Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ГАЗОВЫХ СТРУЙ

Л. Н. Сретенский

(Москва)

В настоящей работе содержатся решение и анализ ряда задач из теории газовых струй. В первом разделе разбирается вопрос о концентрировании газовой струи; во втором разделе рассматривается обтекание пластинки в предположении, что перед пластинкой образовывается область нулевой скорости газа. Несмотря на видимое различие, у этих задач есть одно общее свойство, а именно, первая получается из известной задачи о струевом вытекании газа из бесконечного сосуда путем замены точки нулевой скорости в бесконечности целой бесконечной застойной областью; такая застойная область во второй задаче рассматривается перед пластинкой.

В третьем разделе находятся решения ряда задач о струевом течении газа, ранее изученных для несжимаемой жидкости Жуковским. Для решения этих задач служат новые частные интегралы уравнения Чаплыгина.

I. Задача о сужении газовой струи

1°. Рассмотрим поток газа, текущего со скоростью V_1; предположим, что ширина этого потока известна, известна также и плотность газа. Допустим далее, что при своем течении газ встречает две симметрично расположенные относительно его скорости прямые линии, наклоненные друг к другу под углом 2λ, и вытекает из отверстия, образовавшегося между этими прямыми, струей в свободное пространство. Наша задача состоит в определении всего течения газа на основе методов, развитых Чаплыгиным [1] в его работе «О газовых струях». В дальнейшем мы берем все обозначения для главных величин, принятые в этой работе.

Допустим, что текущий из бесконечности газ имеет скорость, параллельную положительному направлению оси x; эта ось является линией симметрии двух преграждающих стенок, причем начало координат взято в точке пересечения этой оси с прямой, соединяющей те концы стенок, с которых сбегает газ струей. Назовем через V_1 постоянную скорость потока в бесконечности перед встречей со стенками, это будет вместе с тем скорость частицы газа вдоль тех линий тока, по которым перемещаются эти частицы перед вступлением на стенки. Назовем далее через V_2 скорость частиц газа вдоль двух линий тока, сходящих с наклонных стенок и ограничивающих струю, уходящую в положительном направлении оси x.

Принимая обозначения Чаплыгина, положим

$$\tau_1 = \frac{V_1^2}{2a}, \qquad \tau_2 = \frac{V_2^2}{2a}$$

Назовем через ρ_1 плотность набегающего газа, а через ρ_2 — плотность газа в удаленных частях уходящей струи. Если через $2l_1$ мы назовем ширину набегающего потока, а через l_2 ширину уходящей струи в бесконечности, то будем иметь

$$\rho_1 l_1 V_1 = \rho_2 l_2 V_2 \tag{1.1}$$

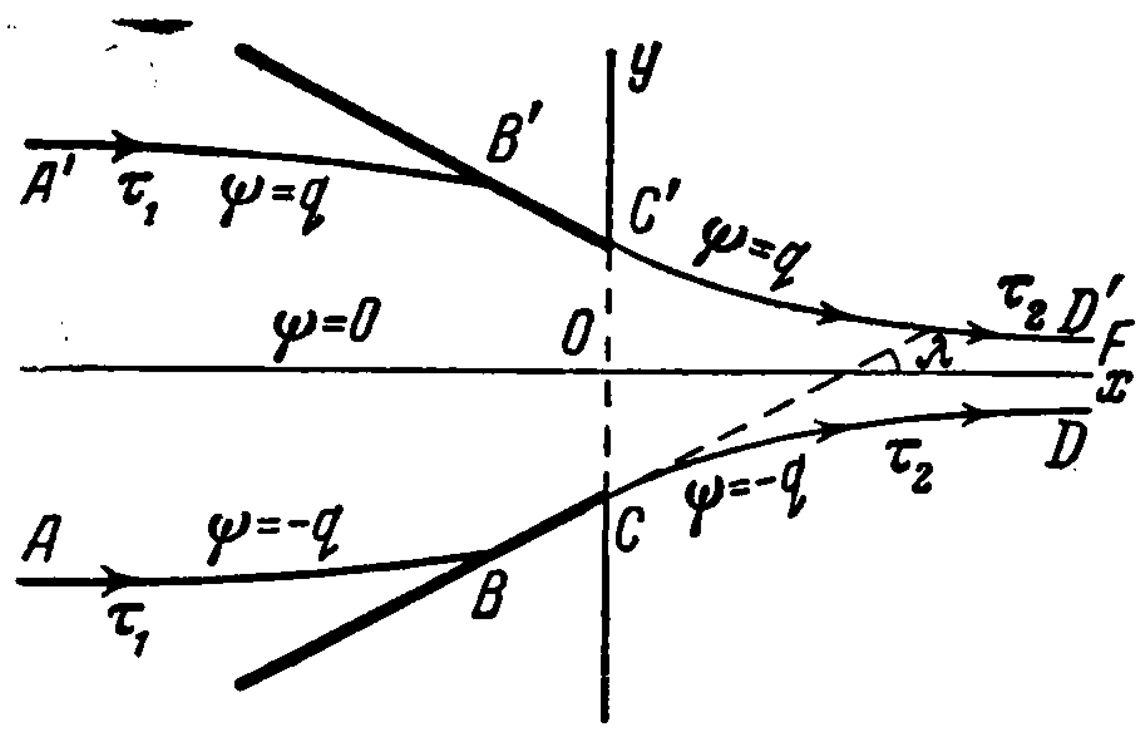
Из уравнения Бернулли, записанного в виде

$$\rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta$$

получаем два соотношения:

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{1-\tau}{1-\tau_1}\right)^\beta, \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^\beta \tag{1.2}$$

Если оси x приписать нулевое значение функции тока ψ, то вдоль линии тока $A'B'C'D'$ функция ψ будет равна постоянной величине $q = \rho_1 l_1 V_1 / \rho_0 > 0$, а вдоль линии тока $ABCD$ будет равна постоянной величине — q (фиг. 1).

