

## ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОСУДА

Дж. Саламатов

(Фрунзе)

Впервые истечение жидкости из сосуда, ограниченного бесконечными плоскими стенками, было рассмотрено Кирхгоффом <sup>(1)</sup>.

Э. Треффц <sup>(2)</sup> рассматривал истечение жидкости из круглого отверстия в плоской стенке. Им составлено интегральное уравнение для потенциала скоростей, которое содержало также функцию, определяющую форму струи. Для решения этого уравнения он задавался некоторыми формами струи.

После определения потенциала скоростей, численными методами, автор сравнивает его с известным значением потенциала на границе струи и выбирает ту форму струи, для которой разность является наименьшей.

В данной статье также составляется интегро-дифференциальное уравнение, которое решается методом последовательных приближений, причем форма струи определяется в ходе решения.

Рассмотрим схему, представленную на фигуре. Пусть жидкость вытекает из сосуда в виде конуса  $CB B_1C_1$ , ограниченного бесконечными стенками  $BC$  и  $B_1C_1$ , и образует струю  $BDD_1B_1$ . Требуется найти форму струи и распределение скоростей вдоль твердой стенки. Для решения поставленной задачи введем цилиндрические координаты  $z, r$ .

В дальнейшем условимся обозначать через  $z, r$  координаты произвольной точки пространства, а через  $z', r'$  координаты точки, лежащей на поверхности сосуда или струи.

Пусть уравнения, образующие  $BC$  и  $B_1C_1$ , соответственно имеют вид:

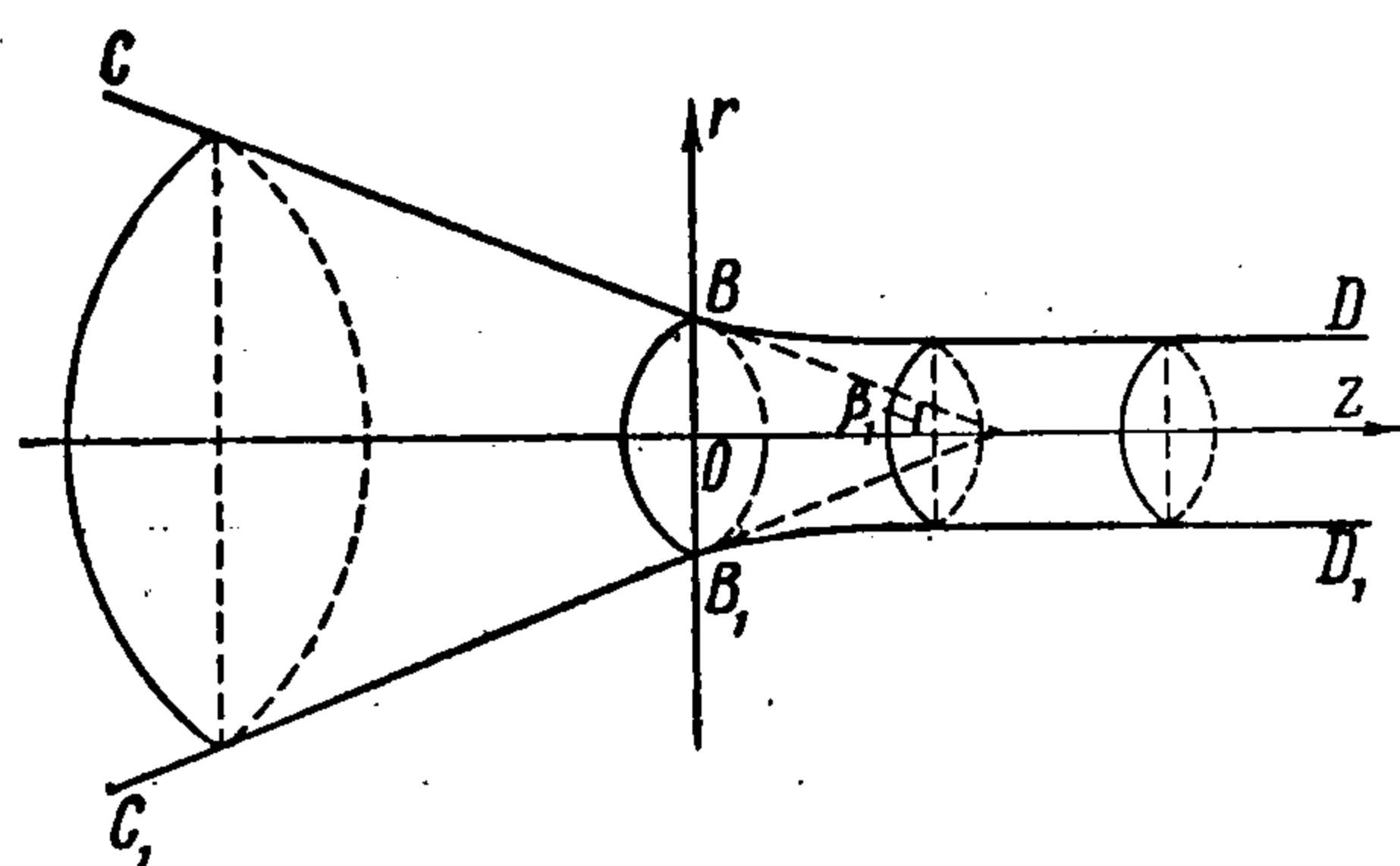
$$\begin{aligned} r' &= 1 - z' \operatorname{tg} \beta_1 & (BC) \\ r' &= -(1 - z' \operatorname{tg} \beta_1) & (B_1C_1) \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим окружности  $r = r'$ , расположенные в плоскости  $z = z'$ . Вдоль каждой из окружностей расположены вихри. На элемент дуги вдоль границы  $dl'$  пусть приходится циркуляция  $\gamma(z') dl'$ ; причем эта циркуляция предполагается направленной против часовой стрелки в меридианной полуплоскости. Тогда функция тока будет <sup>[3]</sup>:

