	1.278
-2.030	1.932	-0.362	1.965	3.004	19°29	-10°37	1.321
-2.020	1.934	-0.358	1.966	3.009	19°28	-10°30	1.364
-2.010	1.936	-0.354	1.968	3.010	19°28	-10°22	1.409
-2.002	1.938	-0.350	1.969	3.022	19°20	-10°14	1.457
-1.994	1.940	-0.346	1.970	3.026	19°17	-10°07	1.506
-1.986	1.942	-0.342	1.971	3.035	19°15	-9°59	1.559
-1.980	1.944	-0.338	1.973	3.039	19°13	-9°57	1.613
-1.973	1.946	-0.334	1.974	3.044	19°12	-9°45	1.671
-1.967	1.948	-0.330	1.975	3.048	19°09	-9°37	1.731
-1.962	1.950	-0.326	1.977	3.050	19°09	-9°30	1.792
-1.958	1.952	-0.322	1.978	3.061	19°06	-9°23	1.856
-1.954	1.954	-0.318	1.979	3.066	19°03	-9°15	1.928
-1.950	1.956	-0.314	1.981	3.075	18°58	-9°08	1.999
-1.947	1.958	-0.310	1.982	3.079	18°57	-9°01	2.075
-1.945	1.960	-0.307	1.983	3.081	18°56	-8°54	2.153
-1.943	1.962	-0.303	1.985	3.093	18°54	-8°47	2.241
-1.941	1.964	-0.299	1.986	3.097	18°51	-8°39	2.329
-1.938	1.966	-0.295	1.988	3.100	18°50	-8°32	2.416

Таблица 2

Течение II, $\lambda_0 = 2.1$, $\vartheta_0 = 35^\circ$

x/r	u/a_*	v/a_*	λ	M	α	ϑ	\bar{r}_2
-1.428	1.651	-0.642	1.772	2.340	25°18	-21°15	1.0
-1.415	1.655	-0.636	1.773	2.346	25°13	-21°02	1.010
-1.402	1.659	-0.630	1.774	2.349	25°11	-20°49	1.039
-1.390	1.663	-0.625	1.776	2.354	25°09	-20°36	1.067
-1.377	1.667	-0.619	1.778	2.360	25°06	-20°23	1.097
-1.366	1.671	-0.614	1.779	2.365	25°03	-20°11	1.130
-1.355	1.675	-0.608	1.782	2.371	24°58	-19°58	1.164
-1.345	1.679	-0.603	1.784	2.377	24°54	-19°46	1.197
-1.335	1.683	-0.598	1.786	2.379	24°53	-19°33	1.233
-1.326	1.687	-0.592	1.787	2.385	24°47	-19°21	1.269
-1.317	1.691	-0.587	1.789	2.391	24°43	-19°09	1.310
-1.309	1.695	-0.582	1.791	2.399	24°39	-18°57	1.349
-1.301	1.699	-0.576	1.794	2.405	24°32	-18°46	1.396
-1.289	1.706	-0.567	1.798	2.414	24°28	-18°24	1.442
-1.273	1.716	-0.555	1.803	2.432	24°20	-17°55	1.570
-1.260	1.726	-0.542	1.809	2.449	24°04	-17°26	1.706
-1.249	1.736	-0.529	1.814	2.464	24°0	-16°58	1.853
-1.242	1.746	-0.517	1.820	2.482	23°47	-16°30	2.0223
-1.237	1.756	-0.504	1.826	2.501	23°35	-16°02	2.211
-1.235	1.764	-0.494	1.831	2.518	23°27	-15°38	2.420

Таблица 3

Течение II, $\lambda_0 = 2.1$, $\vartheta_0 = 45^\circ$

x/r	u/a_*	v/a_*	λ	M	α	ϑ	\bar{r}_2
-1.000	1.351	-0.749	1.545	1.818	33°23	-29°	1.0
-0.992	1.355	-0.745	1.546	1.819	33°23	-28°48	1.016
-0.984	1.359	-0.741	1.548	1.823	33°16	-28°36	1.034
-0.973	1.365	-0.735	1.551	1.827	33°10	-28°18	1.0611
-0.962	1.371	-0.729	1.553	1.833	33°04	-28°01	1.086
-0.951	1.377	-0.724	1.556	1.839	32°58	-27°43	1.118
-0.941	1.383	-0.718	1.558	1.843	32°51	-27°26	1.148
-0.930	1.390	-0.711	1.562	1.849	32°45	-27°06	1.184
-0.917	1.398	-0.704	1.565	1.857	32°36	-26°44	1.228
-0.906	1.406	-0.697	1.569	1.865	32°25	-26°21	1.275
-0.895	1.414	-0.689	1.573	1.873	32°17	-25°59	1.322
-0.882	1.424	-0.680	1.578	1.883	32°04	-25°33	1.3856
-0.870	1.434	-0.672	1.584	1.896	31°50	-25°05	1.4553
-0.860	1.444	-0.663	1.589	1.906	31°36	-24°40	1.530
-0.850	1.454	-0.654	1.595	1.919	31°28	-24°14	1.609
-0.842	1.464	-0.646	1.600	1.929	31°14	-23°48	1.690
-0.835	1.474	-0.637	1.606	1.942	31°0	-23°23	1.781
-0.829	1.484	-0.629	1.612	1.954	30°48	-22°59	1.849
-0.824	1.494	-0.621	1.618	1.967	30°32	-22°34	1.984
-0.820	1.504	-0.613	1.624	1.980	30°20	-22°10	2.097
-0.818	1.514	-0.604	1.630	1.993	30°10	-21°47	2.215
-0.816	1.524	-0.596	1.637	2.009	29°50	-21°22	2.355
-0.816	1.531	-0.591	1.641	2.018	29°44	-21°06	2.451

