

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ И СОУДАРЕНИЯ СТРУЙ

Э. П. Борисова, П. П. Корявов, Н. Н. Моисеев

(Москва)

В настоящей работе проводится анализ общей задачи о погружении твердого конического тела в соосную коническую область, занятую идеальной несжимаемой и невесомой жидкостью, со скоростью, которая является степенной функцией времени. Рассматривается как плоский, так и осесимметричный случай.

Частным случаем этой общей задачи является задача о погружении клина с постоянной скоростью [1-5]. К этой же задаче может быть сведено исследование неустановившейся модели кумулятивного взрыва снаряда с конической оболочкой.

Предлагается некоторый приближенный метод расчета силы сопротивления и эпюры скоростей вдоль свободной поверхности (в частности, расчет скорости брызговой струи или вершины кумулятивной струи), годный для любых геометрических характеристик.

§ 1. Постановка задачи. 1°. Будем рассматривать погружение клина в идеальную невесомую жидкость. В начальный момент ($t = 0$) жидкость покоится и занимает внутренность угла, имеющего общую вершину с клином (фиг. 1). Предполагается, что клин и область τ , занятая жидкостью, имеют вертикальную ось симметрии. Скорость движения клина направлена вертикально вниз и считается заданной. Она зависит от времени по степенному закону

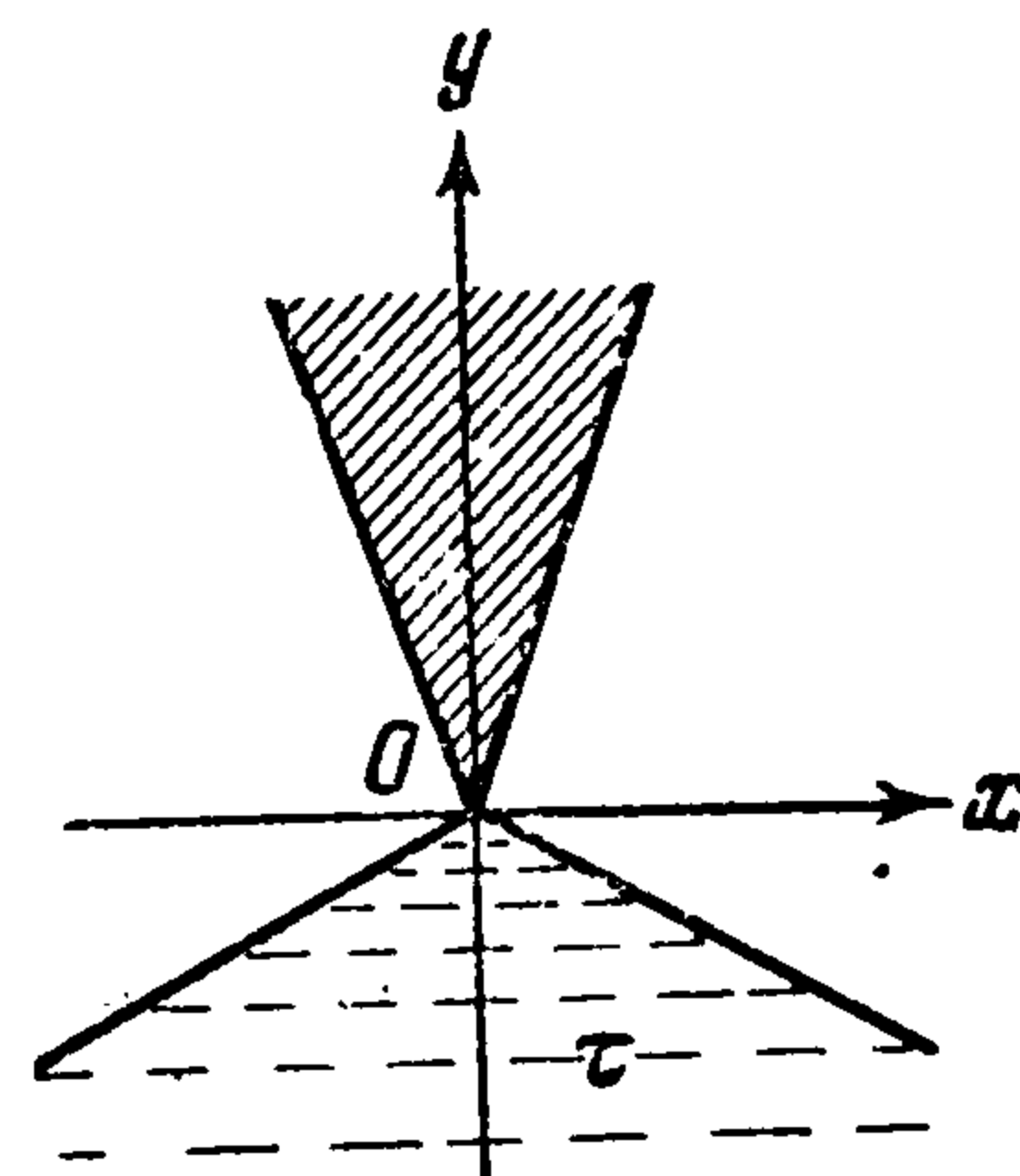
$$V = -ct^\gamma y^\alpha$$

Вследствие давления клина жидкость начнет двигаться. Так как массовые силы отсутствуют, то это движение будет потенциальным. Потенциал $\varphi(x, y, t)$ будет удовлетворять следующей краевой задаче (см. фиг. 2, где приведены обозначения):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 && \text{в области } \tau \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= V \cos \alpha && \text{на } B'AB \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] &= 0 && \text{на } S \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь нормаль берется внутренней по отношению к жидкости, S — свободная поверхность $y = \zeta(x, t)$. Она заранее не известна и определяется из кинематического условия

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=\zeta} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

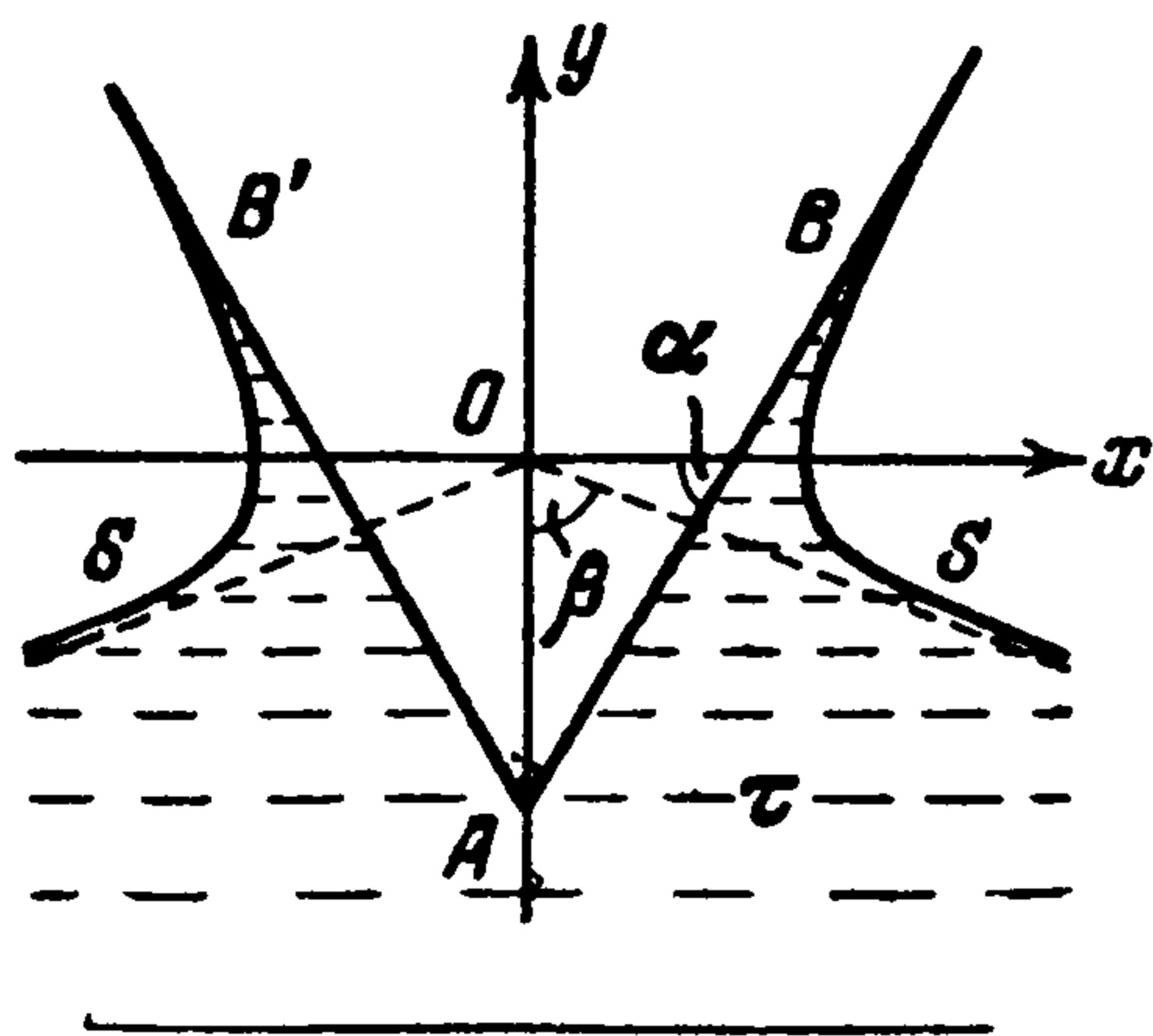
Кроме того, должны быть выполнены условие регулярности