$$\psi = \frac{r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl' \quad (2)$$

где

$$\rho(r, r', z, \alpha) = \sqrt{r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos \alpha}$$



Фиг. 1

Далее

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3)$$

Вдоль всей поверхности имеем  $v_n = 0$ , поэтому

$$v_r \frac{dr}{dn} + v_z \frac{dz}{dn} = 0$$

так как  $dr/dn = dz/dl$ ,  $dz/dn = -dr/dl$ , то

$$v_r dz - v_z dr = 0, \quad \text{или} \quad v_r - v_z \frac{dr}{dz} = 0 \quad (4)$$

На достаточном расстоянии от выходного отверстия в бесконечности вверх по течению величина  $\gamma(z)$ , которая совпадает с касательной составляющей скоростью, будет обратно пропорциональна квадрату радиуса сосуда. Последнее вытекает из условия постоянства расхода.

Предположим, что начиная с точки  $z = z_1$

$$\gamma(z) = \gamma_1 \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \quad (z \leq z_1), \quad \gamma_1 = \gamma(z_1), \quad r_1 = r(z_1) \quad (5)$$

На поверхности струи величина  $\gamma(z)$  будет постоянной, которую можно принять за единицу.

Заметим, что на некотором расстоянии от выходного отверстия вниз по течению, например, начиная с точки  $z = z_2$ , практически форму струи можно считать цилиндрической. Представим равенство (2) в следующем виде

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \quad (6)$$

где

$$\psi_1 = \frac{r}{4\pi} \int_{-\infty}^{z_1} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl' \quad (7)$$

$$\psi_2 = \frac{r}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl' \quad (8)$$

$$\psi_3 = \frac{r}{4\pi} \int_{z_2}^{\infty} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl' \quad (9)$$

После подстановки (6) равенства (3) примет вид

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) = v_{1r} + v_{2r} + v_{3r} \quad (10)$$

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) = v_{1z} + v_{2z} + v_{3z}$$

Введенные здесь обозначения очевидны. Уравнение (4) можно представить в виде

$$v_{1r} + v_{2r} + v_{3r} - (v_{1z} + v_{2z} + v_{3z}) \frac{dr}{dz} = 0 \quad (11)$$

Если радиус цилиндра обозначать через  $r_0$ , то

$$\psi_3 = \frac{r r_0}{4\pi} \int_{z_2}^{\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r_0, z, \alpha)} \right] dz'$$

Как показал Н. Е. Жуковский [4], такие интегралы сводятся к эллиптическим интегралам первого, второго и третьего родов.

