Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО И ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В ТРУБЕ

Н. А. Слезкин

(Москва)

В монографии С. М. Тарга [1] даны решения ряда задач о развитии течения вязкой несжимаемой жидкости на основе приближенных дифференциальных уравнений, учитывающих слагаемые от ускорения и вязкости лишь частично. Результаты решения задачи о развитии течения в круглой цилиндрической трубе удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов не только в отношении длины начального участка, но и в отношении развития профиля распределения скоростей по сечениям на начальном участке. В работе О. Н. Овчинникова [2] те же приближенные уравнения были использованы для решения задачи о развитии течения в диффузоре при произвольном распределении скоростей в начальном сечении. И в этом случае результаты расчета качественно хорошо подтвердились результатами специально проведенных автором экспериментов даже для чисел Рейнольдса порядка 25×10^4.

Указанные обстоятельства наводят мысль на то, чтобы и для течения газа с учетом вязкости и теплопроводности составить соответственные приближенные уравнения с частичным учетом нелинейных слагаемых и эти уравнения использовать для решения отдельных задач о развитии течения газа. Такого рода задачи о развитии течения теплопроводного газа в литературе пока рассматривались в том плане, в котором задача о развитии течения несжимаемой жидкости решалась Шиллером [3], т. е. путем сопряжения профиля постоянных скоростей в ядре с заранее заданным профилем распределения скоростей в пограничном слое (например, в статье Кауля и Брауна [4]). Решения этих задач при помощи приближенных линейных уравнений в литературе еще не рассматривались, и они могут представлять теоретический и практический интерес для расчета диффузора двигателя на подвижном объекте и расчета некоторых потерь при течениях газа в трубопроводах и дуффузорах.

1. Будем предполагать движение газа плоско-параллельным и установившимся. Газ будем считать идеальным, т. е. в качестве уравнения состояния принимаем уравнение Клапейрона и коэффициенты теплоемкостей считаем постоянными. Аналогично тому, как это сделано в нашей работе [5], введем безразмерные величины и характеристики следующим образом:

$$x = lx_1, \qquad y = \varepsilon l y_1, \qquad u = U_0 u_1, \qquad v = \varepsilon U_0 v_1, \qquad p = p_0 p_1$$

$$\rho = \rho_0 \rho_1, \qquad T = T_0 T_1, \qquad \mu = \mu_0 \mu_1, \qquad \varkappa = \varkappa_0 \varkappa_1 \tag{1.1}$$

$$M^2 = \frac{U_0^2 \rho_0}{\gamma p_0}, \qquad R = \frac{\rho_0 U_0 l}{\mu_0}, \qquad P = \frac{\mu_0 g C_p}{\varkappa_0}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \qquad A\frac{U_0^2}{C_p g T_0} = (\gamma - 1) M^2$$

При использовании (1.1) дифференциальные уравнения вязкого и теплопроводного газа без учета массовых сил представятся в виде

$$
\begin{aligned}
&R\varepsilon^2\rho_1\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)=-\frac{R\varepsilon^2}{\gamma M^2}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)+\\
&\qquad+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu_1\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)\right\}\\
&\varepsilon^2\rho_1\left(u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)=-\frac{1}{\gamma M^2}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)+\\
&\qquad+\frac{\varepsilon^2}{R}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\mu_1\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v_1}{\partial y_1}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]\\
&R\varepsilon^2\rho_1\left(u_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial T_1}{\partial y_1}\right)=\varepsilon^2R\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(u_1\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial p_1}{\partial y_1}\right)+\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial y_1}\right)+\\
&\qquad+\frac{\gamma-1}{\gamma}\mu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)^2+\frac{\varepsilon^2}{P}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varkappa_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\gamma-1}{\gamma}\mu_1\varepsilon^2\left\{\varepsilon^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{4}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2+\frac{3}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right]\right\}\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y_1}=0\\
&\qquad p_1=\rho_1T_1,\qquad \mu_1=\mu_1(T_1),\qquad \varkappa_1=\varkappa_1(T_1)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Дифференциальные уравнения (1.2) тождественно удовлетворяются для случая строго прямолинейно-параллельного течения с постоянной скоростью U_0 и с постоянными характеристиками состояния; в этом случае можно положить

$$
u_1=1,\quad v_1=0,\quad p_1=1,\quad \rho_1=1,\quad T_1=1,\quad \mu_1=1,\quad \varkappa_1=1 \tag{1.3}
$$

Будем рассматривать теперь лишь те случаи, в которых наличие твердых стенок оказывает сравнительно малое возмущающее влияние на отклонения всех характеристик течения газа от их значений в невозмущенном потоке. Если параметр ε считать малым и если безразмерные характеристики R, M и P заранее выразить одночленными формулами через параметр ε, то решения уравнений (1.3) можно представить в виде бесконечных рядов по степеням малого параметра ε. Допустим, что для некоторых частных случаев можно ограничиться в этих рядах лишь слагаемыми, содержащими малый параметр в первой степени, т. е. положим

$$
\begin{aligned}
&u_1=1+\varepsilon u',\quad v_1=\varepsilon v',\quad \rho_1=1+\varepsilon\rho',\quad p_1=1+\varepsilon p'\\
&T_1=1+\varepsilon T',\quad \mu_1=1+\varepsilon\mu',\quad \varkappa_1=1+\varepsilon\varkappa'
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Далее примем, что характеристические параметры имеют следующий порядок величин:

$$
R\sim\frac{1}{\varepsilon^2},\qquad M\sim 1,\qquad P\sim 1 \tag{1.5}
$$

Подставляя (1.4) в уравнения (1.2), учитывая (1.5) и приравнивая коэффициенты при первой степени малого параметра ε, получим следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial x_1}=-\frac{1}{\gamma M^2}\frac{\partial p'}{\partial x_1}+\frac{1}{\varepsilon^2R}\frac{\partial^2u'}{\partial y_1^2},\qquad 0=\frac{\partial p'}{\partial y_1}\\
&\frac{\partial T'}{\partial x_1}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\partial p'}{\partial x_1}+\frac{1}{PR\varepsilon^2}\frac{\partial^2T'}{\partial y_1^2}\\
&\frac{\partial\rho'}{\partial x_1}+\frac{\partial u'}{\partial x_1}+\frac{\partial v'}{\partial y_1}=0,\qquad p'=\rho'+T'
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Пользуясь уравнением состояния (1.6), плотность ρ можно исключить из уравнения неразрывности и последнее представить в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x_1} - \frac{\partial T'}{\partial x_1} + \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \frac{\partial v'}{\partial y_1} = 0 \tag{1.7}$$