$$\lim \nabla \varphi = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

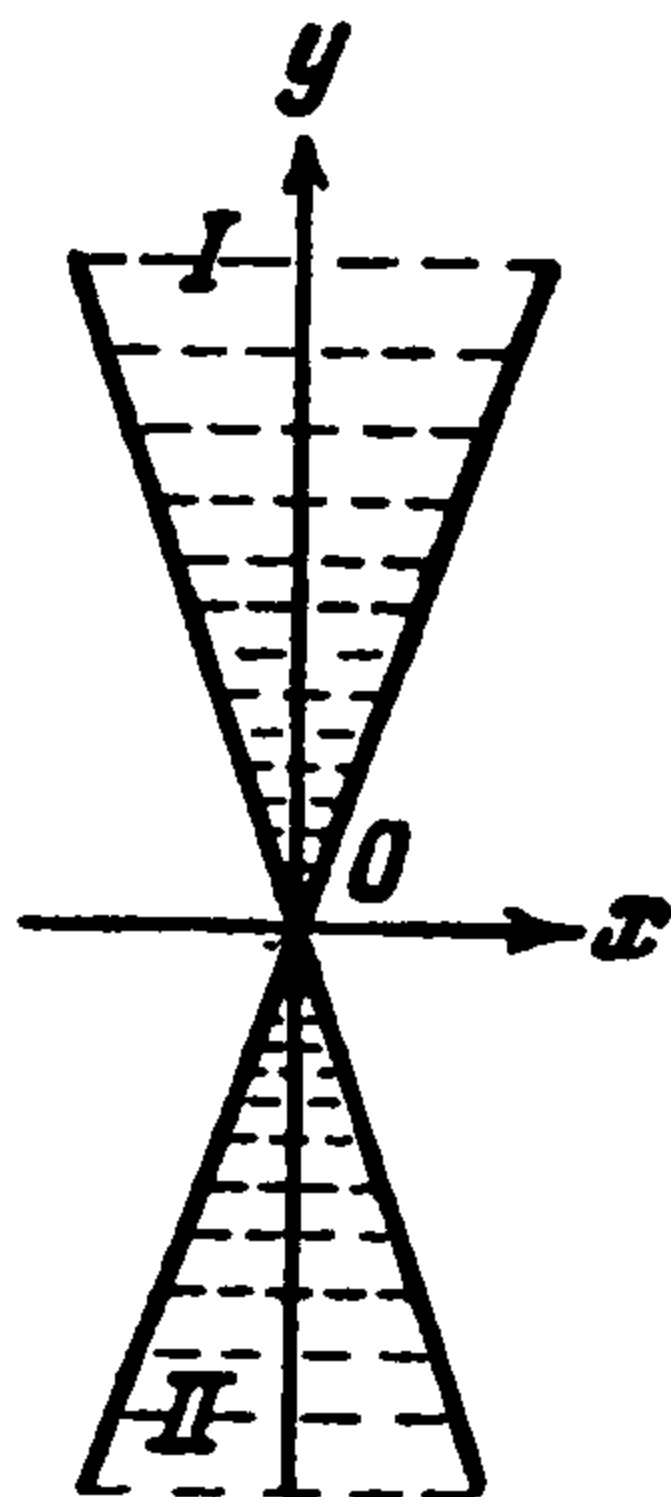
и начальное условие

$$\varphi(0, x, y) = 0, \quad \zeta(0, x) = -|x| \operatorname{ctg} \beta \quad (1.4)$$

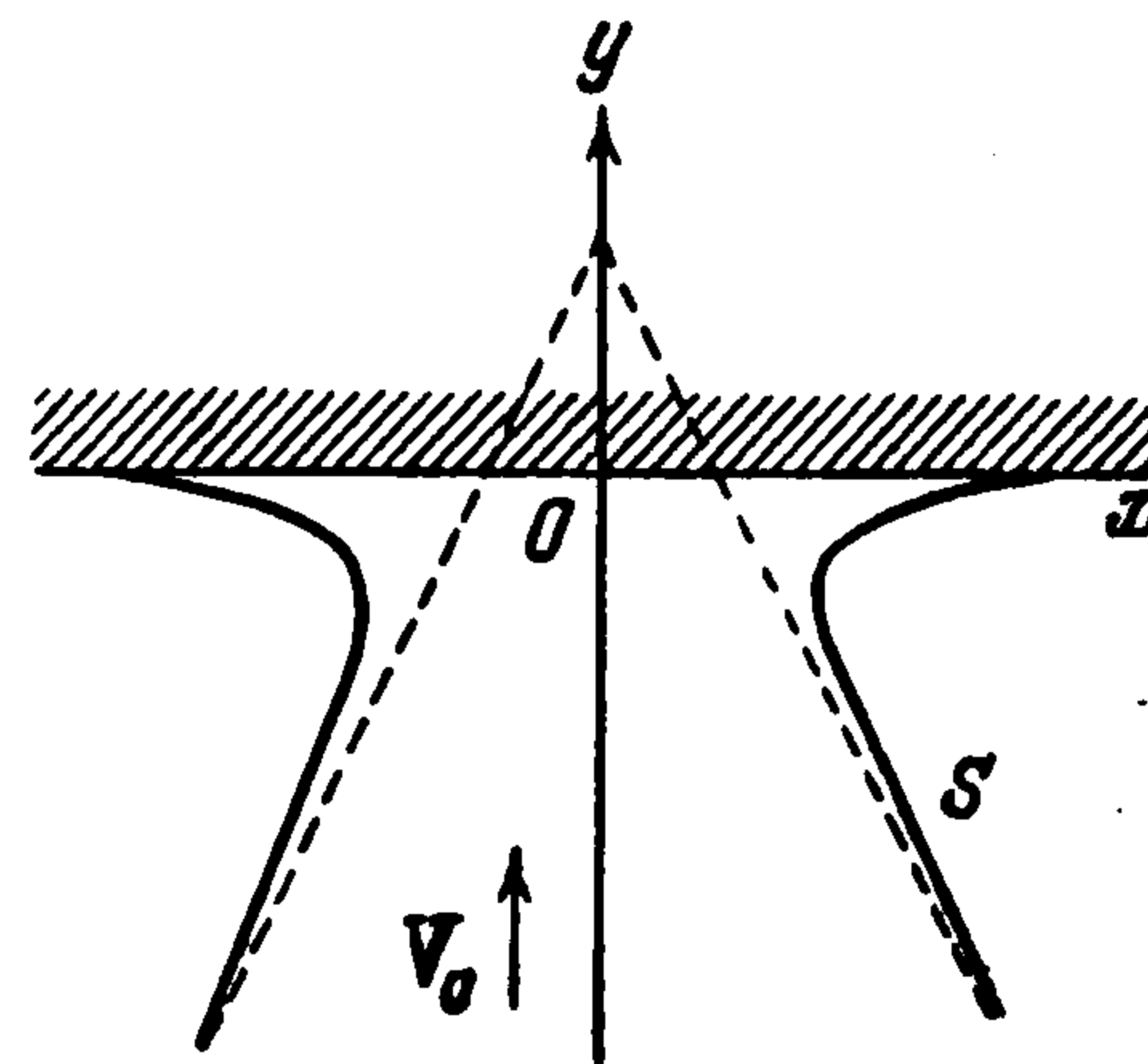
2°. Задача о погружении клина будет частным случаем этой задачи, когда угол $\beta = 1/2\pi$. Задача Вагнера — Седова о погружении клина с



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

постоянной скоростью получится из рассматриваемой задачи, если показатель степени $\gamma = 0$. Задача о симметричном соударении струй также является частным случаем рассматриваемой задачи, если предположить, что струи I и II (фиг. 3) геометрически подобны и симметрично расположены относительно осей x и y , в начальный момент имеют общую точку O , а на бесконечности скорости жидких частиц равны по величине, направлены навстречу и изменяются по степенному закону.

В силу симметрии ось x будет линией тока. Если ввести систему координат, связанную с плоскостью, и положить $\alpha = 0$, то рассматриваемая задача сведется к задаче о растекании струи по плоскости (фиг. 4).

Замечание. Очевидно, что к этой же задаче может быть сведена задача о растекании под действием силы тяжести жидкого клина, который в начальный момент покоился. В этом случае следует положить $\alpha = 0$ и $\gamma = 1$.

3°. Задача (1.1) — (1.4) автомодельная. В силу этого решение будет зависеть от двух безразмерных комбинаций переменных x , y и t .

В силу симметрии потока относительно оси y нам достаточно рассмотреть течение справа от оси y .

Введем безразмерные переменные ξ и η по формулам

$$\xi = \frac{x}{ct^{\gamma+1}} \sin \alpha - \frac{y}{ct^{\gamma+1}} \cos \alpha - \cos \alpha \quad (1.5)$$

$$\eta = \frac{x}{ct^{\gamma+1}} \cos \alpha + \frac{y}{ct^{\gamma+1}} \sin \alpha + \sin \alpha$$

Потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$ и уравнение свободной границы $\zeta(x, t)$ представим в форме

$$\varphi = c^2 t^{2\gamma+1} \Phi(\xi, \eta), \quad y = \zeta(x, t) = ct^{\gamma+1} \{f(\xi) \sin \alpha - \xi \cos \alpha - 1\} \quad (1.6)$$

где Φ и f — искомые безразмерные функции.