А именно, интегрируя по частям по  $\alpha$ , меняя порядок интегрирования, и делая замену переменной  $\alpha = \pi + 2\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} \psi_z &= \frac{rr_0}{4\pi} \int_{z_2}^{\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r_0, z, \alpha)} \right] dz' = \frac{r^2 r_0^2}{4\pi} \int_{z_2}^{\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \alpha d\alpha}{\rho^3(r, r_0, z, \alpha)} \right] dz' = \\ &= \frac{r^2 r_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{z_2}^{\infty} \frac{dz'}{\rho^3(r, r_0, z, \alpha)} \right] \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\lambda \sqrt{rr_0}(z - z_2)}{2\pi n} \left[ (1 - n)(K_\lambda - J) + \frac{n}{\lambda^2} (K_\lambda - E_\lambda) \right] + \begin{cases} \frac{\pi r^2}{4\pi} \text{ для } r < r_0 \\ \frac{\pi r_0^2}{4\pi} \text{ для } r > r_0 \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_\lambda &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}, & E_\lambda &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \\ J &= J(-n, \lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \\ \lambda &= \frac{2\sqrt{rr_0}}{\sqrt{(z - z_2)^2 + (r + r_0)^2}}, & n &= \frac{4rr_0}{(r + r_0)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) согласно формулам (10) получаются:

$$v_{3r} = -\frac{\sqrt{rr_0}}{2\pi r \lambda} [(2 - \lambda^2) K_\lambda - 2E_\lambda] \quad (14)$$

$$v_{3z} = \frac{(z - z_2) \lambda}{4\pi \sqrt{rr_0}} \left[ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} J + K_\lambda \right] + \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ для } r < r_0 \\ 0 \text{ для } r > r_0 \end{cases} \quad (15)$$

Здесь значения  $K_\lambda$  и  $E_\lambda$  берутся из таблицы эллиптических интегралов. Полный эллиптический интеграл III рода  $J$  сводится к неполным эллиптическим интегралам первого и второго родов следующей формулой [4]

$$J(-n, \lambda) = \frac{\sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 \delta}}{\lambda'^2 \sin \delta \cos \delta} \left[ (K_\lambda - E_\lambda) F'(\delta) - K_\lambda E'(\delta) + \frac{\pi}{2} \right] + K_\lambda \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} F'(\delta) &= \int_0^\delta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 \varphi}}, & E'(\delta) &= \int_0^\delta d\varphi \sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 \varphi} & (\lambda'^2 = 1 - \lambda^2) \\ n &= 1 - \lambda'^2 \sin^2 \delta \end{aligned}$$

Таким образом, полный эллиптический интеграл третьего рода  $J$  тоже вычисляется непосредственно через табличные значения неполных и полных эллиптических интегралов первого и второго родов. Здесь радиальная составляющая скорости  $v_{3r}$  непрерывна на поверхности вихревого цилиндра, но имеет логарифмическую особенность у края последнего. Осевая составляющая скорости  $v_{3z}$  имеет на поверхности цилиндра разрыв, равный единице, как это и должно быть по предположению. Половина разрыва сходится в выражение  $v_{3z}$  в явном виде, а вторая половина содержится в слагаемом, в которое входит  $J$ .

Как видно из (10) для вычисления  $v_{2r}$  и  $v_{2z}$  нужны значения  $\partial\psi_2/\partial z$  и  $\partial\psi_2/\partial r$ , так как

$$\psi_2 = \frac{r}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl'$$

то

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{\partial\psi_2}{\partial r} &= \int_{z_1}^{z_2} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl' - \\ &- r \int_{z_1}^{z_2} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \alpha - r' \cos^2 \alpha) d\alpha}{\rho^3(r, r', z, \alpha)} \right] dl' = \\ &= \frac{2}{Vr} \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{r' \gamma(z')}{V k} \left[ (2 - k^2) K_k - 2E_k \right] \right\} dl' - \\ &- r \int_{z_1}^{z_2} \left[ r' \gamma(z') \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \alpha - r' \cos^2 \alpha) d\alpha}{\rho^3(r, r', z, \alpha)} \right] dl' \end{aligned}$$

Здесь  $K_k$  и  $E_k$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода по модулю

$$k = \frac{2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}}$$

Делая замену  $\alpha = \pi + 2\varphi$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \alpha - r' \cos^2 \alpha) d\alpha}{\rho^3(r, r', z, \alpha)} &= r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-2r \cos 2\varphi d\varphi}{\rho^3(r, r', z, \varphi)} - r' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 2\varphi d\varphi}{\rho^3(r, r', z, \varphi)} = \\ &= \frac{(r+r')k^4 + 2rk^2 + 8r'k^2 - 8r'}{rr'k(1-k^2)\sqrt{rr'}} E_k + \frac{4r' - (r+2r')k^2}{rr'k\sqrt{rr'}} K_k \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{2z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_2}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r} \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z') \left[ \frac{rk}{Vrr'} K_k - \frac{rk(2-k^2) - r'k^3}{2Vrr'(1-k^2)} E_k \right] dl' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z') M(z, z') dl' \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} M(z, z') &= \frac{m^2(z, r, z', r') K_k - [(z' - z)^2 + r^2 - r'^2] E_k}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} \\ m(z, r, z', r') &= \sqrt{(z' - z)^2 + (r' - r)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогичным путем получим

$$v_{2r} = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z') N(z, z') dl' \quad (19)$$

где

$$N(z, z') = \frac{m^2(z, r, z', r') K_k - [m^2(z, r, z', r') + 2r'r] E_k}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} \frac{z' - z}{r} \quad (20)$$

Интегралы (17) и (19) приходится вычислять численно; однако, при  $z = z'$ ,  $r = r'$  подынтегральные функции имеют особенности.