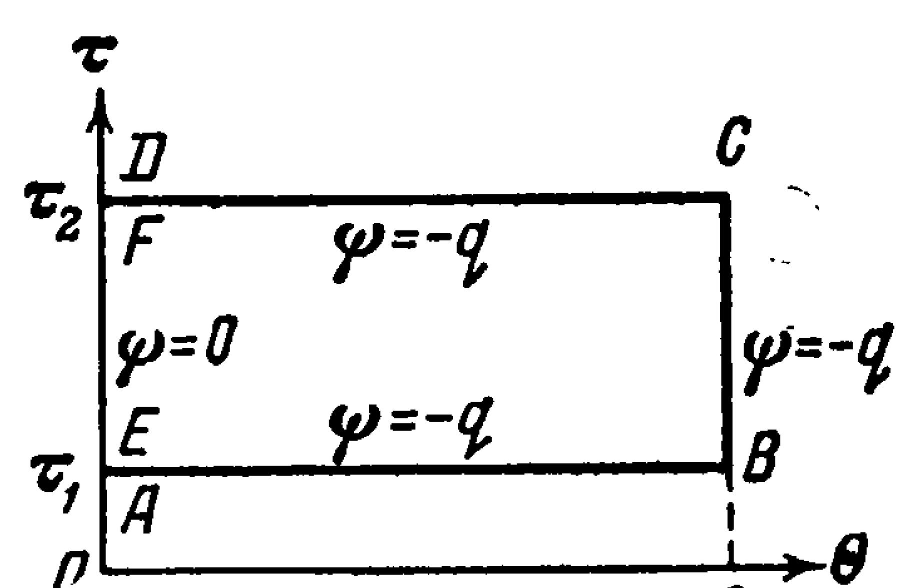


Фиг. 1

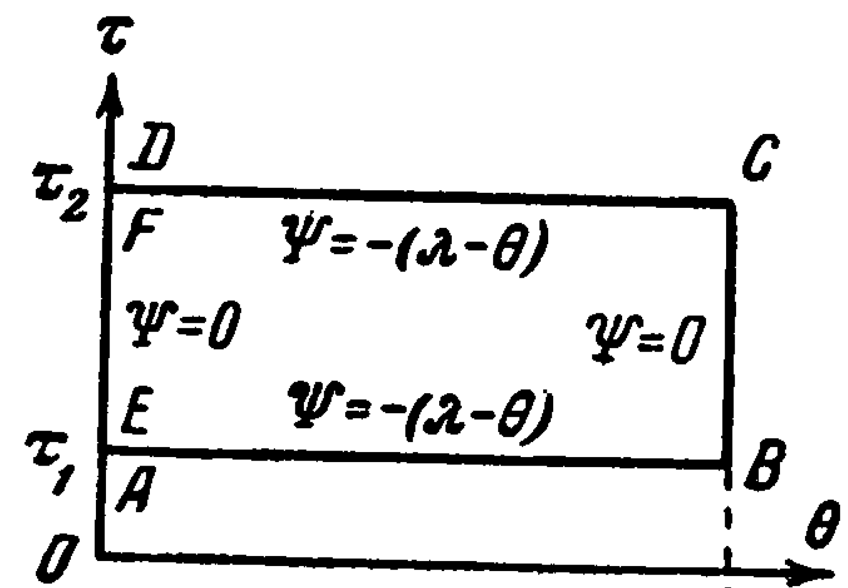
Функция ψ, рассматриваемая в зависимости от τ и угла наклона θ скорости частицы газа к оси x, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right\} + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1.3}$$

Мы найдем интеграл этого уравнения по соответствующим пограничным условиям для тех значений θ и τ, которые отвечают нижней половине потока между $ABCD$ и осью x; здесь угол θ изменяется от нуля и до λ, а



Фиг. 2



Фиг. 3

переменное τ изменяется от τ_1 до τ_2. Граничные условия для определения функции $\psi(\theta, \tau)$ запишутся так (фиг. 2):

$$\begin{array}{lllll} \text{при} & \tau = \tau_1 & \text{и для} & 0 < \theta < \lambda & \text{функция} \quad \psi = -q \\ \text{при} & \theta = \lambda & \text{и для} & \tau_1 < \tau < \tau_2 & \text{функция} \quad \psi = -q \\ \text{при} & \tau = \tau_2 & \text{и для} & \lambda > \theta > 0 & \text{функция} \quad \psi = -q \\ \text{при} & \theta = 0 & \text{и для} & \tau_2 > \tau > \tau_1 & \text{функция} \quad \psi = 0 \end{array} \tag{1.4}$$

Вместо функции $\psi(\theta, \tau)$ мы будем определять функцию $\Psi(\theta, \tau)$, интеграл уравнения (1.3), связанный с функцией $\psi(\theta, \tau)$ соотношением

$$\psi = \frac{q}{\lambda}(\Psi - \theta) \tag{1.5}$$

Новая функция Ψ должна удовлетворять следующим пограничным условиям (фиг. 3):

при $\tau = \tau_1$ и для $0 < \theta < \lambda$ функция $\Psi = -(\lambda - \theta)$
при $\theta = \lambda$ и для $\tau_1 < \tau < \tau_2$ функция $\Psi = 0$
при $\tau = \tau_2$ и для $\lambda > \theta > 0$ функция $\Psi = -(\lambda - \theta)$
при $\theta = 0$ и для $\tau_2 > \tau > \tau_1$ функция $\Psi = 0$

Для определения функции Ψ найдем частные решения уравнения (1.3). Это уравнение имеет частное решение следующего вида:

$$\Psi_n(\theta, \tau) = z_n(\tau) \sin \frac{\pi n}{\lambda} \theta \tag{1.6}$$

где n — любое целое число, большее или равное единице. Функция $\Psi_n(\theta, \tau)$ удовлетворяет, очевидно, условию

$$\Psi_n(0, \tau) = \Psi_n(\lambda, \tau) = 0$$

Функция $z_n(\tau)$ есть общий интеграл уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{dz_n}{d\tau}\right\} - \frac{\pi^2 n^2}{\lambda^2} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} z_n = 0 \tag{1.7}$$

Составим теперь ряд частных решений уравнения (1.7). Но прежде введем такие обозначения: назовем через $z_{n1}(\tau)$ интеграл уравнения (1.7), удовлетворяющий условиям

$$z_{n1}(\tau_1) = 0, \qquad \frac{dz_{n1}(\tau_1)}{d\tau} = 1$$

а через $z_{n2}(\tau)$ обозначим интеграл уравнения (1.7), удовлетворяющий условиям

$$z_{n2}(\tau_2) = 0, \qquad \frac{dz_{n2}(\tau_2)}{d\tau} = 1$$

При этих обозначениях можно написать

$$z_n(\tau) = C_{n1} z_{n1}(\tau) + C_{n2} z_{n2}(\tau)$$

где C_{n1} и C_{n2} — две произвольные константы.

Изобразим теперь функцию $\Psi(\theta, \tau)$ таким рядом:

$$\Psi(\theta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{n1} z_{n1}(\tau) + C_{n2} z_{n2}(\tau)] \sin \frac{\pi n}{\lambda} \theta$$

и определим постоянные C_{n1}, C_{n2} из следующих граничных условий:

$$\Psi(\theta, \tau_1) = -(\lambda - \theta) \quad \text{для } 0 < \theta < \lambda, \qquad \Psi(\theta, \tau_2) = -(\lambda - \theta) \quad \text{для } 0 < \theta < \lambda$$

Применяя теорию рядов Фурье, получим

$$C_{n2} = -\frac{2\lambda}{\pi n} \frac{1}{z_{n2}(\tau_1)}, \qquad C_{n1} = -\frac{2\lambda}{\pi n} \frac{1}{z_{n1}(\tau_2)}$$

отсюда найдем

$$\Psi(\theta, \tau) = -\frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{z_{n1}(\tau)}{z_{n2}(\tau_2)} + \frac{z_{n2}(\tau)}{z_{n2}(\tau_1)}\right] \sin \frac{\pi n}{\lambda} \theta$$

Обращаясь к формуле (1.5), находим функцию тока:

$$\psi = -q\left\{\frac{\theta}{\lambda} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{z_{n1}(\tau)}{z_{n1}(\tau_2)} + \frac{z_{n2}(\tau)}{z_{n2}(\tau_1)}\right] \sin \frac{\pi n}{\lambda} \theta\right\} \tag{1.8}$$

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

находим отсюда выражение потенциала скоростей:

$$\frac{\lambda\varphi}{q}=\int_{\tau_1}^{\tau}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}d\tau+\frac{4\lambda^2}{\pi^2}\frac{\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{z_{n1}'(\tau)}{z_{n1}(\tau_2)}+\frac{z_{n2}'(\tau)}{z_{n2}(\tau_1)}\right]\cos\frac{\pi n}{\lambda}\theta \tag{1.9}$$

2°. Найдем при помощи формул (1.8) и (1.9) ряд геометрических величин, относящихся к размерам и форме потока.