Выбранная таким образом система координат ξ и η удобна тем, что в ней свободная граница $\eta = f(\xi)$ будет однозначной функцией переменного ξ .

В переменных ξ, η области τ , форма которой менялась во времени, соответствует некоторая вполне определенная неизменяющаяся область $\bar{\tau}$ (фиг. 5).

Функция $\Phi(\xi, \eta)$ в области $\bar{\tau}$ будет гармонической по переменным ξ и η :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0$$

Уравнение щеки клина в выбранной системе координат будет $\xi = 0$. Найдем граничные условия для функции Φ .

Для этого сначала вычислим значения производных функции $\varphi(x, y, t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c^2 t^{2\gamma} \left\{ (2\gamma + 1) \Phi - (\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - (\gamma + 1) (\eta - \sin \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ct^\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sin \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cos \alpha \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = ct^\gamma \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sin \alpha \right)$$

Обозначим через \mathbf{n}° вектор внешней нормали к поверхности клина. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) = ct^\gamma \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sin \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cos \alpha \right) \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sin \alpha \right) (-\cos \alpha) \right\} = ct^\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в первое из условий (1.1), найдем, что вдоль $B'AB$ функция Φ удовлетворяет условию

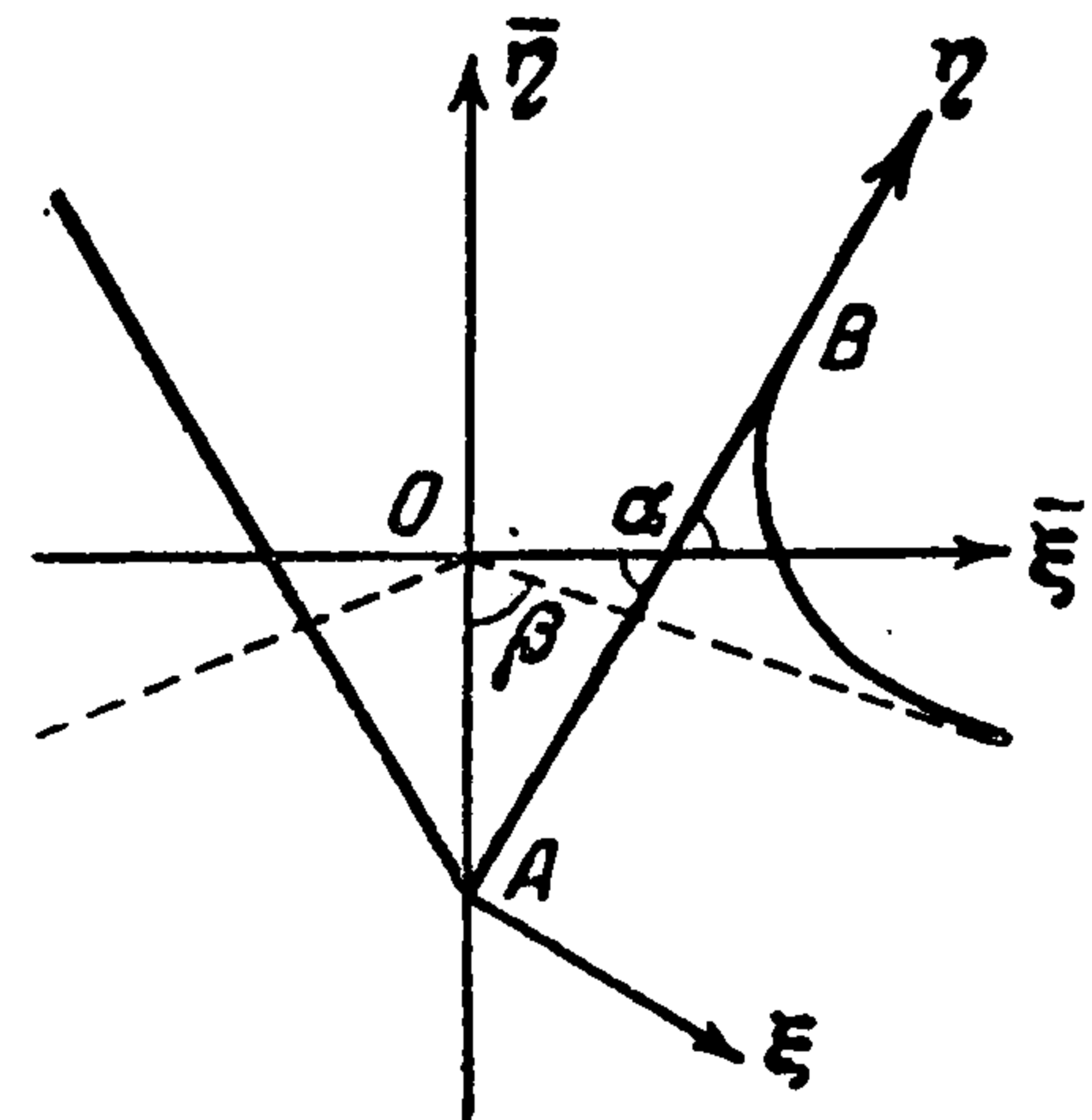
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \cos \alpha \quad (1.7)$$

Асимптотическое условие (1.3), очевидно, останется в силе, т. е.

$$\lim \nabla \Phi = 0 \quad \text{при } \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

А условие постоянства давления [второе из условий (1.1)] примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (2\gamma + 1) \Phi - (\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - (\gamma + 1) (\eta - \sin \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$



Фиг. 5

Преобразуем далее кинематическое условие

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=\xi}$$

В безразмерных переменных оно будет иметь вид:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} \right)_{\eta=f(\xi)} = \left\{ ct^\gamma \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sin \alpha \right) \right\}_{\eta=f(\xi)} \quad (1.10)$$

Проведем вспомогательные вычисления:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (\gamma + 1) ct^\gamma \{ f(\xi) \sin \alpha - \xi \cos \alpha - 1 \}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi} = ct^{\gamma+1} \{ f'(\xi) \sin \alpha - \cos \alpha \}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -(\gamma + 1) \frac{x}{ct^{\gamma+2}} \sin \alpha + (\gamma + 1) \frac{y}{ct^{\gamma+2}} \cos \alpha = -(\gamma + 1) \frac{1}{t} (\xi + \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sin \alpha}{ct^{\gamma+1}} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\cos \alpha}{ct^{\gamma+1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -(\gamma + 1) \frac{1}{t} (\xi + \cos \alpha) + \frac{\sin \alpha}{ct^{\gamma+1}} ct^\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sin \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cos \alpha \right) - \\ &- \frac{\cos \alpha}{ct^{\gamma+1}} ct^\gamma \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sin \alpha \right) = -(\gamma + 1) \frac{1}{t} (\xi + \cos \alpha) + \frac{1}{t} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Здесь и далее штрих означает производную по ξ . Подставляем эти выражения в условие (1.10) и, производя несложные преобразования, приведем его к виду

$$(\gamma + 1) \{ f - \sin \alpha - f' \xi - f' \cos \alpha \} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} f' = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

Введем обозначения скоростей

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = v$$

и окончательно кинематическое условие вдоль свободной границы будем писать так:

$$v = (f - \sin \alpha) (\gamma + 1) - f' \{ (\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) - u \} \quad (1.11)$$

4°. Заметим одно важное для дальнейшего обстоятельство: если уравнение свободной поверхности известно, т. е. если известна функция $f(\xi)$ (например, из эксперимента), то распределение скоростей u и v вдоль свободной поверхности сводится к решению обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения. Для того чтобы получить это уравнение, надо исключить v из уравнений (1.9) и (1.11).

В уравнении (1.11) все функции зависят от ξ . Дифференцируя его, получим

$$v' = f' u' - f'' \{ (\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) - u \} \quad (1.12)$$

Затем, приняв во внимание, что вдоль свободной границы

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = u + f' v$$

продифференцируем полным образом динамическое соотношение (1.9):

$$\gamma u + \gamma v f' + (\gamma + 1) \left\{ u' \left(\xi + \cos \alpha - \frac{u}{\gamma + 1} \right) + v' \left(f - \sin \alpha - \frac{v}{\gamma + 1} \right) \right\} = 0$$

Заменив в этом уравнении v' его выражением (1.12), получим

$$\begin{aligned} & \gamma u + \gamma v f' - (\gamma + 1) \left\{ u' \left(\xi + \cos \alpha - \frac{u}{\gamma + 1} \right) + [f' u' - \right. \\ & \left. - f'' \langle (\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha - u) \rangle] \left(f - \sin \alpha - \frac{v}{\gamma + 1} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Из этого уравнения можно исключить v при помощи уравнения (1.11). После очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} & [(\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) - u] [u' (1 + f'^2) - f' f'' \{ (\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) - u \} + \\ & + \gamma f''^2] = \gamma u + \gamma (\gamma + 1) f' (f - \sin \alpha) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) — это обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Мы должны найти его решение, обращающееся в нуль при $\xi = \infty$. Кроме того, решение должно удовлетворять условию (1.7), т. е. $u(0) = \cos \alpha$. Таким образом, мы приходим к краевой задаче для уравнения первого порядка. Вообще говоря, эта задача неразрешима. Ниже мы увидим, что лишнее условие может быть использовано для разумного задания формы свободной поверхности.