Поэтому преобразуем интегралы (17) и (19) следующим образом:

$$v_{2z} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{z_1}^{z-\varepsilon} \gamma(z') M(z, z') dl' + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \gamma(z') M(z, z') dl' + \int_{z+\varepsilon}^{z_2} \gamma(z') M(z, z') dl' \right] \quad (21)$$

$$v_{2r} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{z_1}^{z-\varepsilon} \gamma(z') N(z, z') dl' + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \gamma(z') N(z, z') dl' + \int_{z+\varepsilon}^{z_2} \gamma(z') N(z, z') dl' \right]$$

Приводим теперь результаты вычислений, при которых использованы разложения полных эллиптических интегралов первого и второго рода в окрестности  $k = 1$  по степеням  $k^1$

$$\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \gamma(z') M(z, z') dl' = \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \gamma(z') \frac{m^2(z, r, z', r') K_k - [(z' - z)^2 + r^2 - r'^2] E_k}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} dl' =$$

$$= \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{\gamma(z') (K_k - E_k) \sqrt{1 + r_z'^2}}{m^2(z, -r, z', r')} dz' - 2 \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{\gamma(z') r' (r - r') E_k \sqrt{1 + r_z'^2} dz'}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} \approx$$

$$\approx \frac{\gamma(z) \sqrt{1 + r_z^2}}{r} \varepsilon \ln \frac{8r}{\varepsilon \sqrt{1 + r_z^2}} + 2 \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{\gamma(z') r' (r' - r) E_k \sqrt{1 + r_z'^2} dz'}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} \approx$$

$$\approx \frac{\gamma(z) \varepsilon \sqrt{1 + r_z^2}}{r} \ln \frac{8r}{\varepsilon \sqrt{1 + r_z^2}} + \frac{\varepsilon \gamma(z) r_z^2}{r \sqrt{1 + r_z^2}} \mp \frac{\pi \gamma(z)}{\sqrt{1 + r_z^2}}$$

Здесь и в дальнейшем знак минус соответствует случаю  $r - r' \rightarrow +0$ , знак плюс соответствует  $r - r' \rightarrow -0$ , кроме того,

$$r_z = dr/dz, \quad r_z' = dr'/dz' \quad (23)$$

Аналогично получаем

$$\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \gamma(z') N(z, z') dl' = \frac{1}{r} \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \gamma(z') \frac{(z' - z) \{ m^2(z, r, z', r') K_k - [m^2(z, r, z', r') + 2r'r] E_k \}}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} \times$$

$$\times \sqrt{1 + r_z'^2} dz' = \frac{1}{r} \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{\gamma(z') (z' - z) (K_k - E_k) \sqrt{1 + r_z'^2}}{m(z, -r, z', r')} dz' -$$

$$- 2 \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} \frac{\gamma(z') r' (z' - z) E_k \sqrt{1 + r_z'^2} dz'}{m^2(z, r, z', r') m(z, -r, z', r')} = - \frac{\gamma(z) \varepsilon r_z}{r \sqrt{1 + r_z^2}} \mp \frac{\pi \gamma(z) r_z}{\sqrt{1 + r_z^2}} \quad (24)$$

В силу (23) и (24) равенства (21) и (22) переписутся

$$v_{2z} = \frac{1}{2\pi} v \cdot p \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z') M(z, z') dl' +$$

$$+ \frac{\varepsilon \gamma(z)}{2\pi r} \left[ \sqrt{1 + r_z^2} \ln \frac{8r}{\varepsilon \sqrt{1 + r_z^2}} + \frac{r^2}{\sqrt{1 + r_z^2}} \right] \mp \frac{\gamma(z)}{2\sqrt{1 + r_z^2}} \quad (25)$$

$$v_{2r} = \frac{1}{2\pi} v \cdot p \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z') N(z, z') dl' - \frac{\gamma(z) \varepsilon r_z}{2\pi r \sqrt{1 + r_z^2}} \mp \frac{\gamma(z) r_z}{2\sqrt{1 + r_z^2}} \quad (26)$$

Отсюда видно, что  $v_{2z}$  и  $v_{2r}$  имеют разрывы на поверхности конуса и на искривленной части струи, равные соответственно  $\gamma(z) \cos \beta$  и  $-\gamma(z) \sin \beta$ ; причем,  $\gamma(z) = 1$  при  $z \geq 0$ , при этом на поверхности конуса  $\beta = \beta_1$ , а на искривленной части струи  $\beta$  есть угол между касательной к поверхности струи и осью  $z$ .