Если в уравнениях (1.6) и (1.7) вернуться к первоначальным размерным величинам, т. е. положить

$$x_1 = \frac{x}{l}, \quad y_1 = \frac{y}{\varepsilon l}, \quad u' = \frac{u - U_0}{\varepsilon U_0}, \quad v' = \frac{v}{\varepsilon^2 U_0}$$

$$p' = \frac{p - p_0}{\varepsilon p_0}, \quad T' = \frac{T - T_0}{\varepsilon T_0}, \quad p_0 = g\rho_0 C_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} T_0 \tag{1.8}$$

то получим следующие приближенные линеаризированные уравнения движения вязкого и теплопроводного газа:

$$gC_p\rho_0 U_0 \frac{\partial T}{\partial x} = AU_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \varkappa_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \rho_0 U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + U_0\left(\frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{T_0}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.9}$$

Если сопоставить приближенные уравнения (1.9) с известными уравнениями плоского пограничного слоя для вязкого и теплопроводного газа ([6], стр. 264), то можно обнаружить, что во всех уравнениях слагаемые от конвективной производной по времени от u, p и T учтены частично по Озеену и, кроме того, коэффициенты μ и $\varkappa$ приняты за постоянные величины, а слагаемое от диссипации энергии отброшено. Следовательно, уравнения (1.9) являются грубо приближенными уравнениями и их решения менее точно будут отражать явление течения в тонких трубах и в тонких пограничных слоях, чем решения соответственных уравнений пограничного слоя. Но такого рода заключение о грубой приближенности исходных уравнений справедливо и для уравнений, используемых для решения задач о развитии течения несжимаемой жидкости и некоторых задач о пространственном пограничном слое, тем не менее полученные решения этих задач, как указано выше, неплохо согласуются с результатами опытов или с результатами решений более точных уравнений. Поэтому можно полагать, что для ряда задач о течениях газа в тонких слоях и трубках решения уравнений (1.9) будут давать правильную картину развития не только в качественном, но и в количественном отношении.

Для задач о пограничном слое вблизи обтекаемых тел давление p, входящее в уравнения (1.9), должно считаться заданной функцией от координаты x, отсчитываемой вдоль контура профиля. Для задач же о развитии течения в трубах граничные условия для поперечной скорости v позволяют получить дифференциальное уравнение для давления.

2. Если движение газа предполагать осесимметричным и считать трансверсальную компоненту скорости равной нулю, то приближенные уравнения, аналогичные уравнениям (1.9), будут иметь следующий вид:

$$\rho_0 U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + U_0\left(\frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{T_0}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.1}$$

$$gC_p\rho_0 U_0 \frac{\partial T}{\partial x} = AU_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varkappa_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

Рассмотрим частную задачу на применение приближенных уравнений (2.1).

Пусть круглая цилиндрическая труба с открытым передним торцовым сечением перемещается в воздухе поступательно параллельно своей оси симметрии со скоростью U_0. Пусть внутри трубы на некотором удалении от переднего сечения каким-либо способом создается давление p_2, меньшее чем p_0 в воздухе на достаточном удалении от среза трубы. Благодаря подсасывающему действию разности давлений возникает некоторое течение в воздухе впереди переднего среза и будет происходить относительное движение воздуха и внутри трубы. Обратим движение воздуха и трубы. Тогда на бесконечном удалении от переднего среза неподвижной трубы поток будет иметь скорость U_0 в положительном направлении оси x, давление p_0, температуру T_0; этой температуре будут отвечать коэффициенты μ_0 и $\varkappa_0$. Во входном сечении трубы ($x = 0$) по прошествии достаточного интервала времени с момента начала движения будет установлено мало изменяющееся со временем распределение скоростей и температуры. По мере удаления от входного сечения вследствие прилипания частиц к стенкам и температурного воздействия со стороны стенок трубы будет происходить изменение характера распределения по сечениям скоростей температуры и давления.

Если рассматривать сечения трубы, близкие к входному сечению, и если предполагать относительную разность давлений $(p_0 - p_2)/p_0$ малой, то влияние отброшенных слагаемых при получении уравнений (1.9) из соответственных уравнений пограничного слоя можно считать малым. При этих предположениях можно с некоторым основанием применить приближенные уравнения (2.1) к течению газа в цилиндрической трубе в рассматриваемом нами примере.

Если рассматривать течение газа в газопроводе, заложенном в грунте, то необходимо дополнительно учесть температурное воздействие грунта на стенки трубы. Если обозначить через T_1 температуру трубы во входном сечении, а через T_2—температуру грунта и при этом предположить, что $T_1 > T_2$, то можно в качестве первого приближения принять, что температура стенок трубы меняется по закону показательной функции (аналогично закону В. Г. Шухова для нефтепроводов), т. е.

$$T_{\text{ст}} = T_2 + (T_1 - T_2)\exp\left(-\beta\frac{x}{a}\right) \tag{2.2}$$

где a — радиус трубы, а β — безразмерный коэффициент, определяемый из опыта.