Уравнение (1.13) упрощается, если $\gamma = 0$ (скорость клина или струи постоянна):

$$(\xi + \cos \alpha - u) [u' (1 + f'^2) - f' f'' (\xi + \cos \alpha - u)] = 0 \quad (1.14)$$

На границе клина ($\xi = 0$) нормальная составляющая скорости клина $u = \cos \alpha$. Причем из физических соображений ясно, что $u < \cos \alpha$ для любого $\xi > 0$. Поэтому множитель

$$\xi + \cos \alpha - u \neq 0$$

ни для какого $\xi \neq 0$. И, следовательно, из уравнения (1.14) имеем

$$u' = \frac{f' f'' (\xi + \cos \alpha - u)}{1 + f'^2} \quad (1.15)$$

Если $f(\xi)$ задана, то это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно u . Таким образом если $\gamma = 0$, то решение может быть определено в квадратурах. Затем, подставляя найденное решение в кинематическое условие (1.11), определим скорость v без дополнительных квадратур. Однако случай $\gamma = 0$ не исчерпывает совокупность значений параметра γ , при которых уравнение (1.13) разрешимо в квадратурах.

Для того чтобы подробнее выяснить это обстоятельство, представим уравнение (1.13) в несколько иной форме. Разрешая относительно u' , получим

$$u' = \frac{f' f'' [(\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) - u]}{1 + f'^2} - \frac{\gamma f'^2}{1 + f'^2} + \frac{\gamma u + (\gamma + 1) \gamma (f - \sin \alpha) f'}{(1 + f'^2) [(\gamma + 1) (\xi + \cos \alpha) - u]} \quad (1.16)$$

Введем новое переменное $y = (\gamma + 1)(\xi + \cos \alpha) - u$. Тогда уравнение (1.16) примет вид:

$$y' = -\frac{f'f''}{1+f'^2}y + (2\gamma + 1) - \frac{B}{y} \quad (1.17)$$

где

$$B = \frac{\gamma(\gamma + 1)[f'(f - \sin \alpha) + \xi + \cos \alpha]}{1 + f'^2}$$

Если $\gamma = 0$, то $B = 0$ и получаем

$$y' = -\frac{f'f''}{1+f'^2}y + 1$$

Это уравнение совпадает с (1.15). Уравнение (1.17) сводится к линейному еще в двух случаях:

1. В случае $\gamma = -1$. Имеем $B = 0$ и, следовательно,

$$y' = -\frac{f'f''}{1+f'^2}y - 1$$

2. В случае $\gamma = -1/2$; посредством замены переменного $y^2 = z$ приходим к линейному уравнению первого порядка

$$z' = -\frac{f'f''}{2(1+f'^2)}z - \frac{B}{2}$$

§ 2. Определение суммарной силы давления жидкости. Вычислим силу сопротивления клина. Обозначим через K количество движения в объеме τ , тогда

$$\frac{dK}{dt} + F = 0 \quad (2.1)$$

где F — вектор суммарного воздействия жидкости на клин. В силу симметрии его проекция на ось x будет равна нулю. Для другой проекции будем иметь

$$F_y = -\frac{dK_y}{dt} \quad (2.2)$$

Вычислим K_y :

$$K_y = \rho \int_{\tau} v_y d\tau = \rho \int_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial y} d\tau \quad (2.3)$$

Если ввести безразмерные переменные

$$\bar{\xi} = \frac{x}{ct^{\gamma+1}}, \quad \bar{\eta} = \frac{y}{ct^{\gamma+1}}$$

то получим

$$K_y = \rho c^3 t^{3\gamma+2} K^* \quad \left(K^* = \int_{\bar{\tau}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \right) \quad (2.4)$$

Область $\bar{\tau}$ в переменных $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ фиксирована, поэтому сила сопротивления будет

$$F_y = -\frac{dK_y}{dt} = -\rho(3\gamma + 2)c^3 t^{3\gamma+1} K^* \quad (2.5)$$

Преобразуем интеграл, стоящий в выражении (2.5), по формуле Грина

$$K^* = \int_{\bar{\tau}} \nabla \Phi \cdot \nabla \eta \, d\bar{\xi} \, d\bar{\eta} = \int_{\bar{S}} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS$$

Здесь \bar{S} — поверхность, заключающая объем $\bar{\tau}$. Примем вначале, что она состоит из свободных поверхностей S_1 и S_2 , щек клина σ_1 и σ_2 и дуги достаточно большого радиуса R (фиг. 6), нормаль здесь берется внешней по отношению к жидкости,

$$K^* = \int_{S_1+S_2} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS + \int_{\sigma_1+\sigma_2} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS + \int_{S_R} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS$$

В силу симметрии это выражение можно представить в виде

$$K^* = 2J_1 + 2J_2 + J_3$$

где

$$J_1 = \int_{S_1} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS, \quad J_2 = \int_{\sigma_1} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS, \quad J_3 = \int_{S_R} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS \quad (2.6)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_3 = \int_{S_R} \Phi \eta^\circ \, dS = - \int_{S_R} \Phi \cos \theta \, dS$$

Здесь n — нормаль, внешняя по отношению к жидкости, S — внешняя по отношению к клину, η° обозначает единичный вектор оси $\bar{\eta}$. Ясно, что $\nabla \bar{\eta} = \eta^\circ$.

Рассмотрим разложение в ряд Лорана комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ в окрестности точки $\bar{\zeta} = \bar{\xi} + i\bar{\eta} = \infty$. Так как на бесконечности жидкость покоится $(dW/dz)_\infty = 0$, то разложение $W(z)$ не содержит положительных степеней z . Следовательно,

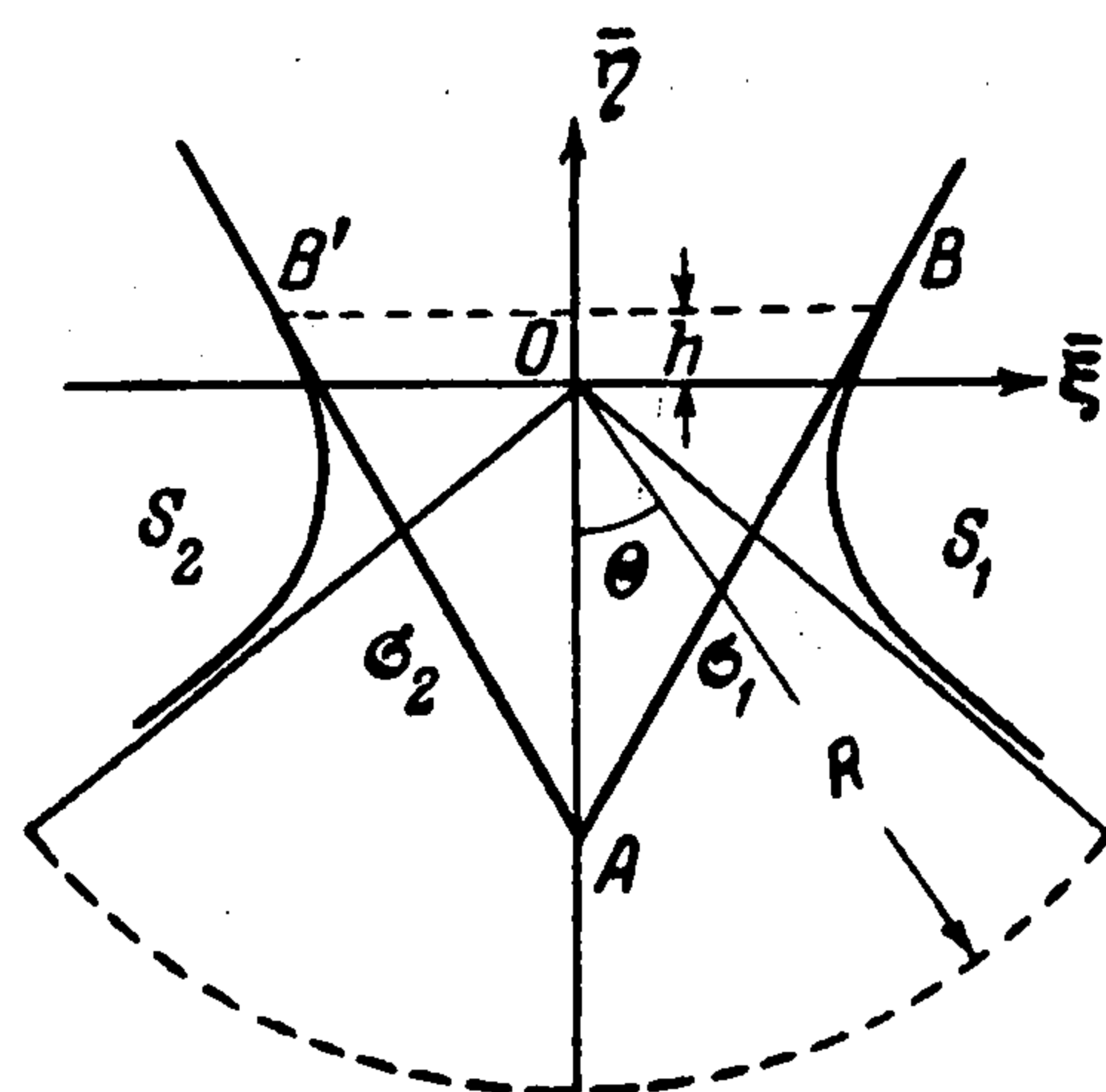
$$W = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Не ограничивая общности, можем положить $a_0 = 0$. (В начальный момент жидкость покоилась: $\varphi \equiv 0$ при $t = 0$; так как на бесконечности жидкость покоится при любом t , то $(\varphi)_\infty \equiv 0$, откуда $(W)_\infty = 0$.) Коэффициент a_1 также равен нулю, так как в силу симметрии протекание жидкости через ось $\bar{\eta}$ не происходит и, следовательно, циркуляция равна нулю. Поэтому потенциал $\Phi = \text{Re } W$ может быть представлен следующей формулой:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\chi(r, \theta)}{r^2}$$