Наконец, вычислим  $v_{1z}$  и  $v_{1r}$ . Для этого, как известно из (10), необходимо найти  $\partial\psi_1/\partial r$  и  $\partial\psi_1/\partial z$ . Учитывая (5)  $\psi_1$ , перепишем

$$\psi_1 = \frac{rr_1^2\gamma_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{z_1} \left[ \frac{1}{r'} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl'$$

то

$$4\pi \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \gamma_1 r_1^2 \left\{ \int_{-\infty}^{z_1} \left[ \frac{1}{r'} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho(r, r', z, \alpha)} \right] dl' - \right. \\ \left. - r^2 \int_{-\infty}^{z_1} \left[ \frac{1}{r'} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho^3(r, r', z, \alpha)} \right] dl' + r \int_{-\infty}^{z_1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha dl'}{\rho^3(r, r', z, \alpha)} \right\}$$

После некоторых преобразований и замены переменной  $r' = 1 - z' \operatorname{tg} \beta_1$  и учитывая, что

$$\sqrt{1 + r_z'^2} = \frac{1}{\cos \beta_1}$$

получаем:

$$4\pi \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\gamma_1 r r_1^2}{\cos \beta_1} \left\{ \frac{r^2 - a}{\operatorname{atg} \beta_1} \int_0^{2\pi} \int_{\infty}^{r_1} \frac{d\alpha dr'}{(cr'^2 + br' + a)^{3/2}} - \frac{r^2}{\operatorname{atg} \beta_1} \int_0^{2\pi} \int_{\infty}^{r_1} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha dr'}{(cr'^2 + br' + a)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{2r}{\operatorname{atg} \beta_1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{b\sqrt{c}}{\Delta} - \frac{bcr_1 - 2ac + b^2}{\Delta \sqrt{cr_1^2 + br_1 + a}} \right) \cos \alpha d\alpha \right\} \quad (27)$$

где

$$a = r^2 + (z - \operatorname{ctg} \beta_1)^2, \quad b = 2(z - \operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg}^2 \beta_1 - r \cos \alpha), \\ r_1 = 1 - z_1 \operatorname{tg} \beta_1, \quad c = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_1$$

$$\Delta = -4[r^2 \cos^2 \alpha + 2r \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) \cos \alpha - (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_1) r^2 - (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2]$$

Все интегралы, которые содержатся в (27), после некоторых преобразований могут быть приведены к эллиптическим интегралам первого, второго и третьего родов.

$$4\pi \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\gamma_1 r r_1^2 \sigma}{a \sqrt{r r_1} \sin \beta_1} \left[ A n_1 J_1 + B n_2 J_2 + D K_\sigma - \frac{4r}{\sigma^2} E_\sigma \right] - \\ - \frac{\gamma_1 r_1^2 \sqrt{c} \pi}{ar \sin \beta_1} \left[ \frac{(2a - 2r^2 - b_1 x_1)}{(x_2 - x_1) \sqrt{x_1^2 - 1}} + \frac{(2a - 2r^2 - b_1 x_2)}{(x_2 - x_1) \sqrt{x_2^2 - 1}} \right] \quad (28)$$

Здесь

$$\sigma = \frac{2\sqrt{r r_1}}{\sqrt{(z - z_1)^2 + (r + r_1)^2}}$$

$$x_1 = \frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + \sqrt{c} \sqrt{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r^2}}{r}$$

$$x_2 = \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + \sqrt{c} \sqrt{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r^2}}{r}$$

$$D = 2 \left[ \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) - r + \frac{2r}{\sigma^2} \right]$$

$$A = \frac{-(\operatorname{ctg} \beta_1 - z) \sqrt{c}}{2r \sqrt{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r^2}} \left\{ \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r_1 c (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + \right. \\ \left. + r^2 \operatorname{ctg} \beta_1 - \sqrt{c} [\operatorname{ctg} \beta_1 - z + r_1 \operatorname{ctg} \beta_1] \sqrt{r^2 + (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2} \right\}$$

$$B = \frac{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z) \sqrt{c}}{2r \sqrt{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r^2}} \{ \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r_1 c (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + r^2 \operatorname{ctg} \beta_1 + \\ + \sqrt{c} [\operatorname{ctg} \beta_1 - z + r_1 \operatorname{ctg} \beta_1] \sqrt{r^2 + (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2} \} \\ n_1 = \frac{2r}{r - \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + \sqrt{c} \sqrt{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r^2}} \\ n_2 = \frac{2r}{r - \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) - \sqrt{c} \sqrt{(\operatorname{ctg} \beta_1 - z)^2 + r^2}} \\ b_1 = 2r \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)$$