Будем для простоты предполагать, что на входном сечении скорость и температура распределены равномерно. Тогда граничные условия для входного сечения будут представлены в виде

$$u = U_1, \quad T = T_1, \quad p = p_1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad 0 < r < a \tag{2.3}$$

Условия прилипания и осевой симметрии течения будут представлены в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned} &u = 0, \quad v_r = 0 && \text{при} \quad r = a \quad \text{и} \quad x > 0 \\ &v_r = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 && \text{при} \quad r = 0 \quad \text{и} \quad x > 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если перейти к безразмерным величинам и положить

$$
\begin{gathered}
x = ax_1, \quad r = ar_1, \quad u = U_0 u_1, \quad v = U_0 v_1, \quad T = T_0 \overline{T}, \quad p = p_0 \overline{p} \\
\frac{\rho_0 a U_0}{\mu_0} = R, \quad \frac{\rho_0 U_0^2}{\gamma p_0} = M^2, \quad \frac{AU_0^2}{gC_p T_0} = (\gamma - 1) M^2, \quad \frac{gC_p \mu_0}{\varkappa_0} = P
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

то дифференциальные уравнения (2.1) и граничные условия (2.3), (2.2) и (2.4) представятся в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
R\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\gamma M^2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1 \frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right), \qquad \frac{\partial \overline{p}}{\partial r_1} = 0 \\
PR\left[\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}\right] = \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1 \frac{\partial \overline{T}}{\partial r_1}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 + \overline{p} - \overline{T}) + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1 v_1) = 0
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

$$
\begin{gathered}
u_1 = \frac{U_1}{U_0}, \quad \overline{p} = \frac{p_1}{p_0}, \quad \overline{T} = \frac{T_1}{T_0}, \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad 0 < r_1 < 1 \\
u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \overline{T} = \frac{T_2}{T_0} + \frac{T_1 - T_2}{T_0} e^{-\beta x_1} \quad \text{при} \quad r = a \quad \text{и} \quad x_1 > 0 \\
v_1 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial r_1} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \quad \text{и} \quad x_1 > 0
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

Систему линейных уравнений (2.6) при граничных условиях (2.7) будем решать при помощи метода операционного исчисления. Положим

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda x_1} u_1 dx_1 = \frac{u^*}{\lambda}, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda x_1} v_1 dx_1 = \frac{v^*}{\lambda}, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda x_1} \overline{p} dx_1 = \frac{p^*}{\lambda}, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda x_1} \overline{T} dx_1 = \frac{T^*}{\lambda} \tag{2.8}
$$

Учитывая первое граничное условие (2.7), будем иметь

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty e^{-\lambda x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = u^* - \frac{U_1}{U_0}, \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x_1} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} dx_1 = p^* - \frac{p_1}{p_0} \\
\int_0^\infty e^{-\lambda x_1} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_1} dx_1 = T^* - \frac{T_1}{T_0}
\end{gathered} \tag{2.9}
$$

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda x_1} [T_2 + (T_1 - T_2) e^{-\beta x_1}]\, dx_1 = \frac{T_2}{\lambda} + \frac{T_1 - T_2}{\lambda + \beta}
$$

Если провести преобразование Лапласа по отношению к уравнениям (2.6) и граничным условиям (2.7) и учесть (2.8) и (2.9), то получим для изображений следующие уравнения и граничные условия:

$$
\begin{gathered}
R\lambda\left[u^* - \frac{U_1}{U_0} + \frac{1}{\gamma M^2}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\right] = \frac{d^2 u^*}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{du^*}{dr_1} \\
PR\lambda\left[T^* - \frac{T_1}{T_0} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\right] = \frac{d^2 T^*}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{dT^*}{dr_1} \\
\lambda\left(u^* + p^* - T^* - \frac{U_1}{U_0} - \frac{p_1}{p_0} + \frac{T_1}{T_0}\right) = -\frac{1}{r_1}\frac{d}{dr_1}(r_1, v^*)
\end{gathered} \tag{2.10}
$$

$$
\begin{gathered}
v^* = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{dT^*}{dr_1} = 0 \qquad \text{при} \quad r_1 = 0 \\
u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad T^* = \frac{1}{T_0}\left[T_2 + \frac{\lambda}{\lambda + \beta}(T_1 - T_2)\right] \qquad \text{при} \quad r_1 = 1
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

Решения уравнений (2.10), удовлетворяющие первому граничному условию (2.11), будут представляться в виде

$$
\begin{aligned}
u^* &= C_1 I_0 (r_1 \sqrt{\lambda R}) + \frac{U_1}{U_0} - \frac{1}{\gamma M^2}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) \\
T^* &= C_2 I_0 (r_1 \sqrt{\lambda P R}) + \frac{T_1}{T_0} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) \qquad (2.12) \\
v^* \frac{r_1}{\lambda} &= \frac{1}{2} r_1^2 \left(\frac{U_1}{U} + \frac{p_1}{p_0} - \frac{T_1}{T_0} - p^*\right) - \int\limits_0^{r_1} (u^* + T^*) r_1 dr_1
\end{aligned}
$$

Используя второе граничное условие (2.11), получим следующие выражения для изображений основной компоненты скорости и температуры:

$$
u^* = \left[\frac{U_1}{U_0} - \frac{1}{\gamma M^2}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\right]\left[1 - \frac{I_0(r_1 \sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})}\right] \qquad (2.13)
$$

$$
T^* = \frac{T_1}{T_0} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) - \left[\frac{\beta}{\lambda + \beta}\,\frac{T_1 - T_2}{T_0} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\right] \frac{I_0(r_1 \sqrt{\lambda P R})}{I_0(\sqrt{\lambda P R})}
$$

Из теории бесселевых функций известна рекуррентная формула

$$
\int\limits_0^x I_0(x)\, x dx = x I_1(x) \qquad (2.14)
$$

Вычисляя интегралы в (2.12) при помощи (2.13) и (2.14) и используя граничное условие (2.11) для поперечной компоненты скорости, получим следующее равенство для изображения давления:

$$
p^* - \frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{\dfrac{2U_1}{U_0 \sqrt{\lambda R}}\,\dfrac{I_1(\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})} + \dfrac{2\beta}{\lambda + \beta}\,\dfrac{T_2 - T_1}{T_0}\,\dfrac{1}{\sqrt{\lambda P R}}\,\dfrac{I_1(\sqrt{\lambda P R})}{I_0(\sqrt{\lambda P R})}}{1 + \dfrac{2(\gamma - 1)}{\sqrt{\lambda P R}}\,\dfrac{I_1(\sqrt{\lambda P R})}{I_0(\sqrt{\lambda P R})} - \dfrac{1}{M^2}\left[1 - \dfrac{2}{\sqrt{\lambda R}}\,\dfrac{I_1(\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})}\right]} \qquad (2.15)
$$

Таким образом, полное решение задачи для изображений представляется равенствами (2.13) и (2.15). От изображений к оригиналам можно, вообще говоря, перейти при помощи разложения на простые дроби, если каким-либо способом найти корни знаменателя (2.15).