где функция $\chi(r, \theta)$ ограничена для любых θ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, в равенстве (2.6)

$$\lim J_3 = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$



Фиг. 6

Для интеграла J_2 в равенстве (2.6) имеем

$$2J_2 = -2 \int_{\sigma_1} \bar{\eta} \cos \alpha dS = 2 \int_{\sigma_1} \eta \cdot dS$$

Обозначим через τ_1 объем клина, погруженный в жидкость:

$$\tau_1 = \int_{\tau_1} d\tau = \int_{\tau_1} \operatorname{div} \bar{\eta} d\tau = 2 \int_{\sigma_1} \eta \cdot dS + \int_{BB'} \eta \cdot dS$$

Вдоль BB' величина $\bar{\eta} = h = \text{const}$. Таким образом, если обозначить через L длину отрезка BB' , то

$$2 \int_{\sigma_1} \eta \cdot dS = \tau_1 - hL$$

Но так как $OA = 1$, то из фиг. 6 найдем

$$L = 2(h + 1) \operatorname{ctg} \alpha$$

Итак,

$$J_2 = \tau_1 - 2h(h + 1) \operatorname{ctg} \alpha = (1 - h^2) \operatorname{ctg} \alpha$$

так как

$$\tau_1 = (h + 1)^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

Интеграл запишем в системе координат ξ, η (фиг. 5). Используя то, что

$$\bar{\eta} = f(\xi) \sin \alpha - \xi \cos \alpha - 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} (v - f'u)$$

$$dS = \sqrt{1 + f'^2} d\xi$$

где $\eta = f(\xi)$ — форма свободной поверхности жидкости в этой системе координат, u и v — соответственно нормальная и тангенциальная к поверхности клина скорости жидкости, его можно представить в виде

$$\int_{\bar{\sigma}_1} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int_0^{\infty} [f(\xi) \sin \alpha - \xi \cos \alpha - 1] [v - f'(\xi) u] d\xi$$

И окончательно для K^* получаем такую формулу:

$$K^* = (1 - h^2) \operatorname{ctg} \alpha + 2 \int_0^{\infty} [f(\xi) \sin \alpha - \xi \cos \alpha - 1] [v - f'(\xi) u] d\xi \quad (2.7)$$

где

$$h = f(0) \sin \alpha - 1$$

Таким образом, если известна свободная поверхность, то задача определения силы сопротивления сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения и к квадратурам.

§ 3. Пространственные задачи. 1°. Рассмотрим теперь две пространственные задачи: задачу об осесимметричном погружении бесконечного конуса в идеальную несжимаемую жидкость и задачу об осесимметричной кумулятивной струе. Для определения потенциала скоростей $\varphi(x, y, t)$ будем иметь следующую краевую задачу (обозначения те же, что на

фиг. 2, только x теперь радиус — расстояние до оси симметрии y):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{в области } \tau \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= V \cos \alpha \quad \text{на } B'AB \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] &= 0 \quad \text{на } S \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь, как и раньше, нормаль берется внутренней по отношению к жидкости, S — свободная поверхность $y = \zeta(x, t)$, которая определяется из кинематического условия

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=\zeta} \quad (3.2)$$

Кроме того, должно выполняться условие регулярности

$$\lim \nabla \varphi = 0 \quad \text{при } y^2 + x^2 \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

и начальное условие

$$\varphi(x, y, 0) = 0, \quad \zeta(x, 0) = x \operatorname{ctg} \beta \quad (3.4)$$

Ввиду осевой симметрии относительно оси Oy достаточно рассмотреть течение лишь в какой-либо из полуплоскостей меридиональной плоскости.

Введем безразмерные координаты ξ и η (фиг. 5), связанные с x , y и t соотношениями (1.5), а потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$ и уравнение свободной границы $y = \zeta(x, t)$ представим в форме (1.6). Граничные условия на образующей конуса, на бесконечности и на свободной поверхности жидкости в системе координат ξ , η не изменят своего вида в сравнении с плоским случаем и будут описываться соответственно формулами (1.7), (1.8), (1.9) и (1.11), но само уравнение для потенциала $\Phi(\xi, \eta)$ будет другим. После несложных преобразований оно может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sin \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cos \alpha \right) = 0 \quad (3.5)$$

Анализ, проведенный для соотношений на свободной поверхности (см. § 1, 4°), имеет силу и в осесимметричном случае.

2°. Вычислим силу сопротивления конуса при его погружении в жидкость. Из теоремы о количестве движения следует, что сила F_y , действующая на конус в вертикальном направлении, равна

$$F_y = dK_y / dt \quad (3.6)$$

где K_y — компонента по оси y количества движения, заключенного в объеме τ . В силу симметрии, другие компоненты вектора количества движения жидкости равны нулю.

Для вычисления K_y

$$K_y = \rho \int_{\tau} v_y d\tau = \rho \int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\tau \quad (3.7)$$

перейдем к безразмерным переменным

$$\bar{\xi} = \frac{x}{ct^{\gamma+1}}, \quad \bar{\eta} = \frac{y}{ct^{\gamma+1}}, \quad \bar{\zeta} = \frac{z}{ct^{\gamma+1}} \quad (3.8)$$

Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = ct^\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad d\tau = \frac{D(x, y, z)}{D(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})} d\bar{\tau} = c^3 t^{3(\gamma+1)} d\bar{\tau} \quad (3.9)$$

$$K_y = \rho c^4 t^{4\gamma+3} K^*, \quad K^* = \int_{\bar{\tau}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\bar{\tau} \quad (3.10)$$

Из того, что область $\bar{\tau}$ в переменных $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ фиксирована, следует, что K^* не зависит от времени. Для силы сопротивления, таким образом, получаем выражение

$$F_y = -\rho(4\gamma + 3)c^4 t^{4\gamma+2} K^* \quad (3.11)$$

Преобразуем интеграл, стоящий в выражении (3.10):

$$K^* = \int_{\bar{\tau}} \nabla \Phi \cdot \nabla \bar{\eta} d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\bar{\zeta} = \int_{\bar{S}} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

где \bar{S} — поверхность, заключающая объем $\bar{\tau}$. Поверхность \bar{S} можно считать состоящей из смоченной поверхности конуса σ , свободной поверхности S и поверхности сферы достаточно большого радиуса S_R . Тогда для K^* получаем выражение

$$K^* = \int_{\sigma} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + \int_{S} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + \int_{S_R} \bar{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (3.12)$$

Продельвая вычисления, аналогичные тем, которые были проведены в плоском случае, получаем окончательно для K^* формулу

$$K^* = \frac{1}{3} \pi \operatorname{ctg}^2 \alpha (1+h)^2 (1-2h) + \quad (3.13)$$

$$+ 2\pi \int_0^\infty [f(\xi) \sin \alpha - \xi \cos \alpha - 1] [f(\xi) \cos \alpha + \xi \sin \alpha] [v - f'(\xi) u] d\xi$$

где $\eta = f(\xi)$ — форма свободной поверхности жидкости в системе координат ξ , η ; u и v — скорости соответственно нормальная и тангенциальная к образующей конуса, $h = f(0) \sin \alpha - 1$. Теперь при помощи соотношения (3.11) можно найти силу, действующую на погружающийся конус, если известна форма свободной поверхности жидкости $\eta = f(\xi)$.

§ 4. Схема численного решения. Для того чтобы вычислить приближенное значение сил, действующих на тело, и распределение скоростей вдоль свободной границы, достаточно приближенно определить ее форму. Это можно сделать, используя законы сохранения. В частности, если ограничиться одним законом сохранения массы, то свободную поверхность можно аппроксимировать выражением:

$$\eta = f(\xi) = a\xi + b + de^{-c\xi} \quad (c > 0) \quad (4.1)$$

Так как на бесконечности жидкость покоится, то свободная граница в системе координат ξ , η имеет асимптоту

$$\eta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \xi + \frac{\sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)}$$

где α — угол между щекой клина (образующей конуса) и осью Ox , β — угол полураствора жидкого клина (конуса) (фиг. 5).