Здесь  $J_1$  и  $J_2$  — полные эллиптические интегралы третьего рода, то есть

$$J_1 = J_1(-n_1, \sigma) = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - n_1 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi}} \\ J_2 = J_2(-n_2, \sigma) = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - n_2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi}}$$

$K_\sigma$  и  $E_\sigma$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода по модулю  $\sigma$ , см. (13).

Различаем два случая, при этом одновременно вписываем результаты для функции  $v_{1r}$ , которые получаются аналогично.

*Первый случай:*  $\operatorname{ctg} \beta_1 > z$

$$v_{1z} = \frac{\gamma_1 r_1^2 \sigma}{4\pi \sqrt{r r_1 a} \sin \beta_1} \left[ (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) p(z, r) J_1 + (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) Q(z, r) J_2 + \right. \\ \left. + D(z, r) K_\sigma - \frac{4r}{\sigma^2} E_\sigma \right] + \frac{\gamma_1 r^2 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)}{4 \sin^2 \beta_1 a^{3/2}} \mp \frac{\gamma_1 r_1^2 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)}{4 \sin^2 \beta_1 a^{3/2}} \quad (29)$$

$$v_{1r} = - \frac{\gamma_1 r_1^2 \sigma}{4\pi \sqrt{r r_1 a} \sin \beta_1} \left[ r p(z, r) J_1 + r Q(z, r) J_2 + \right. \\ \left. + D_1^*(z, r) K_\sigma - \frac{4(z - \operatorname{ctg} \beta_1)}{\sigma^2} E_\sigma \right] - \frac{\gamma_1 r_1^2 r}{4 \sin^2 \beta_1 a^{3/2}} \pm \frac{\gamma_1 r_1^2 r}{4 a^{3/2} \sin^2 \beta_1} \quad (30)$$

В формуле (29) знак минус соответствует  $|(1-r)/z| > |\operatorname{tg} \beta_1|$ , знак плюс при  $|(1-r)/z| < |\operatorname{tg} \beta_1|$ , а в формуле (30) наоборот.

*Второй случай:*  $\operatorname{ctg} \beta_1 < z$

$$v_{1z} = \frac{\gamma_1 r_1^2 \sigma}{4\pi \sqrt{r r_1 a} \sin \beta_1} \left[ (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) p(z, r) J_1 + (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) Q(z, r) J_2 + \right. \\ \left. + D(z, r) K_\sigma - \frac{4r}{\sigma^2} E_\sigma \right] + \frac{\gamma_1 r_1^2 (z - \operatorname{ctg} \beta_1)}{4 a^{3/2} \sin^2 \beta_1} \mp \frac{\gamma_1 r_1^2 (z - \operatorname{ctg} \beta_1)}{4 a^{3/2} \sin^2 \beta_1} \quad (31)$$

$$v_{1r} = - \frac{\gamma_1 r_1^2 \sigma}{4\pi \sqrt{r r_1 a} \sin \beta_1} \left[ r p(z, r) J_1 + r Q(z, r) J_2 + \right. \\ \left. + D_1^*(z, r) K_\sigma - \frac{4(z - \operatorname{ctg} \beta_1)}{\sigma^2} E_\sigma \right] + \frac{\gamma_1 r_1^2 r}{4 a^{3/2} \sin \beta_1} \mp \frac{\gamma_1 r_1^2 r}{4 a^{3/2} \sin^2 \beta_1} \quad (32)$$

В формулах (31) и (32) знак минус соответствует  $|(r+1)/z| > |\operatorname{tg} \beta_1|$ , знак плюс при  $|(r+1)/z| < |\operatorname{tg} \beta_1|$ , при этом

$$p(z, r) = \frac{-\sqrt{c} \{ cr_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + a \operatorname{ctg} \beta_1 - [(\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + r_1 \operatorname{ctg} \beta_1] \sqrt{ac} \}}{\sqrt{ca} + [r - \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)] \sqrt{a}} \\ Q(z, r) = \frac{\sqrt{c} \{ cr_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + a \operatorname{ctg} \beta_1 + [(\operatorname{ctg} \beta_1 - z) + r_1 \operatorname{ctg} \beta_1] \sqrt{ac} \}}{-\sqrt{ca} + [r - \operatorname{ctg} \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - z)] \sqrt{a}} \\ D_1^*(z, r) = 2 \left[ r \operatorname{ctg} \beta_1 - (z - \operatorname{ctg} \beta_1) + \frac{2(z - \operatorname{ctg} \beta_1)}{\sigma^2} \right]$$

Полные эллиптические интегралы третьего рода  $J_1$  и  $J_2$  приводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода.