Таблица 4

Течение II, $\lambda_0 = 2.1$, $\vartheta_0 = 55^\circ$

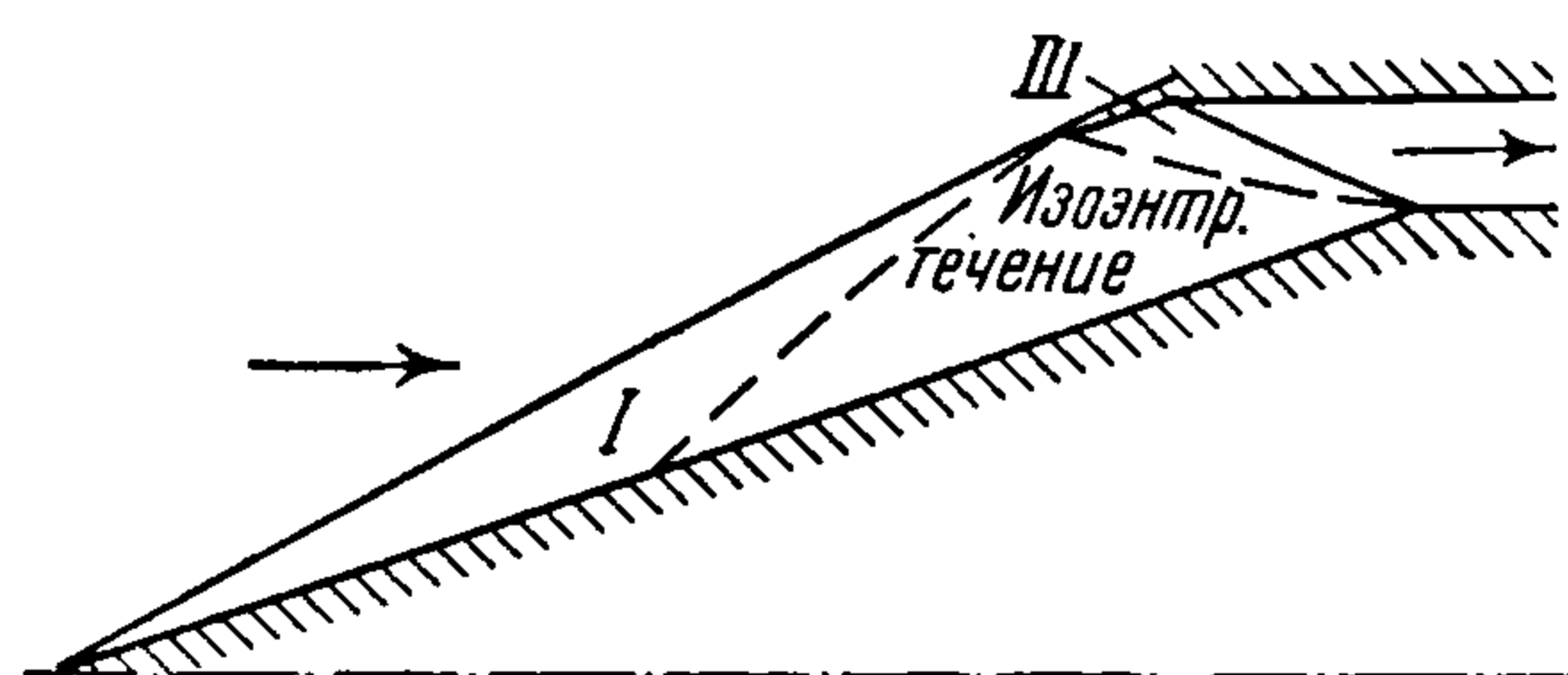
x/r	u/a_*	v/a_*	λ	M	α	ϑ	\bar{r}_2
-0.700	1.052	-0.734	1.283	1.375	46°39	-34°54	1.000
-0.684	1.062	-0.727	1.288	1.381	46°23	-34°23	1.0295
-0.670	1.072	-0.720	1.291	1.387	46°13	-33°53	1.060
-0.655	1.082	-0.713	1.297	1.394	45°51	-33°23	1.092
-0.641	1.092	-0.707	1.301	1.402	45°34	-32°55	1.125
-0.628	1.102	-0.700	1.306	1.409	45°15	-32°26	1.160
-0.616	1.112	-0.694	1.311	1.417	44°55	-31°58	1.196
-0.604	1.122	-0.688	1.316	1.424	44°38	-31°31	1.234
-0.593	1.132	-0.682	1.322	1.432	44°12	-31°04	1.274
-0.582	1.142	-0.676	1.327	1.441	43°57	-30°38	1.316
-0.572	1.152	-0.670	1.333	1.450	43°38	-30°13	1.359
-0.563	1.162	-0.665	1.339	1.459	43°17	-29°46	1.406
-0.555	1.172	-0.659	1.345	1.469	42°55	-29°21	1.455
-0.546	1.183	-0.653	1.351	1.479	42°32	-28°54	1.511
-0.537	1.195	-0.646	1.359	1.491	42°08	-28°24	1.577
-0.530	1.207	-0.640	1.366	1.502	41°45	-27°56	1.646
-0.523	1.219	-0.634	1.374	1.515	41°23	-27°28	1.719
-0.517	1.231	-0.627	1.382	1.528	40°51	-27°01	1.796
-0.512	1.243	-0.621	1.390	1.541	40°24	-26°33	1.881
-0.509	1.255	-0.615	1.397	1.553	40°06	-26°06	1.969
-0.506	1.267	-0.609	1.406	1.567	39°38	-25°40	2.066
-0.504	1.279	-0.603	1.414	1.581	39°12	-25°14	2.168
-0.502	1.296	-0.594	1.425	1.599	38°45	-24°38	2.324