Следовательно, коэффициенты a и b будут

$$a = \operatorname{tg}(\beta - \alpha), \quad b = \frac{\sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)} \quad (4.2)$$

Далее, из условия несжимаемости жидкости следует, что объем погруженного тела равен объему вытесненной им жидкости. Это условие дает одно из уравнений для определения коэффициентов c и d :

в плоском случае

$$\frac{d}{c} = \frac{1}{2} \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha)} \quad (4.3)$$

в пространственном случае

$$d^2 + 4 \left(\frac{1}{c} + \cos \alpha \right) \frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos(\beta - \alpha)} d - \frac{2}{3} c \frac{\sin^2 \beta \cos \alpha}{\cos^2(\beta - \alpha)} = 0 \quad (4.4)$$

Второе уравнение, связывающее эти коэффициенты, можно получить следующим образом. Для скорости u на свободной поверхности жидкости имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (1.15):

$$u' = \frac{f' f'' (\xi + \cos \alpha - u)}{1 + f'^2} \quad (4.5)$$

Однако функция u должна удовлетворять двум условиям: на бесконечности $u(\infty) = 0$ и на щеке клина (образующей конуса) $u(0) = \cos \alpha$. Первое условие используем для нахождения произвольной постоянной при решении уравнения (4.5). Условие же на щеке клина (образующей конуса) даст вторую связь между c и d , которая в плоском и пространственном случаях сведется к одному и тому же трансцендентному уравнению вида

$$\left(\cos \alpha + \frac{1}{c} \right) (V \sqrt{1 + y_0^2} - V \sqrt{1 + y_\infty^2}) - \frac{1}{c} \left[y_\infty \ln \frac{V \sqrt{1 + y_0^2} - y_0}{V \sqrt{1 + y_\infty^2} - y_\infty} + \right. \\ \left. + V \sqrt{1 + y_\infty^2} \ln \frac{1 + y_\infty y_0 + V \sqrt{1 + y_\infty^2} V \sqrt{1 + y_0^2}}{2(1 + y_\infty^2)} \right] - V \sqrt{1 + y_0^2} \cos \alpha = 0 \quad (4.6)$$

где

$$y_0 = f'(0) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) - cd, \quad y_\infty = f'(\infty) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$$

Таким образом, приближенно определяется свободная граница жидкости, вдоль которой кинематическое и динамическое условия удовлетворяются точно.

Теперь, используя выведенные в предыдущих параграфах формулы, можно найти приближенно значение нормальной скорости на свободной поверхности и суммарную силу, действующую на погружающийся клин (конус).¹

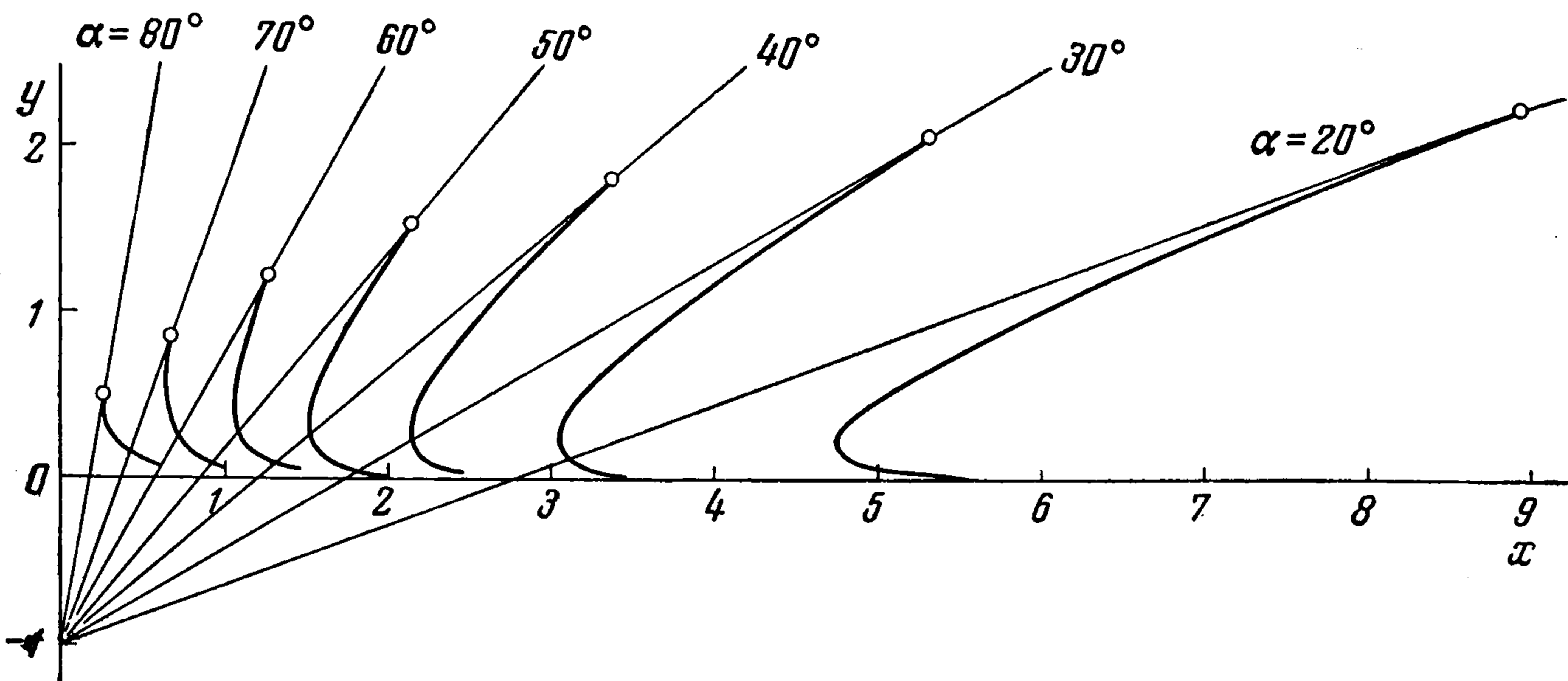
§ 5. Некоторые результаты вычислений. Пользуясь схемой, изложенной в предыдущем параграфе, был проделан ряд вычислений на быстродействующей счетной машине «Стрела».

Результаты вычислений и сравнение их с известным экспериментальным и расчетным материалом приведены ниже в виде ряда графиков.

Для клиньев с углами килеватости α , изменяющимися от 10° до 80° (с интервалом в 10°), были вычислены формы свободной поверхности (брызговой струи) (фиг. 7). Виден общий характер зависимости расстояния от вершины клина до вершины брызговой струи: при $\alpha \rightarrow \pi/2$ это расстояние стремится к нулю и, наоборот, при $\alpha \rightarrow 0$, оно стремится

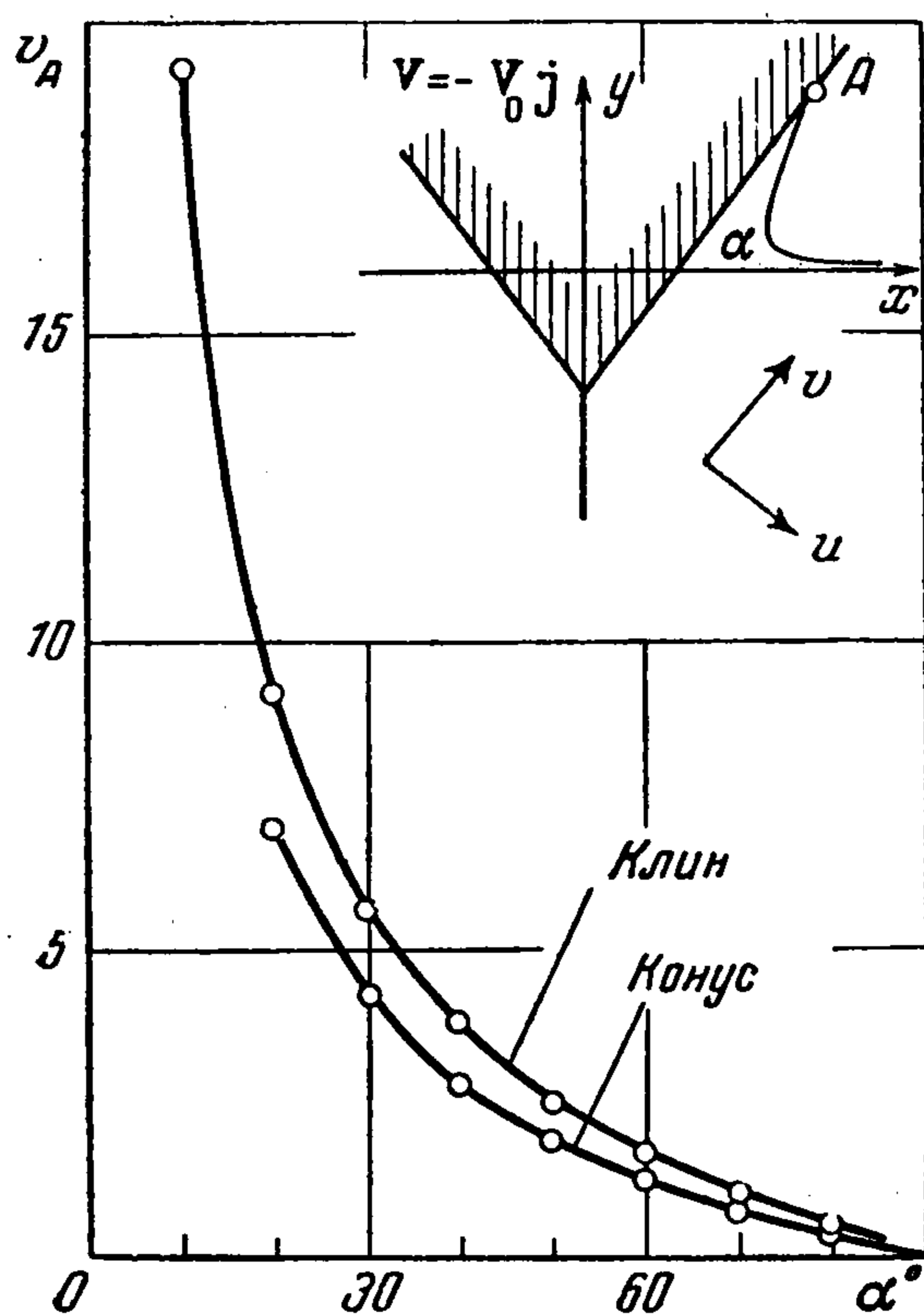
ся к бесконечности. Построены эюры скоростей вдоль свободной поверхности, из которых видно, что скорость вершины брызговой струи резко возрастает с уменьшением угла килеватости и стремится к бесконечности, когда клин разворачивается в пластинку (фиг. 8).