Нетрудно убедиться, что  $\sigma^2 \leq n_1$ , следовательно, введением вспомогательного угла  $\delta_1$  посредством уравнения  $n_1 = 1 - \sigma'^2 \sin^2 \delta_1$ ,  $J_1$  примет вид [4]:

$$J_1(-n_1, \sigma) = \frac{\sqrt{1 - \sigma'^2 \sin^2 \delta_1}}{\sigma'^2 \sin \delta_1 \cos \delta_1} \left[ (K_\sigma - E_\sigma) F'(\delta_1) - K_\sigma E'(\delta_1) + \frac{\pi}{2} \right] + K_\sigma'$$

Здесь сохранены прежние обозначения.

Что касается  $J_2(-n_2, \sigma)$ , то он тоже сведется к эллиптическим интегралам первого и второго родов. В этом случае введем вспомогательный угол  $\delta_2$  посредством уравнения

$$-n_2 = \operatorname{ctg}^2 \delta_2 \quad (n_2 < 0)$$

получим:

$$J_2(-n_2, \sigma) = K_\sigma \sin^2 \delta_2 + \sqrt{\frac{\sin \delta_2 \cos \delta_2}{1 - \sigma'^2 \sin^2 \delta_2}} \left[ (K_\sigma - E_\sigma) F'(\delta_2) - K_\sigma E(\delta_2) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Эта формула была предложена Ф. И. Франклем. Формулы для  $J_1$  и  $J_2$  могут быть проверены путем решения относительно скобок, содержащих неполные эллиптические интегралы и дифференцирования по верхнему пределу; см. также [5].

Рассмотрим теперь особенности функции  $v_{1r}$  и  $v_{1z}$ .<sup>1°</sup> При  $\operatorname{ctg} \beta_1 > z$  возможны два подслучая: а)  $z < z_1$ , б)  $z > z_1$ .

Если обозначим через  $v_{1z}^{(1)}$ ,  $v_{1z}^{(2)}$  и  $v_{1r}^{(1)}$ ,  $v_{1r}^{(2)}$  предельные значения соответственно осевых и радиальных составляющих скоростей на внутренней и внешней сторонах конуса, то в случае  $z < z_1$

$$v_{1z}^{(1)} - v_{1z}^{(2)} = \frac{\gamma_1 r_1^2}{r^2} \cos \beta_1, \quad v_{1r}^{(1)} - v_{1r}^{(2)} = -\frac{\gamma_1 r_1^2}{r^2} \sin \beta_1$$

Иначе говоря, на поверхности конуса (для  $z < z_1$ ) касательная составляющей скорости имеет разрыв  $\gamma_1 r_1^2 / r^2$ , как это и должно быть по предположению.

В случае  $z > z_1$ , эта скорость не имеет разрыва, так как слагаемое, которое содержит  $J_2$  в формулах (29) и (30), дает разрывы, равные по величине и противоположные по знаку тем разрывам, которые имеются в формулах (29) и (30) в явном виде, следовательно, они уничтожаются.

<sup>2°</sup> при  $\operatorname{ctg} \beta_1 < z$  подобно случаю  $z > z_1$ , касательная составляющей скорости также не имеет разрыва.

Таким образом,  $v_z$  и  $v_r$  полностью вычислены и исследованы.

Подставляя выражения  $v_z$  и  $v_r$  в (4), получаем интегро-дифференциальное уравнение для  $\gamma(z)$  и  $r(z)$

$$v_{1r} + v_{2r} + v_{3r} - (v_{1z} + v_{2z} + v_{3z}) \frac{dr}{dz} = 0 \quad (33)$$

Решая это интегро-дифференциальное уравнение, определим форму струи и распределение скоростей вдоль твердой стенки.

Уравнение (33) решается приближенно.

Ниже вычисления выполнены для случая  $\beta = 1/4\pi$ . Для решения уравнения (33) в первом приближении форма струи бралась из плоской задачи [1], тогда (33) превратится в интегральное уравнение для  $\gamma(z)$ . После определения  $\gamma(z)$  найдется форма струи во втором приближении и т. д.