Так как исходные уравнения (2.1) могут отражать с некоторой степенью приближения течение газа лишь на начальном участке, т. е. для небольших значений координаты x_1, а малым значениям множителя x_1 в показателе формул преобразования (2.8) отвечают большие значения параметра преобразования λ, то с некоторой погрешностью можно входящие в (2.15) функции Бесселя от мнимого аргумента заменить одночленными асимптотическими формулами, т. е. положить

$$
I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad \frac{I_1(\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})} \approx 1, \qquad \frac{I_1(\sqrt{\lambda P R})}{I_0(\sqrt{\lambda P R})} \approx 1 \qquad (2.16)
$$

Подставляя (2.16) в (2.17), получим следующее приближенное выражение для изображения давления:

$$
p^* - \frac{p_1}{p_0} = 2\gamma \frac{\dfrac{U_1}{U_0} + \dfrac{T_2 - T_1}{\sqrt{P} T_0}\,\dfrac{\beta}{\lambda + \beta}}{\sqrt{\lambda R}\left(1 - \dfrac{1}{M^2}\right) + 2\left(\dfrac{\gamma - 1}{\sqrt{P}} + \dfrac{1}{M^2}\right)} \qquad (2.17)
$$

Раскладывая правую часть (2.17) на дроби, получим

$$\frac{p^*}{\lambda}=\frac{p_1}{p_0}\frac{1}{\lambda}+\frac{C_1}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{\alpha+\sqrt{\lambda}}\right)+\frac{C_2}{\alpha^2}\left[\frac{}{\lambda}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{\beta+\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda}+\alpha}-\frac{\alpha^3}{\beta+\alpha^2}\frac{1}{\lambda+\beta}+\frac{\alpha^2}{2(\beta+\alpha^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\beta}}\right)\right] \tag{2.18}$$

где

$$\alpha=-\frac{2}{\sqrt{PR}}\frac{(\gamma-1)M^2+\sqrt{P}}{1-M^2}$$
$$C_1=-\frac{2\gamma U_1M^2}{U_0\sqrt{R}}\frac{1}{1-M^2},\qquad C_2=\frac{2\gamma M^2}{T_0\sqrt{PR}}\frac{T_1-T_2}{1-M^2} \tag{2.19}$$

Переходя от изображений (2.18) к оригиналам, используя формулы перехода (2.5) от безразмерных величин к размерным и вводя обычные обозначения

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du,\qquad \operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x) \tag{2.20}$$

получим следующую приближенную формулу для изменения давления газа на входном участке круглой цилиндрической трубы:

$$p=p_1+\frac{C_1p_0}{\alpha}\left[1-\exp\frac{\alpha^2x}{a}\operatorname{erfc}\left(\alpha\sqrt{\frac{x}{a}}\right)\right]+\frac{C_2p_0}{\alpha}\left[1-\frac{\alpha^2}{\beta+\alpha^2}\exp\left(-\frac{\beta x}{\alpha}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\beta}{\beta+\alpha^2}\operatorname{erfc}\left(\alpha\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta+\alpha^2}\exp\frac{\beta x}{a}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\beta\frac{x}{a}}\right)\right]\right. \tag{2.21}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что заданному условию (2.3) для давления на входе в трубу полученная формула (2.21) удовлетворяет.

Если поток газа впереди входного сечения трубы будет дозвуковым, т. е. имеет место неравенство

$$1-M^2>0 \tag{2.22}$$

то величины α и C_1, определяемые равенствами **(2.19)**, будут отрицательными и при этом будет

$$\operatorname{erfc}\left(\alpha\sqrt{\frac{x}{a}}\right)=1+\operatorname{erf}\left(|\alpha|\sqrt{\frac{x}{a}}\right)>1$$

В этом случае второе слагаемое в правой части (2.21), отражающее влияние вязкости на изменение давления в трубе, будет всегда отрицательным. Таким образом, если набегающий поток газа будет дозвуковым, то давление газа на входном участке круглой цилиндрической трубы от действия сил вязкости будет всегда убывать. Это положение является общеизвестным из гидравлики газа ([7], стр. 132).

Чтобы определить общий знак третьего слагаемого в (2.21), отражающего влияние на изменение давления во входном участке цилиндрической трубы отвода тепла от газа благодаря охлаждению стенок, прибегнем к разложению всего выражения в квадратной скобке в ряд по степеням аргумента. Если воспользоваться известными разложениями для отдельных множителей и ограничиться двумя слагаемыми в этих разложениях, то получим:

$$1-\frac{1}{\beta+\alpha^2}\left[\alpha^2\exp\frac{-\beta x}{a}-\beta\exp\frac{\alpha^2 x}{a}\operatorname{erfc}\left(\alpha\sqrt{\frac{x}{a}}\right)+\right.$$
$$\left.+\alpha\sqrt{\beta}\exp\frac{\beta x}{a}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\beta\frac{x}{a}}\right)\right]\approx\frac{4\beta\alpha}{\sqrt{\pi}(\beta+\alpha^2)}\sqrt{\frac{x}{a}}\left[1+\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta)\frac{x}{a}\right]$$

Общий знак третьего слагаемого в (2.21) зависит от знака множителя C_2 и параметра β. При выполнении неравенства (2.22) и при предположении, что стенка охлаждается ($T_2<T_1$, $\beta>0$), общий знак третьего слагаемого будет положительным. Следовательно, если набегающий на открытую цилиндрическую трубу поток будет дозвуковым, то отвод тепла от газа посредством охлаждения стенок приводит к росту давления на входном участке цилиндрической трубы. Это положение является также общеизвестным из гидравлики газа ([8], стр. 53).

Таким образом, качественные заключения из формулы (2.21) согласуются с известными формулами гидравлики газа. Но, помимо качественных заключений, формула (2.21) дает возможность подсчитывать изменение давления в зависимости от расстояния от переднего среза трубы, что нельзя сделать при помощи формул гидравлики газа.