На фиг. 9 приведены результаты расчетов суммарной силы воздействия жидкости на клин в зависимости от угла килеватости α . Полу-

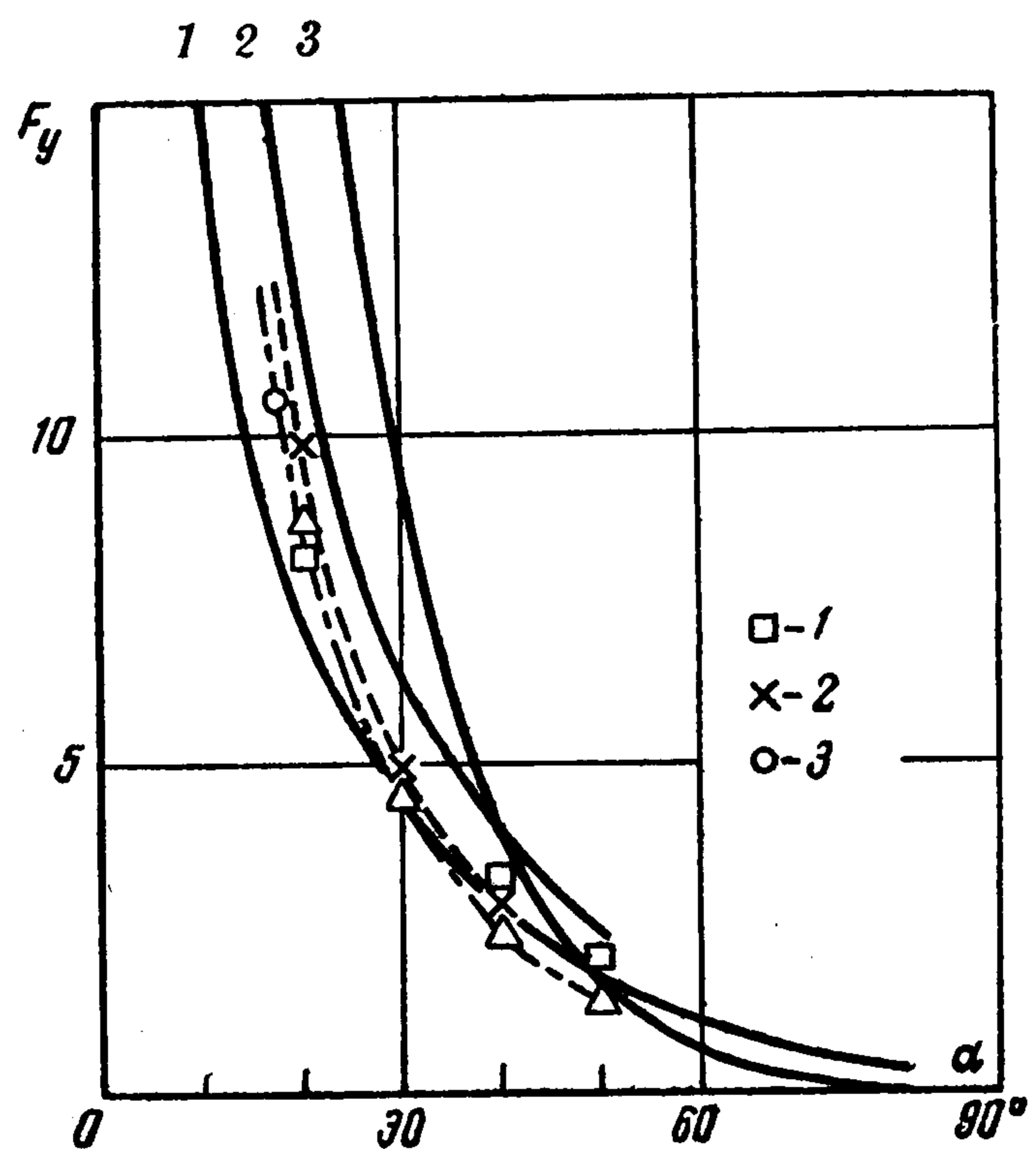


Фиг. 7

ченные нами результаты для широкого диапазона углов килеватости хорошо согласуются с экспериментальными и расчетными данными других авторов и могут быть рекомендованы для практических целей при



Фиг. 8



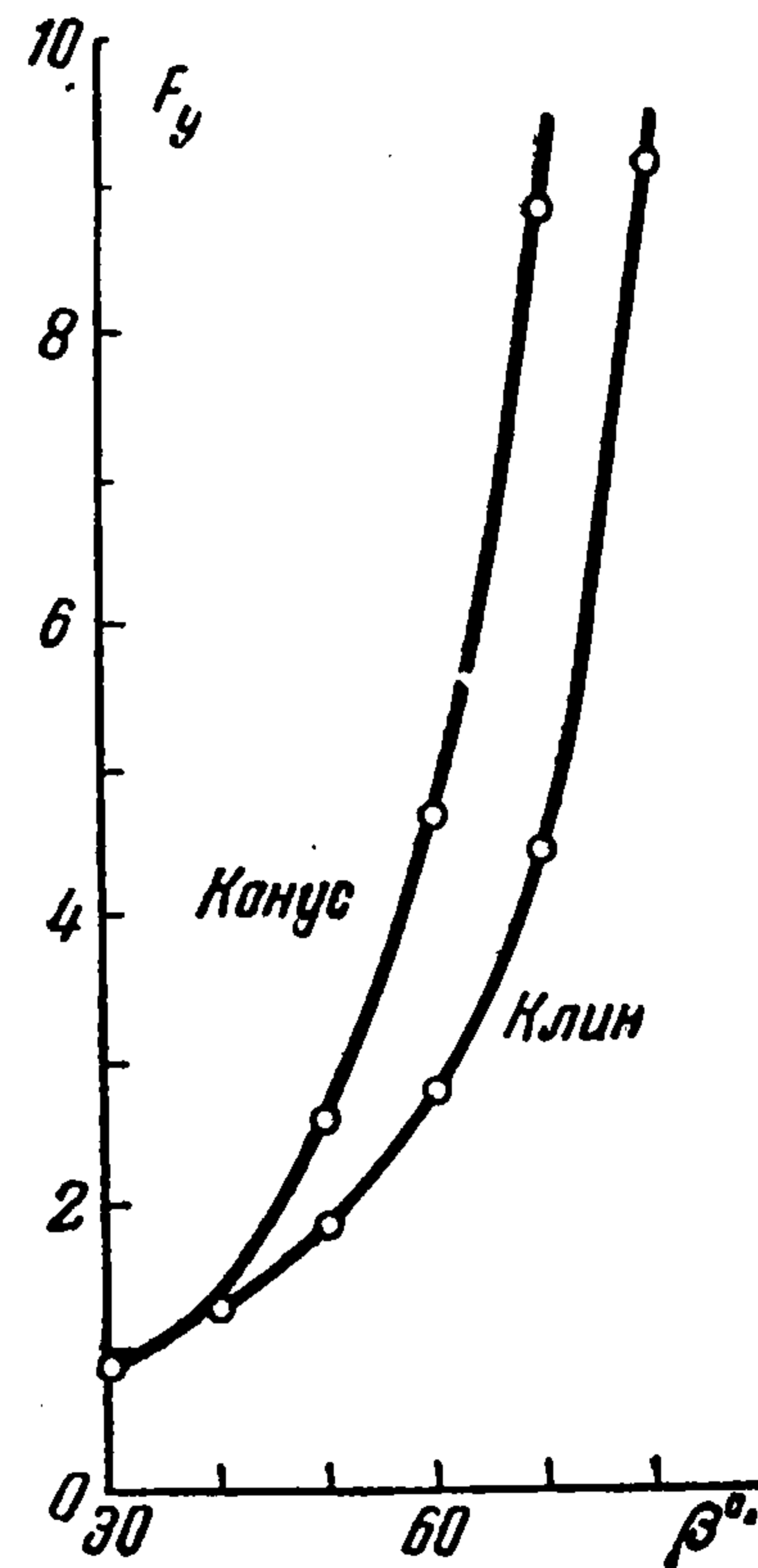
Фиг. 9

$90^\circ > \alpha > 20^\circ$. Кривая 1 — полученная сила воздействия жидкости на клин, кривая 3 — полученная сила воздействия жидкости на конус, кривая 2 — развитие пластиночной аналогии, (1) — интеграл нагружения из работы [4], (2) — из более точного анализа [4], (3) — из вагнеровского анализа для $\alpha = 18^\circ$.