Вычислим прежде всего расстояние b точки B, или B', от оси потока. Имеем такую общую формулу:

$$dy=\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial y}{\partial\psi}d\psi$$

Применяя ее к линии тока $\psi=-q$ от точки A до точки B, будем иметь

$$dy=\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2\alpha\tau_1}}\frac{4q}{\pi}\frac{\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{z_{n1}'(\tau_1)}{z_{n1}(\tau_2)}+\frac{z_{n2}'(\tau_1)}{z_{n2}(\tau_1)}\right]\sin\frac{\pi n}{\lambda}\theta\,d\theta$$

Проинтегрируем это равенство от точки A до точки B; принимая во внимание формулу

$$q=(1-\tau_1)^{\beta}\sqrt{2\alpha\tau_1}\,l_1$$

получаем

$$\frac{l_1-b}{l_1}=4\tau_1\lambda\sin\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}\left[\frac{z_{n1}'(\tau_1)}{z_{n1}(\tau_2)}+\frac{z_{n2}'(\tau_1)}{z_{n2}(\tau_1)}\right] \tag{1.10}$$

Вычислим теперь разность расстояний точек B и C от оси потока; называя расстояние точки C от оси потока через c, будем иметь

$$b-c=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\tau$$

Пользуясь формулами

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{d\tau}{\sqrt{2\alpha\tau}}=-\left[\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}\sqrt{2\alpha\tau}}\right]_{\tau_1}^{\tau_2}$$

$$\left(1-\frac{\lambda^2}{\pi^2n^2}\right)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{dz_n}{d\tau}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{2\alpha\tau}}=\left[\frac{\tau z_n'(\tau)}{(1-\tau)^{\beta}\sqrt{2\alpha\tau}}+\frac{1}{2}\frac{z_n(\tau)}{(1-\tau)^{\beta}\sqrt{2\alpha\tau}}\right]_{\tau_1}^{\tau_2}$$

и разложением (1.9), находим для $b-c$ такое выражение:

$$b-c=-q\left[\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}\sqrt{2\alpha\tau}}\right]_{\tau_1}^{\tau_2}+4\tau_2l_2\lambda\sin\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}\left[\frac{z_{n1}'(\tau_2)}{z_{n1}(\tau_2)}+\frac{1}{z_{n2}(\tau_1)}\right]-$$

$$-4\tau_1l_1\lambda\sin\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}\left[\frac{1}{z_{n1}(\tau_2)}+\frac{z_{n2}'(\tau_1)}{z_{n2}(\tau_1)}\right] \tag{1.11}$$

Выведем затем формулу для определения ширины струи, уходящей в бесконечность. Имеем следующую формулу:

$$c - l_2 = \int\limits_{\lambda}^{0} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta$$

Подставляя в нее вместо $\partial y / \partial \varphi$ ее значение $\sin\theta / \sqrt{2\alpha\tau}$, а вместо $\partial \varphi / \partial \theta$ ее значение, найденное по формуле (1.9), получаем

$$\frac{c - l_2}{l_2} = -4\tau_2 l_2 \lambda \sin\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{\pi^2 n^2 - \lambda^2} \left[\frac{z'_{n1}(\tau_2)}{z_{n1}(\tau_2)} + \frac{z'_{n2}(\tau_2)}{z_{n2}(\tau_1)}\right] \tag{1.12}$$

Заметим, что если мы сложим почленно формулы (1.10), (1.11) и (1.12), то получим после приведения подобных членов тождество. Отсюда вытекает, как и должно быть, что для определения l_2 должна существовать лишь одна формула, а именно,

$$l_2 = \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_2}\right)^{\beta} \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\, l_1 \tag{1.13}$$

Так как

$$\frac{d}{d\tau}\left\{(1-\tau)^{\beta}\sqrt{\tau}\right\} = \frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{2\sqrt{\tau}}\left[1-(2\beta+1)\tau\right] > 0$$

и так как для дозвуковых потоков τ_1 и $\tau_2 < (2\beta+1)^{-1}$, то $l_2 < l_1$.

3°. Формулами двух предыдущих пунктов поставленная задача о газовых струях решена с формальной стороны полностью. Но решение получилось в весьма сложном виде, поэтому мы обратимся к выводу простых соотношений, которые позволят нам определять искомые величины в предположении, что скорости V_1 и V_2 близки одна к другой. В этом предположении формулы (1.10), (1.11), (1.12) можно привести к весьма простому виду, пользуясь теми соображениями, которые были применены Пуанкаре [2] для исследования распространения радиоволн.

Рассмотрим следующие функции переменного индекса n:

$$f_1(n) = \frac{1}{z_{n1}(\tau_2)}, \qquad f_2(n) = \frac{z'_{n2}(\tau_1)}{z_{n2}(\tau_1)}$$

$$f_3(n) = \frac{z'_{n1}(\tau_2)}{z_{n1}(\tau_2)}, \qquad f_4(n) = \frac{1}{z_{n2}(\tau_1)}$$

Отметим, что в силу соотношения

$$z_{n1}(\tau_2) = -z_{n2}(\tau_1)\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta} \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

мы можем выразить функцию $f_4(n)$ через функцию $f_1(n)$ по формуле

$$f_4(n) = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta} f_1(n)$$

Так как параметр n^2 входит в уравнение (1.7) линейно, а для определения функций $z_{n1}(\tau)$ и $z_{n2}(\tau)$ выбраны специально указанные начальные условия, то по одной из теорем Пуанкаре [3] функции $z_{n1}(\tau)$ и $z_{n2}(\tau)$ будут целыми функциями переменного n. Отсюда вытекает, что функции $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, $f_4(n)$ суть мероморфные функции комплексного переменного n. Наша ближайшая задача будет заключаться в разложении этих функций в ряды по главным частям.

Рассмотрим сначала функцию $f_1(n)$ и найдем ее полюсы. Аффикс n_j полюса будет таким значением n, при котором функция $z_{n1}(\tau_2)$ обращается в нуль; но по построению функция $z_{n1}(\tau)$ обращается в нуль и при $\tau = \tau_1$. Следовательно, n_j будет равно такому числу, для которого одновременно

$$z_{n_j1}(\tau_1) = 0, \qquad z_{n_j1}(\tau_2) = 0 \tag{1.14}$$

т. е. n_j, а лучше сказать $\pi^2 n_j^2/\lambda^2$, будет фундаментальным числом дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.14). Так как переменное τ не превосходит $1/(2\beta+1)$, то фундаментальное число $\pi^2 n_j^2/\lambda^2$ может быть лишь отрицательным числом. Введем действительное число m_j полагая: $n_j = i m_j$; тогда $\pi^2 n_j^2/\lambda^2 = -\pi^2 m_j^2/\lambda^2$, где индекс j принимает значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Отметим, что $m_{-j} = -m_j$.

Для дальнейшего исследования функции $f_1(n)$ целесообразно преобразовать уравнение (1.7) к новому виду.