При получении приближенной формулы (2.21) для давления мы воспользовались одночленными асимптотическими формулами (2.16). Как видно из этих формул, число Рейнольдса входит под знак аргумента функции Бесселя. Следовательно, чем больше будет число Рейнольдса, тем точнее одночленные асимптотические формулы будут отражать значения функций Бесселя и тем длиннее будет тот участок трубы, для которого будет справедлива приближенная формула (2.21) для давления. В таком случае эту формулу можно использовать для приближенного определения длины входного участка трубы, на протяжении которого давление от заданной величины p_1 на входе изменится до заданной величины p_2 в конце участка длины

$$\alpha\frac{p_2-p_1}{p_0}=C_1\left[1-\exp\frac{\alpha^2 l}{a}\operatorname{erfc}\left(\alpha\sqrt{\frac{l}{a}}\right)\right]+C_2\left\{1-\frac{\alpha^2}{\beta+\alpha^2}\left[\exp\frac{-\beta l}{a}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\beta\exp\frac{\alpha^2 l}{a}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{\frac{l}{a}}\right)+\alpha\sqrt{\beta}\exp\frac{\beta l}{a}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\beta\frac{l}{a}}\right)\right]\right\}\quad(2.23)$$

Если считать длину входного участка l небольшой по сравнению с радиусом трубы a, то можно воспользоваться разложениями входящих в правую часть (2.23) отдельных функций по степеням аргумента. В частности, если ограничиться в разложении всей правой части (2.23) лишь слагаемыми, содержащими l/a в первой степени, то получим следующую приближенную формулу для длины входного участка:

$$\frac{l}{a}\approx\frac{\pi}{4}-\left[C_1+\frac{2\beta}{\beta+\alpha^2}C_2\right]^{-2}\left(\frac{p_2-p_1}{p_0}\right)^2\quad(2.24)$$

Обратимся теперь к формулам (2.13) для изображений скорости и температуры. Так как оригинал для давления в приближенном виде уже найден, то для определения по изображениям (2.13) оригиналов для скорости и температуры достаточно найти оригиналы для изображений отношений

$$\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})}, \qquad \frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda PR})}{I_0(\sqrt{\lambda PR})}$$

и затем воспользоваться известной из операционного исчисления теоремой умножения ([9], стр. 13). Для приближенного определения оригиналов можно воспользоваться в соответственных случаях либо разложениями по степеням аргумента, либо асимптотическими формулами (2.16).

Для окрестности вблизи стенок трубы можно положить

$$\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})} \approx \frac{1}{\sqrt{r_1}} \exp\left[-\sqrt{\lambda R}(1-r_1)\right]$$

Тогда из равенств (2.13) получим

$$u^* = \frac{U_1}{U_0} - \frac{1}{\gamma M^2}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) - \frac{U_1}{U_0\sqrt{r_1}} \exp\left[-(1-r_1)\sqrt{\lambda R}\right] + \\ + \frac{1}{\gamma M^2\sqrt{r}}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\exp\left[-(1-r_1)\sqrt{\lambda R}\right]$$

$$T^* = \frac{T_1}{T_0} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) + \frac{T_2 - T_1}{T_0\sqrt{r_1}}\,\frac{\beta}{\lambda+\beta}\exp\left[-(1-r_1)\sqrt{\lambda PR}\right] - \\ - \frac{\gamma-1}{\gamma\sqrt{r_1}}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\exp\left[-(1-r_1)\sqrt{\lambda PR}\right]$$

Изображению $e^{-\alpha\sqrt{\lambda}}$ отвечает оригинал $\operatorname{erfc}(\alpha/2\sqrt{x})$ ([9], стр. 152) Используя указанную теорему умножения, получим следующие приближенные выражения для скорости и температуры в пограничном слое вблизи стенок трубы на входном участке:

$$u = U_1 - \frac{p-p_1}{\gamma p_0 M^2}U_0 - U_1\sqrt{\frac{a}{r}}\operatorname{erfc}\left[\left(1-\frac{r}{a}\right)\frac{\sqrt{aR}}{2\sqrt{x}}\right] + \\ + \frac{U_0\sqrt{a}}{\gamma M^2\sqrt{r}}\frac{d}{dx_1}\int_0^{x_1}\operatorname{erfc}\left[\frac{(1-r_1)\sqrt{R}}{2\sqrt{x_1-\xi}}\right]\frac{p-p_1}{p}\,d\xi \tag{2.25}$$

$$T = T_1 + T_0\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{p-p_1}{p_0} + (T_2 - T_1)\sqrt{\frac{a}{r}}\times \\ \times\frac{d}{dx_1}\int_0^{x_1}\left[1-e^{-\beta(x_1-\xi)}\right]\operatorname{erfc}\left[\left(1-\frac{r}{a}\right)\frac{\sqrt{PR}}{2\sqrt{\xi}}\right]d\xi - \\ - \frac{\gamma-1}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{r}}\,\frac{d}{dx_1}\int_0^{x_1}\operatorname{erfc}\left[\left(1-\frac{r}{a}\right)\frac{\sqrt{PR}}{2\sqrt{x_1-\xi}}\right]\frac{p-p_1}{p_0}\,d\xi$$