Таблица 5

Течение III, $\frac{u_0}{a_*} = 1.496$, $\vartheta_0 = 40^\circ$

x/r	u/a_*	v/a_*	λ	M	α	ϑ	\bar{r}_2
-2.304	1.718	0.510	1.791	2.399	24°39	16°33	1.0
-2.372	1.714	0.501	1.786	2.379	24°51	16°18	1.015
-2.438	1.710	0.492	1.779	2.362	25°06	16°02	1.031
-2.503	1.706	0.482	1.773	2.346	25°13	15°46	1.049
-2.565	1.702	0.472	1.766	2.326	25°23	15°29	1.068
-2.625	1.698	0.461	1.759	2.307	25°36	15°12	1.090
-2.682	1.694	0.451	1.753	2.291	25°51	14°54	1.113
-2.736	1.690	0.440	1.746	2.273	26°07	14°35	1.138
-2.787	1.686	0.429	1.740	2.257	26°19	14°16	1.166
-2.834	1.682	0.418	1.733	2.239	26°30	13°57	1.197
-2.878	1.678	0.406	1.726	2.221	26°49	13°37	1.230
-2.918	1.674	0.395	1.720	2.205	26°53	13°17	1.266
-2.953	1.670	0.383	1.713	2.188	27°12	12°55	1.308
-2.984	1.666	0.371	1.707	2.173	27°28	12°34	1.351
-3.011	1.662	0.359	1.700	2.156	27°35	12°12	1.400
-3.032	1.658	0.347	1.694	2.141	27°50	11°50	1.453
-3.049	1.654	0.335	1.687	2.124	28°10	11°27	1.512
-3.060	1.650	0.323	1.681	2.109	28°18	11°04	1.578
-3.066	1.646	0.311	1.675	2.098	28°28	10°41	1.650
-3.067	1.644	0.305	1.672	2.090	28°34	10°32	1.683

Течения I и IV были рассмотрены А. Буземаном [1, 2]; новыми являются течения класса II — сходящееся коническое течение за коническим скачком и III — расходящееся коническое течение перед коническим скачком. Интегральные кривые течений II и III ограничены отрезком кривой $(u_1, v_1 — u_2, v_2)$ до точки (u_2, v_2) , где $(d^2v/du^2)_2 = 0$. В физической плоскости течения ограничены коническим скачком, крайней характеристикой и линией тока. Примеры течений II и III приведены на фиг. 2 и 3 и в табл. 1—5. На фигурах все величины скоростей отнесены к критической скорости звука a_* ; так, например, $U_1 = u_1/a_*$. В табл. 1—5 λ — приведенная скорость, M — число Маха, α — угол Маха, ϑ — угол направления потока, r_2 — относительный радиус характеристики II семейства. Пример сочетания конических течений и изоэнтронического дан на фиг. 4.



Фиг. 4

Аналогичные автомодельные решения для одномерных нестационарных течений рассмотрены нами в работе [5].

Поступила 1 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. B u s e m a n n A. Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit. ZAMM, 9, Nr. 6, 1929.
2. B u s e m a n n A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung, Luftfahrtforschung, 19, Nr. 4, 1942.
3. Н и к о л ь с к и й А. А. Конические осесимметрические сверхзвуковые газовые течения разрежения. Сборник теоретических работ по аэродинамике. ГИОП, 1957.
4. C o u r a n t R., F r i e d r i c h s K. O. Supersonic flow and shock waves, New York, 1948.
5. Г р о д з о в с к и й Г. Л., Д ю к а л о в А. И., Т о к а р е в В. В., Т о л с т ы х А. И. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися с постоянной скоростью по покоящемуся газу. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.