Введем вместо z новую неизвестную функцию u, полагая

$$u = F(\tau)\, z$$

а вместо τ — новую независимую переменную ν по формуле

$$\nu = \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau}}{\tau\sqrt{1-\tau}}\, d\tau \qquad F(\tau) = \left[\frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}\right]^{1/4}$$

Функция $u(\nu)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} - \left(\rho^2 + \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\nu^2}\right)u = 0 \tag{1.15}$$

причем

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\nu^2} = \frac{\beta(2\beta+1)}{4}\,\frac{\tau^2}{1-\tau}\,\frac{\beta(2\beta+1)\tau^2 + 2(\beta+2)\tau - 4}{[1-(2\beta+1)\tau]^3}, \qquad \rho^2 = \frac{\pi^2 n^2}{4\lambda^2}$$

Рассмотрим решения уравнения (1.15) для больших $|\rho|$. Согласно известной теореме теории дифференциальных операторов [4] уравнение (1.15) имеет в каждом квадранте плоскости комплексного переменного ρ два фундаментальных интеграла $u^{(1)}(\nu)$ и $u^{(2)}(\nu)$, представимых для больших $|\rho|$ и для ν, лежащих в области правильности функции $(1/F)(d^2F/d\nu^2)$, следующими асимптотическими формулами:

$$u^{(1)}(\nu) = e^{\rho\nu}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \qquad u^{(2)}(\nu) = e^{-\rho\nu}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

Отсюда вытекает, что существуют для параметра ρ, изменяющегося в каждом из указанных квадрантов, такие фундаментальные интегралы $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, для которых будут иметь место следующие асимптотические формулы:

$$z^{(1)}(\tau) = \frac{1}{F(\tau)}e^{\rho\nu}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \qquad z^{(2)}(\tau) = \frac{1}{F(\tau)}e^{-\rho\nu}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

Это показывает, что в каждом из указанных квадрантов существуют для больших $|\rho|$ такие асимптотические представления интеграла $z_{n1}(\tau)$

и его производной

$$z_{n1}(\tau)=\frac{e^{\rho\nu}-e^{-\rho\nu}}{\rho g_1 F(\tau_1)}, \qquad z'_{n1}(\tau)=\frac{e^{\rho\nu}+e^{-\rho\nu}}{g_1 F(\tau_1)}\frac{d\nu}{d\tau} \tag{1.16}$$

где

$$g_1=\frac{2\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_1}}{\tau_1\sqrt{1-\tau_1}\,F(\tau_1)}=\frac{2}{F(\tau_1)}\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)_{\tau_1}$$

Точно так же для интеграла $z_{n2}(\tau)$ имеем

$$z_{n2}(\tau)=\frac{e^{\rho(\nu-\nu')}-e^{-\rho(\nu-\nu')}}{\rho g_2 F(\tau_2)}, \qquad z'_{n2}(\tau)=\frac{e^{\rho(\nu-\nu')}+e^{-\rho(\nu-\nu')}}{g_2 F(\tau_2)}\frac{d\nu}{d\tau} \tag{1.17}$$

где

$$g_2=\frac{2\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_2}}{\tau_2\sqrt{1-\tau_2}\,F(\tau_2)}=\frac{2}{F(\tau_2)}\left(\frac{d\nu}{d\tau}\right)_{\tau_2}, \qquad \nu'=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau}}{\tau\sqrt{1-\tau}}\,d\tau$$

Отсюда вытекают следующие асимптотические представления функций $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, $f_4(n)$ для больших $|\rho|$, или для больших $|n|$ во всех квадрантах:

$$f_1(n)=\frac{2\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_1}}{\tau_1\sqrt{1-\tau_1}}\,\frac{\rho}{e^{\rho\nu'}-e^{-\rho\nu'}}, \qquad f_2(n)=\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_1}}{\tau_1\sqrt{1-\tau_1}}\,\rho\,\frac{e^{-\rho\nu'}+e^{\rho\nu'}}{e^{-\rho\nu'}-e^{\rho\nu'}}$$

$$f_3(n)=\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_2}}{\tau_2\sqrt{1-\tau_2}}\,\rho\,\frac{e^{\rho\nu'}+e^{-\rho\nu'}}{e^{\rho\nu'}-e^{-\rho\nu'}}, \qquad f_4(n)=\frac{2\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_2}}{\tau_2\sqrt{1-\tau_2}}\,\frac{\rho}{e^{-\rho\nu'}-e^{\rho\nu'}}$$

Основываясь на этих формулах, можно установить сходимость рядов, входящих в формулы (1.10), (1.11), (1.12); пользуясь же формулами (1.16) и (1.17), можно доказать и сходимость рядов (1.8) и (1.9), определяющих функцию тока и потенциал скоростей.

Выполним теперь разложение функций $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, $f_4(n)$ в ряды по главным частям. Начнем с функции $f_1(n)$.

Разложение этой функции в ряд по главным частям будет

$$f_1(n)=\frac{1}{z_{01}(\tau_2)}+i\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{n-im_j}+\frac{1}{im_j}\right)\xi_j$$

где действительное число ξ_j определяется формулой

$$\frac{1}{\xi_j}=i\left[\frac{\partial z_{n1}(\tau_2)}{\partial n}\right]_{n=im_j}$$

Отметим, что $\xi_{-j}=-\xi_j$.

Преобразуем предыдущее выражение $f_1(n)$ к такому виду:

$$f_1(n)=\frac{1}{z_{01}(\tau_2)}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j m_j}{n^2+m_j^2} \tag{1.18}$$

Пользуясь соотношением между функциями $f_1(n)$ и $f_4(n)$, мы можем написать разложение по главным частям и функции $f_4(n)$:

$$f_4(n)=\frac{z_0{'}_2(\tau_2)}{z_{02}(\tau_1)}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j}{m_j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j m_j}{n^2+m_j^2} \tag{1.19}$$

причем

$$\omega_j=-\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta}\xi_j$$

Разложим теперь функцию $f_2(n)$ в ряд по главным частям. Принимая во внимание асимптотическую формулу для $f_2(n)$, находим после небольших преобразований

$$f_2(n)=\frac{z_0{'}_2(\tau_1)}{z_{02}(\tau_1)}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_j}{m_j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_j m_j}{n^2+m_j^2} \tag{1.20}$$

где

$$i\eta_j=\left[\frac{z'_{n2}(\tau_1)}{(\partial/\partial n)\,z_{n2}(\tau_1)}\right]_{n-im_j},\qquad \eta_{-j}=-\eta_j$$

Аналогично для функции $f_3(n)$ получаем такое разложение:

$$f_3(n)=\frac{z'_{01}(\tau_2)}{z_{01}(\tau_2)}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j}{m_j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j m_j}{n^2+m_j^2} \tag{1.21}$$

где

$$i\zeta_j=\left[\frac{z'_{n1}(\tau_2)}{(\partial/\partial n)\,z_{n1}(\tau_2)}\right]_{n-im_j}$$

4°. Возьмем теперь формулы (1.10) и (1.12) и преобразуем их к новому виду, заменяя в них функции $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, $f_4(n)$ их разложениями (1.18), (1.19), (1.20), (1.21). Получим следующие результаты:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}f_1(n)=\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-\operatorname{cosec}\lambda\right)\left\{\frac{z'_{01}(\tau_1)}{z_{01}(\tau_2)}+2\lambda^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}\frac{1}{\lambda^2+\pi^2m_j^2}\right\}-$$
$$-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}\frac{1}{\lambda^2+\pi^2m_j^2}\left(1-\frac{\pi m_j}{\operatorname{sh}\pi m_j}\right)$$

Заменяя здесь в правой части ξ_j последовательно через η_j, ζ_j, ω_j, будем иметь новые выражения соответственно для

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}f_2(n),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}f_3(n),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\pi^2n^2-\lambda^2}f_4(n)$$

Обратимся теперь к формулам (1.10), (1.12) и подставим в них полученные выражения рассматриваемых сумм. Имея в виду равенства

$$\frac{z'_{02}(\tau_1)}{z_{01}(\tau_2)}+\frac{z'_{02}(\tau_1)}{z_{02}(\tau_1)}=0,\qquad \frac{z'_{01}(\tau_2)}{z_{01}(\tau_2)}+\frac{z'_{02}(\tau_2)}{z_{02}(\tau_2)}=0$$

получаем

$$\frac{c-l_2}{l_2}=4\tau_2\lambda\sin\lambda(\pi S_1-\lambda\csc\lambda\, S_2) \tag{1.22}$$

$$\frac{l_1-b}{l_1}=4\tau_1\lambda\sin\lambda\,(\pi S_3-\lambda\csc\lambda S_4) \tag{1.23}$$

$$S_1=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j+\omega_j}{(\lambda^2+\pi^2m_j^2)\operatorname{sh}\pi m_j},\qquad S_2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j+\omega_j}{m_j}\frac{1}{\lambda^2+\pi^2m_j^2} \tag{1.24}$$

$$S_3=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j+\eta_j}{(\lambda^2+\pi^2m_j^2)\operatorname{sh}\pi m_j},\qquad S_4=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j+\eta_j}{m_j}\frac{1}{\lambda^2+\pi^2m_j^2} \tag{1.25}$$

5°. Формулы (1.22) и (1.23) могут быть приведены к исключительно простому виду в том случае, если числа τ_1 и τ_2 близки одно к другому.