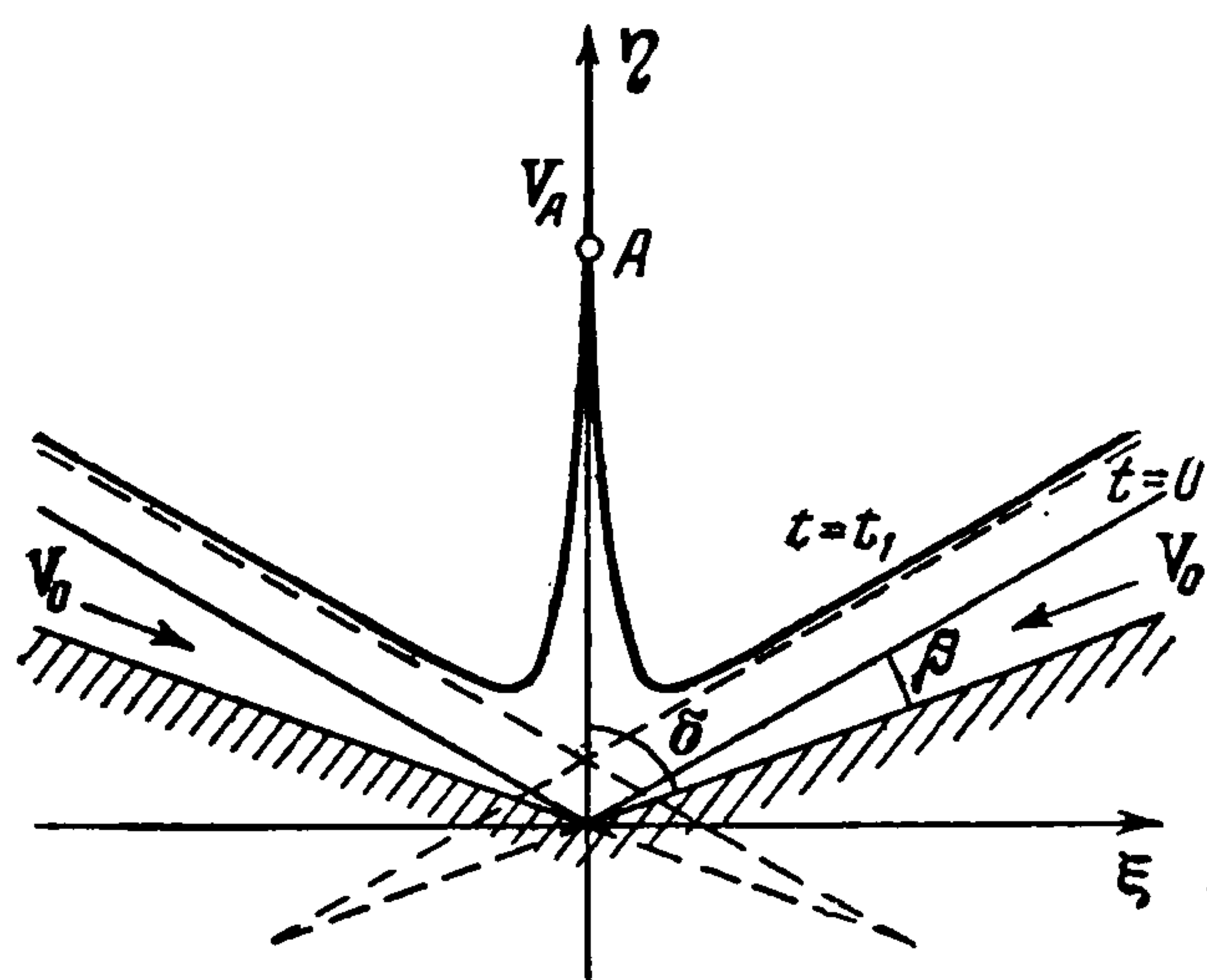
Для случая погружения тел с малыми углами килеватости теория должна быть уточнена. Однако можно предполагать, что в этом случае пластиночная аналогия может дать удовлетворительный результат.

Методика, разработанная в задаче о погружении клина, может быть без всяких изменений использована для решения задачи о растекании жидкого клина по твердой поверхности при условии, что жидкие частицы на бесконечности движутся с постоянной скоростью и в начальный момент вершина жидкого клина касается твердой поверхности. Были рассчитаны формы свободной поверхности, эюры скоростей и величины силы давления жидкого клина на плоскость в зависимости от угла полураствора жидкого клина (см. фиг. 10, где показана зависимость давления жидкого клина от угла его полураствора).

М. А. Лаврентьев [6] предложил объяснение кумулятивного эффекта при взрыве с конической оболочкой. Согласно модели М. А. Лаврентьева движение оболочки носит характер соударения струй. Самим М. А. Лаврентьевым была рассмотрена плоская и осесимметричная модель, причем движение считалось установившимся. Несмотря на такую, казалось бы, очень грубую схематизацию, модель М. А. Лаврентьева во всяком случае качественно объяснила явления, которые раньше казались весьма сложными.



Фиг. 10



Фиг. 11

Подход к решению задач о соударении струй, изложенный в этой работе, позволяет изучить другую, более сложную математическую модель кумулятивного взрыва — модель неустановившейся кумуляции плоского и конического зарядов.

Пусть в начальный момент жидкость занимает объем, ограниченный снизу твердой конической поверхностью с углом при вершине, равным 2δ (фиг. 11), и свободной границей, которая также представляет собой

конус с углом при вершине, равным $2(\delta - \beta)$. Предполагается, что в начальный момент частицы жидкости имеют скорости, равные V_a , и направленные вдоль образующих конуса. Нетрудно убедиться, что поставленная таким образом задача сводится к рассмотренной выше. Были вычислены формы свободной поверхности кумулятивной струи и величины скоростей вдоль нее в зависимости от значений углов β и δ .

В таблице приведены значения безразмерной скорости вершины кумулятивной струи для различных «толщин» струи (угол β) и различных углов «раствора» оболочки (угол δ). Приведенная таблица показывает,

Таблица

δ	$\beta = 10^\circ$	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
90°	1.4627	1.9294	2.5032	3.2637	4.3550	6.1070	9.5046	19.4636
80°	1.7320	2.3161	3.0718	4.1487	5.8743	9.2197	19.0266	
70°	2.0197	2.7653	3.8032	5.4548	8.6496	18.0092		
60°	2.3337	3.3213	4.8577	7.8102	16.4418			
50°	2.6955	4.0932	6.7238	14.3708				
40°	3.1604	5.4158	11.8570					
30°	3.9006	8.9708						
20°	5.7776							

как с увеличением толщины струи и уменьшением угла раствора оболочки резко увеличивается скорость вершины кумулятивной струи, которая в десятки раз может превосходить скорость V_0 . Этот эффект носит существенно нестационарный характер, поэтому стационарная модель не может дать подобных оценок.

В § 3 было показано, что решение пространственных (осесимметричных) задач о погружении конуса, растекании жидкого конуса по плоскости и соударении конических струй может быть проведено совершенно аналогично задачам плоским. Были проведены расчеты формы свободной поверхности и скоростей вдоль нее в зависимости от углов килеватости конуса.

Из расчетов видно, что общий характер изменения скоростей такой же, как в случае клина, только это изменение происходит в зоне, более близкой к поверхности тела.

На фиг. 8 представлено изменение скорости носика брызговой струи. В случае конуса эта скорость возрастает медленнее с уменьшением угла килеватости, чем в случае клина. На фиг. 9 изображена зависимость силы реакции жидкости на конус при разных углах килеватости конуса α . Сравнивая эти результаты с результатами, полученными для клина, видим, что при больших α кривая для конуса лежит ниже кривой для клина, но при $\alpha \sim 30 - 40^\circ$ происходит резкое увеличение силы реакции жидкости в случае конуса и кривая идет выше и круче, чем в случае клина.

На фиг. 10 показано изменение силы давления растекающегося жидкого конуса на плоскость в зависимости от углов его полураствора β . Сила давления возрастает с увеличением угла β быстрее, чем в плоском случае.

Поступила 30 X 1958.

ЛИТЕРАТУРА

1. W a g n e r H. Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten, ZAMM, Nr. 4, S. 194—215, 1932.
2. С е д о в Л. И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, М., 1934.
3. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М., 1957.
4. P i e r s o n John D. The penetration of a fluid surface by a wedge. Institute of the Aeronautical Sciences, Report Nr. 381, 1950.
5. S i d n e y F., B o r g. Some contributions to the wedge-water entry problem. Journal of the Engineering Mechanics, Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol. 83, NEM2, Apr., 1957.
6. Л а в р е н т ь е в М. А. Кумулятивный заряд и принципы его работы. Успехи матем. наук, т. 12, вып. 4 (76), стр. 41—56, М., 1957.