Для окрестности вблизи оси трубы ($r_1 = 0$) для знаменателя в (2.13) можно использовать (2.16), а для числителей использовать разложения по степеням аргумента и ограничиться двумя слагаемыми, т. е. положить

$$I_0(x) \approx 1 + \frac{1}{4}x^2$$

Тогда из (2.13) получим

$$u^* = \frac{U_1}{U_0} - \frac{1}{\gamma M^2}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) - \frac{U_1}{U_0}\sqrt{2\pi R^{1/2}}\left[\lambda^{1/4} + \frac{1}{4}r_1^2\lambda^{5/4}\right]e^{-\sqrt{\lambda R}} + \\ + \frac{\sqrt{2\pi R^{1/2}}}{\gamma M^2}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right)\left(\lambda^{1/4} + \frac{1}{4}r_1^2\lambda^{5/4}\right)e^{-\sqrt{\lambda R}} \tag{2.26}$$

$$T^{*} = \frac{T_1}{T_0} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(p^{*} - \frac{p_1}{p_0}\right) - \frac{T_2 - T_1}{T_0}\sqrt{2\pi (PR)^{1/2}}\,\frac{\beta}{\lambda + \beta} \times$$
$$\times\left(\lambda^{1/4} \quad \frac{1}{4} r_1{}^2 \lambda^{5/4}\right) e^{-\sqrt{\lambda PR}} +$$
$$+ \frac{\gamma - 1}{\gamma}\sqrt{2\pi (PR)^{1/2}}\left(p^{*} - \frac{p_1}{p_0}\right)\left(\lambda^{1/4} + \frac{1}{4} r_1{}^2 \lambda^{5/4}\right) e^{-\sqrt{\lambda PR}}$$

Для перехода от изображений (2.26) к оригиналам можно воспользоваться формулой (3.91) из Справочника ([9], стр. 154), согласно которой изображению

$$\lambda^{\nu/2} e^{-\alpha\sqrt{\lambda}}$$

отвечает оригинал

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x_1)^{-1/2\nu} \exp\frac{-\alpha^2}{8x_1} D_{\nu-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2x_1}}\right)$$

где D_n — функция Вебера. В рассматриваемом нами случае аргументами функций Вебера будут служить

$$\sqrt{\frac{R}{2x_1}}, \qquad \sqrt{\frac{RP}{2x_1}}$$

Как уже сказано выше, при больших числах Рейнольдса R и при малых расстояниях x_1 от входа значения приведенных аргументов будут достаточно большими и поэтому для функций Вебера можно воспользоваться одночленной асимптотической формулой ([10], стр. 154).

$$D_n(z) \sim z^n \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)$$

Таким образом, изображениям $\lambda^{1/4}e^{-\sqrt{\lambda R}}$, $\lambda^{5/4}e^{-\sqrt{\lambda R}}$ будут отвечать приближенно следующие оригиналы:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} R^{-1/4} \exp\frac{-R}{4x_1}, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x_1)^{-5/2} R^{3/4} \exp\frac{-R}{4x_1} \tag{2.27}$$

При малых значениях x_1 и больших значениях R приведенные выражения (2.27) для оригиналов будут сравнительно малыми и поэтому можно в первом грубом приближении в выражениях (2.26) пренебречь всеми слагаемыми, содержащими множитель $\exp(-\sqrt{\lambda R})$. Переходя затем от изображений к оригиналам, получим

$$u = U_1 - \frac{U_0}{\gamma M^2}\,\frac{p - p_1}{p_0}, \qquad T = T_1 + T_0\frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{p - p_1}{p_0} \tag{2.28}$$

Из грубо приближенных формул (2.28) следует, что вдоль оси трубы с уменьшением давления скорость возрастает, а температура убывает.

Для получения более точных формул для изменения давления, скорости и температуры вдоль трубы следует воспользоваться разложениями правых частей (2.15) и (2.13) на простые дроби по корням знаменателя (2.15). О характере этих корней вполне определенно можно сказать пока лишь для случая, когда число Прандтля P равно единице. Если воспользоваться рекуррентной формулой

$$xI_0(x) = I_1(x) + xI_1'(x)$$

то в случае $P = 1$ получим для определения корней знаменателя (2.15) следующее трансцендентное уравнение:

$$I_1(\sqrt{\lambda R}) + \frac{M^2 - 1}{2\gamma M^2 - M^2 + 1}\sqrt{\lambda R}\, I_1'(\sqrt{\lambda R}) = 0 \tag{2.29}$$

Полагая $\sqrt{\lambda R} = ix$, получим из (2.29)

$$\frac{2\gamma M^2 + 1 - M^2}{M^2 - 1} J_1(x) + x J_1'(x) = 0 \tag{2.30}$$

Относительно уравнения (2.30) известно следующее ([11], стр. 531): если выполняется неравенство

$$\alpha\sqrt{R} + 2 = \frac{2\gamma M^2 + 1 - M^2}{M^2 - 1} + 1 = \frac{2\gamma M^2}{M^2 - 1} < 0 \tag{2.31}$$

то два корня уравнения (2.30) являются чисто мнимыми, а все остальные корни будут вещественными. Неравенство (2.31) будет выполняться при выполнении неравенства (2.22). Следовательно, если поток газа впереди входного сечения трубы будет дозвуковым и если число Прандтля равно единице, то один корень уравнения (2.29) (по отношению к λ) будет действительным и положительным, а бесчисленное множество корней будут действительными, но отрицательными и простыми. По этой причине при разложении правой части (2.15) на простые дроби получим

$$\frac{1}{\lambda}\left(p^* - \frac{p_1}{p_0}\right) = \frac{F_1(\lambda)}{F_2(\lambda)} = \frac{[C_1 + \beta C_2 / (\lambda + \beta)]\, I_1(\sqrt{\lambda R})}{\lambda\,[\sqrt{\lambda} I_0(\sqrt{\lambda R}) + \alpha I_1(\sqrt{\lambda R})]} =$$

$$= \frac{A_0}{\lambda} + \frac{A''}{\lambda + \beta} + \frac{A'}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda - \lambda_k} \tag{2.32}$$

где

$$A_0 = \left(\frac{\lambda F_1}{F_2}\right)_{\lambda=0} = \frac{\sqrt{R}\,(C_1 + C_2)}{2 + \alpha\sqrt{R}} = \frac{U_1}{U_0} + \frac{T_2 - T_1}{T_0}$$

$$A'' = -\frac{C_2 J_1(\sqrt{\beta R})}{\sqrt{\beta} J_0(\sqrt{\beta R}) + \alpha J_1(\sqrt{\beta R})} \tag{2.33}$$

$$A' = \frac{F_1(\lambda_0)}{F_2'(\lambda_0)} = \frac{2\,[C_1 + \beta C_2 / (\beta + \lambda)]}{\lambda_0\sqrt{R} - 2\alpha - \alpha^2\sqrt{R}}, \qquad A_k = \frac{F_1(\lambda_k)}{F_2'(\lambda_k)} = \frac{2\,[C_1 + \beta C_2 / (\beta + \lambda_k)]}{\lambda_k\sqrt{R} - 2\alpha - \alpha^2\sqrt{R}}$$