Для получения этих новых формул возьмем уравнение (1.15) и перепишем его следующим образом, заменяя n через im:

$$\frac{d^2u}{d\nu^2}+\left(\frac{\pi^2m^2}{4\lambda^2}-\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\nu^2}\right)u=0$$

Введем вместо ν новое независимое переменное

$$\xi=\frac{\pi}{\nu'}\nu$$

Отметим, что при небольшом отличии τ_1 от τ_2 параметр ν' очень мал. В переменном ξ предыдущее дифференциальное уравнение запишется так:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left[s^2-\frac{\nu'^2}{\pi^2}\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\nu^2}\right]u=0 \qquad \left(s=\frac{m\nu'}{2\lambda}\right) \tag{1.26}$$

Вычислим интеграл этого уравнения по следующему условию:

$$u(0)=0, \qquad \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=0}=1$$

Начальное переменное τ может быть выражено через переменное ξ в виде следующего ряда по степеням: $\nu'\xi/\pi$; получим

$$\tau=\tau_1+\frac{\tau_1\sqrt{1-\tau_1}}{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_1}}\frac{\nu'\xi}{\pi}+\cdots$$

В силу этого имеем

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\nu^2}=a_0+a_1\nu'\xi+a_2\nu'^2\xi^2+\ldots \qquad \left(a_0=\left[\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\nu^2}\right]_{\nu=0}\right).$$

Отсюда можем переписать уравнение (1.26) следующим образом:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+s^2u=\frac{\nu'^2}{\pi^2}[a_0+a_1\nu'\xi+a_2\nu'^2\xi^2+\cdots]\,u(\xi) \tag{1.27}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда по степеням параметра ν'; положим

$$u(\xi)=u_0(\xi)+\nu'u_1(\xi)+\nu'^2u_2(\xi)+\nu'^3u_3(\xi)+\ldots \tag{1.28}$$

Для определения коэффициентов $u_0(\xi)$, $u_1(\xi),\ldots$ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2u_0}{d\xi^2}+s^2u_0=0,\qquad \frac{d^2u_1}{d\xi^2}+s^2u_1=0,\qquad \frac{d^2u_2}{d\xi^2}+s^2u_2=\frac{a_0}{\pi^2}u_0$$

$$\frac{d^2u_3}{d\xi^2}+s^2u_3=\frac{1}{\pi^2}(a_1\xi u_0+a_0u_1),\qquad \frac{d^2u_4}{d\xi^2}+s^2u_4=\frac{1}{\pi^2}(a_0u_2+a_1\xi u_1+a_2\xi^2u_0),\ldots$$

Эта система уравнений должна быть проинтегрирована при следующих условиях:

$$u_0(0)=0,\quad u_1(0)=0,\quad u_2(0)=0,\quad u_3(0)=0,\quad u_4(0)=0,\ldots$$
$$u_0'(0)=1,\quad u_1'(0)=1,\quad u_2'(0)=0,\quad u_3'(0)=0,\quad u_4'(0)=0,\ldots$$

Интегрируя полученную систему уравнений при этих условиях, имеем

$$u_0(\xi)=\frac{1}{s}\sin s\xi,\quad u_1(\xi)=0,\quad u_2(\xi)=-\frac{a_0}{2\pi^2s^3}[s\xi\cos s\xi-\sin s\xi]$$

$$u_3(\xi)=-\frac{a_1\xi}{4\pi^2s^3}[s\xi\cos s\xi-\sin s\xi]$$

$$u_4(\xi)=\frac{1}{8\pi^4s^3}(2\pi^2a_2-a_0^2)\,\xi^2\sin s\xi-\frac{a_2}{6\pi^2s^2}\xi^3\cos s\xi+$$
$$+\frac{1}{8\pi^4s^4}(2\pi^2a_2-3a_0^2)\,\xi\cos s\xi-\frac{1}{8\pi^4s^4}(2\pi^2a_2-3a_0^2)\frac{\sin s\xi}{s}$$

Таким образом, ряд (1.28) построен. Найдем число s из условия, чтобы решение (1.28) уравнения (1.26) обращалось в нуль для $\xi = \pi$.

Уравнение для определения s запишется так: (1.29)

$$\sin \pi s - \frac{a_0}{2\pi^2 s^2}[\pi s \cos \pi s - \sin \pi s]'^2 - \frac{a_1 \pi}{4\pi^2 s^2}[\pi s \cos \pi s - \sin \pi s]\, \nu'^3 + \ldots = 0$$

При $\nu' = 0$ это уравнение имеет решение $s = j$, где j — произвольное целое число. Частная производная по s от левой части этого уравнения отлична от нуля при $\nu' = 0$ и $s = j$; следовательно, уравнение (1.29) имеет при $\nu' \neq 0$ голоморфное решение; это решение с точностью до вторых степеней ν' включительно может быть представлено рядом

$$s = j + \frac{a_0}{2\pi^2 j}\nu'^2 + \ldots \tag{1.30}$$

Основываясь на предыдущих вычислениях, можем записать $u(\xi)$ в явном виде так:

$$u_{n1}(\xi) = \frac{1}{s}\sin s\xi - \frac{a_0}{2\pi^2 s^3}(s\xi \cos s\xi - \sin s\xi)\,\nu'^2 + \ldots \tag{1.31}$$

Возьмем снова уравнение (1.26) и найдем тот его интеграл, который удовлетворяет условиям

$$u(\pi) = 0, \qquad \frac{du}{d\xi}(\pi) = 1$$

Положим

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \nu' u_1(\xi) + \nu'^2 u_2(\xi) + \ldots \tag{1.32}$$

Для определения новых функций $u_0, u_1, u_2, \ldots$ будем иметь прежние уравнения, но граничные условия будут иные, а именно, следующие:

$$u_0(\pi) = 0, \qquad u_1(\pi) = 0, \qquad u_2(\pi) = 0, \ldots$$
$$u_0'(\pi) = 1, \qquad u_1'(\pi) = 0, \qquad u_2'(\pi) = 0, \ldots$$

По этим условиям новое решение уравнения (1.26) может быть построено в виде следующего ряда:

$$u_{n2}(\xi) = \frac{1}{s}\sin s(\xi - \pi) - \frac{a_0}{2\pi^2 s^3}[s(\xi - \pi)\cos s(\xi - \pi) - \sin s(\xi - \pi)]\nu'^2 + \ldots \tag{1.33}$$

Нам необходимо иметь функции z_{n1} и z_{n2}. Эти функции связаны с функциями u_{n1} и u_{n2}, которые даются соответственно формулами (1.31) и (1.33), и удовлетворяют краевым условиям, соотношениями

$$z_{n1}(\tau) = h(\tau_1)\frac{u_{n1}}{F(\tau)}\frac{\nu'}{\pi}, \quad z_{n2}(\tau) = h(\tau_2)\frac{u_{n2}}{F(\pi)}\frac{\nu'}{\pi}, \quad h(\tau) = F(\tau)\frac{d\tau}{d\nu} \tag{1.34}$$