Если ширину струи в бесконечности вниз по течению в плоской задаче обозначить через  $2b$ , то радиус струи в бесконечности в пространственной задаче опреде-

ляется величиной  $r_0 = \sqrt{b}$ . Затем, проводится из бесконечности цилиндр радиусом  $r_0$ , вплоть до искривленной части струи плоской задачи, и эта форма струи принимается за первое приближение. Метод решения уравнения (33) заключается в следующем: так как  $dr/dz = -1$  при  $\beta = 1/4\pi$ , то из (33)

$$v_{1r} + v_{2r} + v_{3r} + v_{1z} + v_{2z} + v_{3z} = 0 \quad (34)$$

Здесь все слагаемые, кроме  $v_{2r}$  и  $v_{2z}$ , сведены к полным эллиптическим интегралам первого, второго и третьего рода.  $v_{2r}$  и  $v_{2z}$  — содержат интегралы, которые найдены численно в точках

$$z = -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9$$

Интегральное уравнение (34) тогда сводится, как обычно, к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 1. & 917 \gamma_1 + 0.591 \gamma_2 + 0.804 \gamma_3 + 1.264 \gamma_4 + 1.993 \gamma_5 = 1.361 \\ 2. & 241 \gamma_1 + 0.790 \gamma_2 + 1.232 \gamma_3 + 1.923 \gamma_4 - 0.879 \gamma_5 = 0.817 \\ 2. & 691 \gamma_1 + 1.215 \gamma_2 + 1.870 \gamma_3 - 0.939 \gamma_4 - 0.583 \gamma_5 = 0.437 \\ 3. & 444 \gamma_1 - 1.828 \gamma_2 - 0.984 \gamma_3 - 0.618 \gamma_4 - 0.272 \gamma_5 = 0.247 \\ 4. & 236 \gamma_1 - 1.022 \gamma_2 - 0.646 \gamma_3 - 0.297 \gamma_4 - 0.155 \gamma_5 = 0.168 \end{aligned}$$

Решая эту систему приближенно, получим:

$$\begin{aligned} \gamma_5 = \gamma(-0.2) & \approx 0.296, \quad \gamma_4 = \gamma(-0.4) \approx 0.243, \quad \gamma_3 = \gamma(-0.6) \approx 0.184, \\ \gamma_2 = \gamma(-0.8) & \approx 0.136 = \gamma_1 = \gamma(-1) \approx 0.119 \end{aligned}$$

Для формы струи в первом приближении были приняты:

$$\begin{array}{cccccc} z = & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ r(z) = & 1 & 0.938 & 0.8957 & 0.8690 & 0.8645 & 0.8645 \end{array}$$

При этой форме струи для  $\gamma(z)$  получаем:

$$\begin{array}{cccccc} z = & -0.2 & -0.4 & -0.6 & -0.8 & -1.0 \\ \gamma(z) = & 0.296; & 0.243; & 0.184; & 0.134; & 0.119; \end{array}$$

Для нахождения формы струи во втором приближении используем соотношения  $dr/dz = v_r/v_z$ , тогда получаем:

$$\begin{array}{cccccc} z = & 0.05, & 0.15, & 0.25 & 0.35, & 0.45 \\ dr/dz = & -0.4953, & -0.3250, & -0.2160, & -0.1794, & -0.0338 \end{array}$$

поэтому из

$$r = 1 + \int_0^z \left( \frac{dr}{dz} \right) dz$$

получим

$$\begin{array}{cccccc} z = & 0.05, & 0.15, & 0.25, & 0.35, & 0.45 \\ r(z) = & 0.9626, & 0.9266, & 0.8996, & 0.8798, & 0.8691 \end{array}$$

Таким образом, коэффициент расхода во втором приближении приблизительно равен 0.75.

Поступила 5 VIII 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

- Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости данной на неизвестной линии тока. Полн. собр. соч. т. III, ОНТИ НКТП, М.—Л., 1936.
- Treffitz E. Über die kontraktionen kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen. Z. angew. Math. und Phys. Bd. 64, № 1, 1916.
- Кочин Н. Е., Розе Н. В., Кибель А. И. Теоретическая гидромеханика. т. I, 1955.
- Жуковский Н. Е. Полн. собр. соч., т. 6, 1937 (см. дополнение В. П. Ветчинкина к статье Вихревая теория гребного винта (статья первая), стр. 138).
- Tricomi F. Elliptic Functions and Integrals (в книге коллектива авторов) Higher Transcendental Functions, v. II, New York-Toronto-London, 1953.
- Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Изд. АН СССР, 1950.