Подставляя выражение (2.15) в (2.13), получим для изображений скорости и температуры

$$\frac{u^*}{\lambda} = \frac{\varphi_1(\lambda)}{\varphi_2(\lambda)} = \frac{U_1}{U_0}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda R})}{\lambda I_0(\sqrt{\lambda R})}\right] -$$

$$-\frac{1}{\gamma M^2}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{I_0(r\sqrt{\lambda R})}{\lambda I_0(\sqrt{\lambda R})}\right] \frac{[C_1 + \beta C_2 / (\beta + \lambda)]\, I_1(\sqrt{\lambda R})}{\sqrt{\lambda} I_0(\sqrt{\lambda R}) + \alpha I_1(\lambda R)} =$$

$$= \frac{B_0}{\lambda} + \frac{B''}{\lambda + \beta} + \frac{B'}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{\lambda - \lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k'}{\lambda - \lambda_k'} \tag{2.34}$$

$$\frac{T}{\lambda} = \frac{\psi_1(\lambda)}{\psi_2(\lambda)} = \frac{T_1}{T_0}\,\frac{1}{\lambda} - \frac{\beta\,(T_1 - T_2)}{\lambda\,(\lambda + \beta)\,T_0}\,\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})} +$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{\gamma\lambda}\left[1 - \frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda R})}{I_0(\sqrt{\lambda R})}\right] \frac{[C_1 + \beta C_2 / (\beta + \lambda)]\, I_1(\sqrt{\lambda R})}{\sqrt{\lambda} I_0(\sqrt{\lambda R}) + \alpha I_1(\sqrt{\lambda R})} =$$

$$= \frac{D_0''}{\lambda} + \frac{D''}{\lambda + \beta} + \frac{D'}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{D_k}{\lambda - \lambda_k} + \frac{D_k'}{\lambda - \lambda_k'}\right)$$

где λ_k — отрицательные корни уравнения (2.29), а λ_k' связаны с корнями уравнения $J_0(\nu)=0$ соотношением

$$\lambda_k' = -\frac{\nu_k^2}{R} \tag{2.35}$$

Входящие в разложения (2.34) коэффициенты будут представляться в виде

$$B_0 = \left[\frac{\lambda\varphi_1(\lambda)}{\varphi_2(\lambda)}\right]_{\lambda=0} = 0, \qquad B'' = -\frac{A'}{\gamma M^2}\left[1-\frac{J_0(r_1\sqrt{\beta R})}{J_0(\sqrt{\beta R})}\right]$$

$$B' = -\frac{A'}{\gamma M^2}\left[1-\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda_0 R})}{I_0(\sqrt{\lambda_0 R})}\right], \qquad B_k = -\frac{A_k}{\gamma M^2}\left[1-\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda_k R})}{I_0(\sqrt{\lambda_k R})}\right]$$

$$B_k' = \frac{2U_1}{U_0\nu_k}\frac{J_0(r_1\nu_k)}{J_1(\nu_k)} - \frac{2}{\gamma a M^2\nu_k}\left(C_1+\frac{\beta}{\beta-(\nu_k^2/R)}C_2\right)\frac{J_0(r_1\nu_k)}{J_1(\nu_k)} \tag{2.36}$$

$$D_0 = \left[\frac{\lambda\psi_1(\lambda)}{\psi_2(\lambda)}\right]_{\lambda=0} = \frac{T_2}{T_0}, \qquad D' = \frac{\gamma-1}{\gamma}A'\left[1-\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda_0 R})}{I_0(\sqrt{\lambda_0 R})}\right]$$

$$D'' = \frac{T_1-T_2}{T_0}\frac{J_0(r_1\sqrt{\beta R})}{J_0(\sqrt{\beta R})} + \frac{\gamma+1}{\gamma}A''\left[1-\frac{J_0(r_1\sqrt{\beta R})}{J_0(\sqrt{\beta R})}\right]$$

$$D_k = \frac{\gamma-1}{\gamma}A_k\left[1-\frac{I_0(r_1\sqrt{\lambda_k R})}{I_0(\sqrt{\lambda_k R})}\right]$$

$$D_k' = \frac{2\beta(T_1-T_2)}{T_0(\beta-\nu_k^2/R)\nu_k}\frac{J_0(r_1\nu_k)}{J_1(\nu_k)} + \frac{2(\gamma-1)}{a\gamma\nu_k}\left(C_1+\frac{\beta}{\beta-(\nu_k^2/R)}C_2\right)\frac{J_0(r_1\nu_k)}{J_1(\nu_k)}$$

Если обозначить действительные корни уравнения (2.30) через γ_k, т. е. положить

$$\sqrt{\lambda_k R} = i\gamma_k, \quad \lambda_k = -\frac{\gamma_k^2}{R} \tag{2.37}$$

и если от изображений (2.32) и (2.34) перейти к оригиналам, то получим следующие формулы для давления, скорости и температуры:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} + \frac{U_1}{U_0} - \frac{T_1-T_2}{T_0} + A'\exp\frac{x\lambda_0}{a} + A''\exp\frac{-\beta x}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}A_k\exp\left(-\frac{x}{a}\frac{\gamma_k^2}{R}\right)$$

$$\frac{U}{U_0} = -\frac{A'}{\gamma M^2}\left[1-\frac{I_0[(r/a)\sqrt{\lambda_0 R}]}{I_0(\sqrt{\lambda R})}\right]\exp\frac{x\lambda_0}{a} + B^{11}\exp\frac{-\beta x}{a} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\exp\left(-\frac{x}{a}\frac{\gamma_k^2}{R}\right) + B_k'\exp\left(-\frac{x}{a}\frac{\nu_k^2}{R}\right)\right] \tag{2.38}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_2}{T_0} + \frac{\gamma-1}{\gamma}A'\left[1-\frac{I_0[(r/a)\sqrt{\lambda_0 R}]}{I_0(\sqrt{\lambda R})}\right]\exp\frac{x\lambda_0}{a} + D''\exp\frac{-\beta x}{a} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\exp\left(-\frac{x}{a}\frac{\gamma_k^2}{R}\right) + D_k\exp\left(-\frac{x}{a}\frac{\nu_k^2}{R}\right)\right]$$