Отсюда, пользуясь формулами (1.30), (1.31) и соотношением

$$s = -i\frac{n\nu'}{2\lambda}$$

получим следующий результат:

$$\frac{\partial z_{n1}(\xi)}{\partial n} = \frac{\nu'}{\pi}\frac{h(\tau_1)}{F(\tau_2)}\left\{\frac{s\xi \cos s\xi - \sin s\xi}{s^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{a_0}{2\pi^2 s^4}[(3 - s^2\xi^2)\sin s\xi - 3s\xi \cos s\xi]\,\nu'^2 + \ldots\right\}\left(-\frac{i\nu'}{2\lambda}\right)$$

Полагая здесь $\xi = \pi$ и вводя вместо s его выражение (1.30), получим

$$\left[\frac{\partial z_{n1}(\tau_2)}{\partial n}\right]_{n=im_j} = (-)^{j+1}\frac{i\nu'^2}{2\lambda\pi}\frac{h(\tau_1)}{F(\tau_2)}\frac{\pi}{j}\left\{1 + \frac{3a_0}{2\pi^2}\frac{\nu'^2}{j^2} + \ldots\right\} \tag{1.35}$$

Пользуясь второй формулой (1.33), находим аналогичными вычислениями

$$\left[\frac{\partial z_{n2}(\tau_1)}{\partial n}\right]_{n=im_j} = (-)^{j}\frac{i\nu'^2}{2\lambda\pi}\frac{h(\tau_2)}{F(\tau_1)}\frac{\pi}{j}\left\{1 + \frac{3a_0}{2\pi^2}\frac{\nu'^2}{j^2} + \ldots\right\} \tag{1.36}$$

Полученные формулы (1.35) и (1.36) дают возможность найти числа $\xi_j, \eta_j, \zeta_j, \omega_j$, введенные в п. 3°. Имеем

$$\xi_j = (-)^j\frac{2\lambda j}{\nu'^2}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_1)}\left\{1 - \frac{3a_0}{2\pi^2}\frac{\nu'^2}{j^2} + \ldots\right\}$$

$$\eta_j = -\frac{2\lambda j}{\nu'^2}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_1)}\left\{1 - \frac{3a_0}{2\pi^2}\frac{\nu'^2}{j^2} + \ldots\right\}$$

$$\zeta_j = \frac{2\lambda j}{\nu'^2}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_2)}\left\{1 - \frac{3a_0}{2\pi^2}\frac{\nu'^2}{j^2} + \ldots\right\}$$

$$\omega_j = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta}\xi_j = (-)^{j+1}\frac{2\lambda j}{\nu'^2}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_2)}\left\{1 - \frac{3a_0}{2\pi^2}\frac{\nu'^2}{j^2} + \ldots\right\}$$

6°. Составим, пользуясь этими разложениями, формулы (1.22) и (1.23). Найдем сначала сумму ряда S_4 для малых ν'. Имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}\frac{1}{\lambda^2+\pi^2 m_j^2} = -\frac{\nu'}{48\lambda^2}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_1)}\left\{1 - \frac{7(12a_0+1)}{240}\nu'^2 + \ldots\right\}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_j}{m_j}\frac{1}{\lambda^2+\pi^2 m_j^2} = -\frac{\nu'}{24\lambda^2}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_1)}\left\{1 - \frac{12a_0+1}{60}\nu'^2 + \ldots\right\}$$

Отсюда

$$S_4 = -\frac{\nu'}{24\lambda^2}\left\{\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_1)} + \frac{1}{2}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_1)}\right\} + \frac{12a_0+1}{24\cdot 60}\frac{\nu'^3}{\lambda^2}\left\{\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_1)} + \frac{7}{8}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_1)}\right\} + \ldots \tag{а}$$

Выражение для суммы ряда S_2, определенного формулой (1.25) для малых ν', имеет следующий вид:

$$S_2 = \frac{\nu'}{24\lambda^2}\left\{\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_2)} + \frac{1}{2}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_2)}\right\} - \frac{12a_0+1}{24\cdot 60}\frac{\nu'^3}{\lambda^2}\left\{\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_2)} + \frac{7}{8}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_2)}\right\} + \ldots \tag{б}$$

Если число ν' мало, как это и предполагается, то бесконечные суммы S_1 и S_3, определенные формулами (1.24) и (1.25), будут значительно меньше сумм S_2 и S_4.

Поэтому, подставляя в формулы (1.22) и (1.23) вместо S_2 и S_4 их выражения (а) и (б) и пренебрегая членами, содержащими суммы S_1 и S_2, получим

$$\frac{c-l_2}{l_2} = \frac{\tau_2\nu'}{6}\left\{\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_2)} + \frac{1}{2}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_2)}\right\} - \frac{12a_0+1}{360}\tau_2\nu'^3\left\{\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_2)} + \frac{7}{8}\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_2)}\right\} + \ldots$$

$$\frac{l_1-b}{l_1} = \frac{\tau_1\nu'}{6}\left\{\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_1)} + \frac{1}{2}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_1)}\right\} - \frac{12a_0+1}{360}\tau_1\nu'^3\left\{\frac{F(\tau_1)}{h(\tau_1)} + \frac{7}{8}\frac{F(\tau_2)}{h(\tau_1)}\right\} + \ldots$$

Принимая во внимание значение функции $h(\tau)$, эти две формулы можно преобразовать к такому виду: (1.37)

$$\frac{c-l_2}{l_2} = \frac{\nu'}{6}\left\{\left[1 + \frac{1}{2}\frac{F(\tau_1)}{F(\tau_2)}\right] - \frac{1+12a_0}{60}\nu'^2\left[1 + \frac{7}{8}\frac{F(\tau_1)}{F(\tau_2)}\right] + \ldots\right\}\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_2}}{\sqrt{1-\tau_2}}$$

$$\frac{l_1-b}{l_1} = \frac{\nu'}{6}\left\{\left[1 + \frac{1}{2}\frac{F(\tau_2)}{F(\tau_1)}\right] - \frac{1+12a_0}{60}\nu'^2\left[1 + \frac{7}{8}\frac{F(\tau_2)}{F(\tau_1)}\right] + \ldots\right\}\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_1}}{\sqrt{1-\tau_1}}$$

Примем в качестве основных данных задачи величины τ_1, l_1, c; тогда по формулам (1.13) и (1.37) сможем определить τ_2, l_2 и b. Если мы знаем величину скорости звука в покоящемся газе, то тем самым имеем значение параметра α и, следовательно, можем определить скорость вытекающего из отверстия газа.

Если в формулах (1.37) положить $\beta = 0$, то получим формулы, относящиеся к несжимаемой жидкости.

В этом случае имеем $F(\tau) = 1$, $a_0 = 0$ и предыдущие формулы приобретают следующий вид:

$$\frac{c - l_2}{l_2} = \frac{1}{6}\nu'\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{32}\nu'^2 + \ldots\right)$$

$$\frac{l_1 - b}{l_1} = \frac{1}{6}\nu'\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{32}\nu'^2 + \ldots\right)$$

Эти два равенства выражают теорему Жуковского [6]

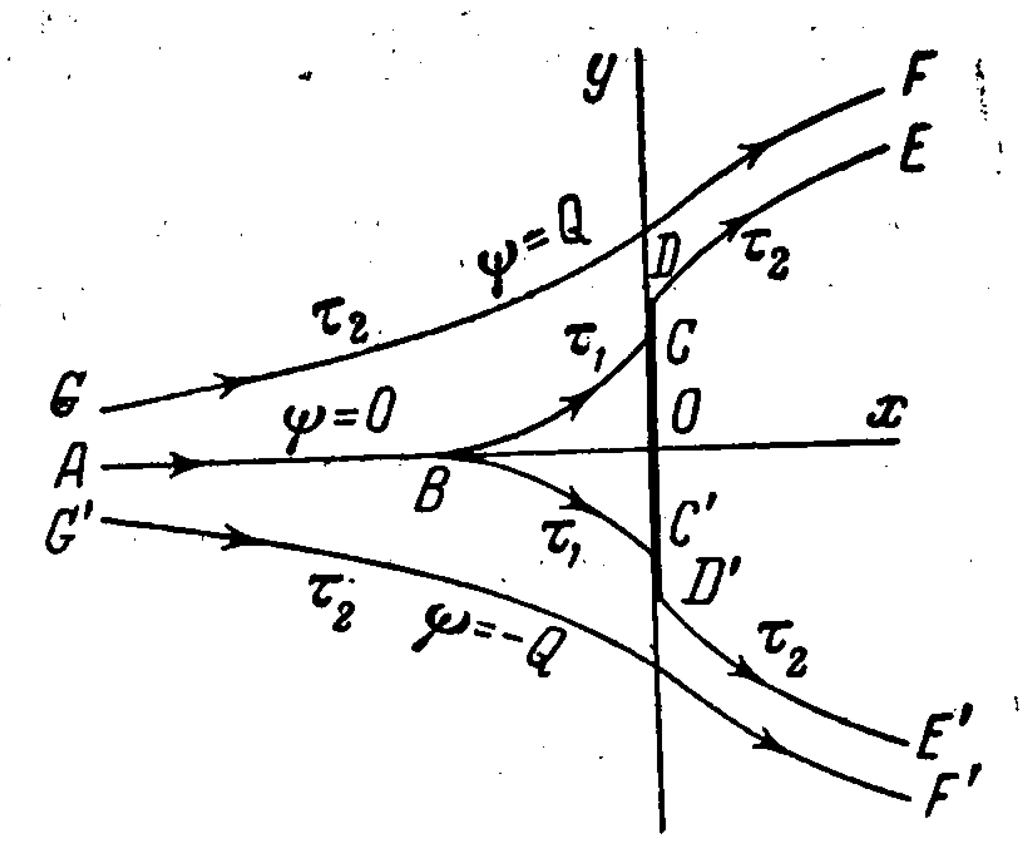
$$\frac{l_1 - b}{l_1} = \frac{c - l_2}{l_2}$$

Надо отметить, что эта теорема имеет место для несжимаемой жидкости при любых τ_1 и τ_2 и в такой общности она может быть получена из полных формул (1.10) и (1.12).

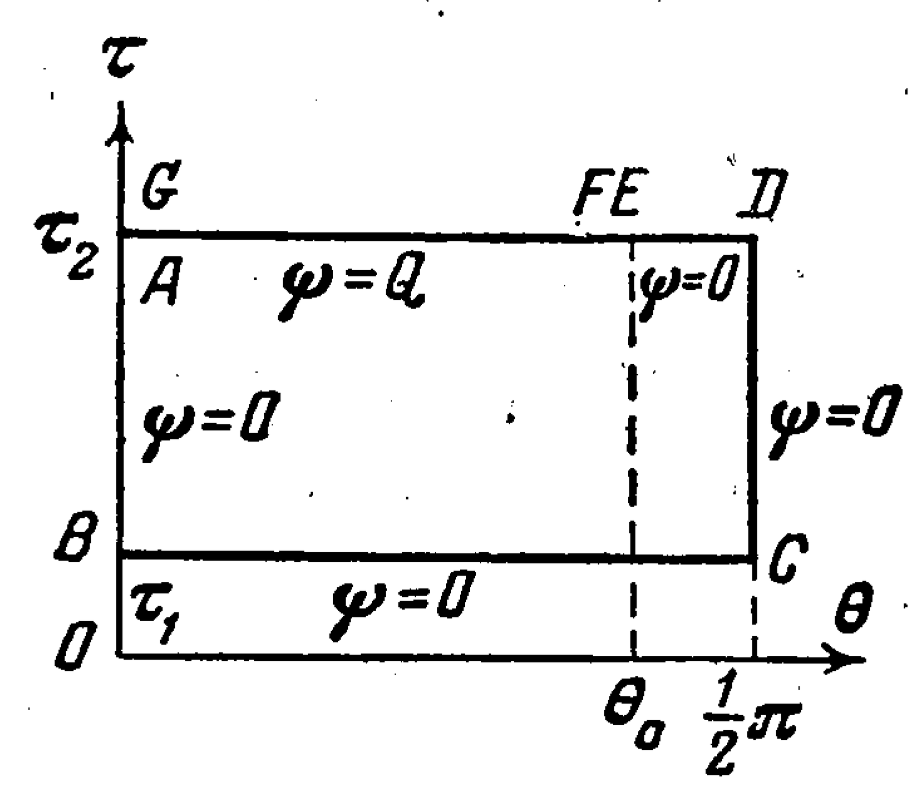
II. Давление газового потока на пластинку

7°. Методом, изложенным в предыдущих пунктах, может быть решена задача о струйном обтекании прямолинейной пластинки в предположении, что точка нулевой скорости, образующаяся на пластинке, заменена клинообразной областью спокойной жидкости [7].

Итак, предположим, что поток газа, имеющий в бесконечности скорость V_2 и ширину $2L$, набегает на пластинку длиной $2l$, симметрично расположенную относительно газового потока; допустим далее, что поток сры-



Фиг. 4



Фиг. 5

вается с концов пластинки свободными линиями тока и образует вместе с тем у середины пластинки застойную область, вдоль криволинейных границ которой скорость частиц газа постоянна и равна V_1. Эта застойная область заменяет точку нулевой скорости, обычно образующуюся у середины пластинки. Наша задача состоит в определении давления потока на пластинку и в нахождении различных геометрических величин, связанных с рассматриваемым течением.

На фиг. 4 линии тока GF и $G'F'$ симметрично расположены относительно оси ox и ограничивают всю текущую массу газа; линии тока DE и

DE' срываются с концов D и D' пластинки; части BC и BC' полных линий тока $ABCDE$ и $ABC'D'E'$ заменяют точку нулевой скорости. На линиях тока DE, $D'E'$ скорость течения постоянна и равна V_2; на линиях тока BC, BC' скорость также постоянна и равна $V_1 < V_2$.

Пусть линии тока $ABCDE$ отвечает нулевое значение функции тока $\psi(\tau, \theta)$, а линии тока GF отвечает значение функции тока, равное $Q > 0$.

Обозначим через θ_0 угол, который образует направление сбегающей струи с осью x; эта величина неизвестна. На фиг. 5, изображающей плоскость переменных Чаплыгина, представлена та область $ABCDEFGA$, внутри которой следует найти интеграл уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right\} + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2.1}$$

по значениям ψ на контуре этой области.

Будем искать функцию $\psi(\tau, \theta)$ в виде следующего бесконечного ряда:

$$\psi(\tau, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_2)} \sin 2n\theta \tag{2.2}$$

причем коэффициенты A_n ищутся, а функция $z_n(\tau)$ есть интеграл уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{dz}{d\tau}\right\} - n^2 \frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}} z = 0 \tag{2.3}$$

удовлетворяющий следующим требованиям:

$$z_n(\tau_1) = 0, \qquad \left(\frac{dz_n}{d\tau}\right)_{\tau_1} = 1$$

Коэффициенты A_n должны быть найдены из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n\theta = \begin{cases} Q & (0 < \theta < \theta_0) \\ 0 & (\theta_0 < \theta < \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$$

Получаем

$$A_n = \frac{4Q}{\pi n} \sin^2 n\theta_0$$

Таким образом, для функции тока $\psi(\tau, \theta)$ имеем такое разложение:

$$\psi(\tau, \theta) = \frac{4Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\theta_0}{n} \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_2)} \sin 2n\theta \tag{2.4}$$

Отсюда получаем разложение потенциала скоростей:

$$\varphi(\tau, \theta) = C - \frac{4Q\tau}{\pi(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\theta_0}{n^2} \frac{z_n'(\tau)}{z_n(\tau_2)} \cos 2n\theta \tag{2.5}$$

8°. Вычислим на основе формул предыдущего пункта длины OC и CD пластинки.