Как уже говорилось выше, приближенные уравнения (2.1) могут считаться справедливыми лишь для входного участка трубы. По этой причине в полученных формулах (2.38) отношению x/a нельзя придавать весьма большие значения. Благодаря наличию действительного положительного корня λ_0 слагаемые в (2.38) с множителем $\exp\lambda_0 x/a$ по модулю будут расти неограниченно, знак же этих слагаемых зависит от знака коэффициента A. Покажем, что знак знаменателя выражения для A' будет всегда положительным. Согласно обозначениям (2.32) имеем

$$F_2(x) = x^3\left[I_0(x) - \frac{|\alpha|\sqrt{R}}{x} I_1(x)\right] \tag{2.39}$$

Так как

$$I_0(0) = 1, \qquad \left[\frac{1}{x} I_1(x)\right]_{x=0} = \frac{1}{2}, \qquad |\alpha|\sqrt{R} > 2$$

то график выражения в скобке (2.39) будет подходить к оси абсцисс к точке $x = \sqrt{\lambda_0 R}$ снизу вверх, т. е.

$$\left[I_0(x) - \frac{|\alpha|\sqrt{R}}{x} I_1(x)\right]_{x=0} < 0$$

и тогда

$$F_2'(\sqrt{\lambda_0 R}) > 0$$

Таким образом, знак коэффициента A' будет определяться знаком его числителя (2.33), а знак числителя при выполнении неравенства (2.22) будет зависеть от знака следующего выражения:

$$\beta\,\frac{T_1 - T_2}{T_0} - (\beta + \lambda_0)\,\frac{U_1}{U_0} \tag{2.40}$$

Выражение (2.40) будет заведомо отрицательным, если будет выполнено неравенство

$$\frac{U_1}{U_0} > \frac{T_1 - T_2}{T_0} \tag{2.41}$$

Следовательно, если поток газа перед входом в трубу будет дозвуковым и если будет выполнено неравенство (2.41), то давление в трубе будет только убывать и с некоторого расстояния от входа станет отрицательным и по модулю будет расти по закону показательной функции. При этих условиях совершенно так же будет вести себя и температура. Скорость же частиц жидкости на оси трубы будет неограниченно расти.

Если провести сравнение поведения давления и скорости при развитии течения газа в трубе с поведением этих величин при развитии течения несжимаемой жидкости, то можем обнаружить существенное различие.

В решении задачи о развитии течения несжимаемой жидкости в трубе давление также убывает, но все же градиент давления на бесконечном удалении от входа будет постоянным, и по этой причине скорость на оси трубы растет лишь до своего предельного значения, равного удвоенной величине средней скорости. В полученном же решении задачи о развитии течения газа в трубе градиент давления на бесконечном удалении от входа не будет постоянным, модуль этого градиента растет неограниченно, а по этой причине и скорость на оси будет расти неограниченно. Последнее обстоятельство исключает возможность распространить на развитие течения газа тот способ определения условной длины начального участка, который был использован для развития течения несжимаемой жидкости.

Условную длину начального участка развития течения газа в трубе придется вводить либо по давлению, либо по температуре. Если, например, исходить из того, что давление не может стать отрицательным, то из первого равенства (2.38) можно получить формулу для определения предельно возможной длины трубы l_*, полагая давление p равным нулю.

Полагая в первом равенстве (2.38) $p = p_2$ и $x = l$, получим соотношение, связывающее три пока неопределенные характеристики газа U_0, p_1 и T_1 на входном сечении с заданными характеристиками течения впереди входного сечения U_0, p_0 и T_0 и заданными величинами p_2 и l. Для случая, когда разность $(p_0 - p_2)/p_0$ может считаться малой, можно положить $p_1 = p_0$, $T_1 = T_0$ и тогда расход газа будет определяться по формуле

$$Q = \rho_0 \frac{\pi a^2}{2} U_1 \tag{2.42}$$

В других случаях можно использовать те же соображения, какие используются в гидравлике газа ([7], стр. 48).

3. Если взять уравнения установившегося плоского течения газа без учета вязкости и конвективную производную учесть приближенно по Озеену, то получим следующие приближенные уравнения:

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{U}{\rho_0 a^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

Эти уравнения применялись к обтеканию тонких профилей как для случая $M < 1$, так и для случая $M > 1$. Уравнения (1.9) отличаются от уравнений (3.1) тем, что присоединены некоторые слагаемые от вязкости и отброшено инерционное слагаемое $U\partial v / \partial x$ в соответствии с предположениями о пограничном слое. Следовательно, уравнения (1.9) могут быть применимы также и для случая $M > 1$. Полученные в п. 1 формулы будут пригодны и для случая $M > 1$, отпадут лишь те заключения, которые были установлены при использовании неравенства (2.22). В случае $M > 1$ перед входом в трубу будет образован скачок давлений; характеристики газа на входном сечении U_1, p_1 и T_1 будут связаны с характеристиками газа в потоке перед трубой U_0, p_0 и ρ_0 известными соотношениями для скачка давлений.

Поступила 9 XII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.
2. Овчинников О. Н. Влияние входного профиля скоростей на работу диффузора. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 176, 1955.
3. Шиллер Л. Течение жидкости в трубах. ОНТИ, 1936.
4. Kaul J., Brown G. A. Results for a laminar Boundary Layer Based on a Two-Dimensional Flow Model. J. appl. Mech., vol. 22, № 3, 1955.
5. Слезкин Н. А. К вопросу об уточнении решения уравнений Рейнольдса. Докл. АН СССР, т. LIV, № 2, 1946.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
7. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. ГИТТЛ, 1951.
8. Вулис Л. А. Термодинамика газовых потоков. Госэнергоиздат, 1950.
9. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, 1951.
10. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. 11. ГИТТИ, 1934.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, 1949.