Для вычисления длины OC заметим, что вдоль линии тока BC имеет место формула

$$dy = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2\alpha\tau}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta$$

Интегрируя обе части этой формулы по θ от 0 до $^1/_2\pi$, заменив сначала τ через τ_1, будем иметь при помощи формулы (2.5)

$$OC = \frac{16Q}{\pi} \frac{\tau_1}{\sqrt{2\alpha\tau_1}\,(1-\tau_1)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{4n^2-1} \frac{1}{z_n(\tau_2)} \sin^2 n\theta_0 \tag{2.6}$$

Вдоль отрезка CD пластинки имеем

$$dy = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2\alpha\tau}} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} d\tau, \qquad \theta = \frac{1}{2}\pi$$

Интегрируя обе части этой формулы по переменному τ от τ_1 до τ_2, получаем

$$CD = \frac{4Q}{\pi\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n^2} \frac{\sin^2 n\theta_0}{z_n(\tau_2)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{dz_n}{d\tau}\right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

или, выполняя интеграцию:

$$CD = \frac{16Q}{\pi\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{4n^2-1} \frac{\sin^2 n\theta_0}{z_n(\tau_2)} \left\{\frac{1}{(1-\tau_2)^\beta} \frac{d}{d\tau_2} [\sqrt{\tau_2} z_n(\tau_2)] - \frac{\sqrt{\tau_1}}{(1-\tau_1)^\beta}\right\} \tag{2.7}$$

Сложим почленно эту формулу с формулой (1.6) и воспользуемся для преобразования формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{4n^2-1} \sin^2 n\theta_0 = \frac{1}{4}\pi \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \tag{2.8}$$

Найдем

$$2l = \frac{32Q}{\pi\sqrt{2\alpha\tau_2}\,(1-\tau_2)^\beta} \left\{\frac{1}{8}\pi \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 + \tau_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{4n^2-1} \frac{z'_n(\tau_2)}{z_n(\tau_2)} \sin^2 n\theta_0\right. \tag{2.9}$$

9°. Вычислим величину давления потока на пластинку. Для этого назовем через p_2 давление в бесконечной области неподвижного газа за пластинкой, а через p_1 — давление газа в застойной области перед пластинкой. Тогда результирующая R сил давления газа на пластинку будет

$$R = 2\int_{CD} p\,dy - 2p_2\, CD + 2(p_1 - p_2)\, OC \tag{2.10}$$

или

$$R = 2\int_{CD} p\,dy - 2p_2 l + 2p_1\, OC \qquad \left(p = p_1\left[\frac{1-\tau}{1-\tau_1}\right]^{\beta+1}\right)$$

Вдоль отрезка CD обтекаемой пластинки имеем

$$dy = \frac{4Q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n^2} \frac{\sin^2 n\theta_0}{z_n(\tau_2)} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau z_n'(\tau)}{(1-\tau)^\beta} d\tau$$

Отсюда получаем

$$\int_{CD} p\,dy = \frac{4Q}{\pi\sqrt{2\alpha}} \frac{p_1}{(1-\tau_1)^{\beta+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n^2} \frac{\sin^2 n\theta_0}{z_n(\tau_2)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(1-\tau)^{\beta+1}}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau z_n'(\tau)}{(1-\tau)^\beta} d\tau$$

Но

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(1-\tau)^{\beta+1}}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{d\tau} \frac{\tau z_n'(\tau)}{(1-\tau)^\beta} d\tau = \frac{4n^2}{4n^2-1}(1-\tau_2)\frac{d}{d\tau_2}[\sqrt{\tau_2}\, z_n(\tau_2)] +$$

$$+ \frac{4n^2}{4n^2-1}(\beta+1)\sqrt{\tau_2} z_n(\tau_2) - \frac{4n^2}{4n^2-1}\sqrt{\tau_1}(1-\tau_1)$$

Следовательно,

$$\int\limits_{CD} p\,dy = p_1 l\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta+1} - p_1\, OC + \frac{4Q\,p_1}{(1-\tau_1)^{\beta+1}}\sqrt{\frac{\tau_2}{2\alpha}}\sin^2\frac{1}{2}\theta_0$$

Составим теперь выражение R по формуле (2.10); получаем следующее окончательное выражение для R:

$$R = \frac{8Q(\beta+1)}{(1-\tau_1)^{\beta+1}}\sqrt{\frac{\tau_2}{2\alpha}}\sin^2\frac{1}{2}\theta_0\, p_1 \tag{2.11}$$

Таким образом, поставленная нами задача решена. Задаваясь величинами τ_1, τ_2, l и Q, можем вычислить по формуле (2.9) угол θ_0, а по формуле (2.7) величину смоченной части пластинки; формула (2.11) дает затем величину давления потока на пластинку.

10°. Получим из формул предыдущего пункта результаты Чаплыгина в рассматриваемой схеме обтекания, но для несжимаемой жидкости.

В этом случае имеем

$$\beta = 0, \qquad z_n(\tau) = \frac{\tau_1}{2n}\left(\frac{\tau^n}{\tau_1^{\,n}} - \frac{\tau_1^{\,n}}{\tau^n}\right)$$

$$z_n'(\tau) = \frac{\tau_1}{2}\left(\frac{\tau^{n-1}}{\tau_1^{\,n}} - \frac{\tau_1^{\,n}}{\tau^{n+1}}\right)$$

Составим теперь формулы (2.6) и (2.9); получим

$$OC = \frac{32Q}{\pi V_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n}{4n^2-1}\,\frac{q^n\sin^2 n\theta_0}{1-q^{2n}} \tag{2.12}$$

$$2l = \frac{32Q}{\pi V_2}\left(\frac{1}{8}\pi\sin^2\frac{1}{2}\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n}{4n^2-1}\,\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 n\theta_0\right) \tag{2.13}$$

где

$$q = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 < 1$$

Для несжимаемой жидкости имеем

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho}, \qquad \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{1}{2}V_1^2, \qquad \tau = \frac{\rho V^2}{2p_0}$$

где p_0 — давление при нулевой скорости, p_1 — давление при скорости V_1. Благодаря этим формулам имеем для несжимаемой жидкости

$$\frac{\beta+1}{(1-\tau_1)^{\beta+1}}\sqrt{\frac{\tau_2}{2\alpha}}\,p_1 = \left(1-\frac{\rho V_1^2}{2p_0}\right)^{-1}\frac{\rho V_2}{2p_0}\,p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2$$

Отсюда формула (2.11) приобретает такой вид:

$$R = 4Q\rho V_2\sin^2\frac{1}{2}\theta_0 \tag{2.14}$$

Совокупность формул (2.12), (2.13), (2.14) и решает поставленную струевую задачу для несжимаемой жидкости. Из этих формул мы можем исключить θ_0 и получить формулы Чаплыгина в том случае, когда набегающий поток имеет бесконечную ширину; в этом случае $Q = \infty$. Из формулы (2.13) видно, что при Q, стремящемся к бесконечности, угол θ_0 будет неограниченно приближаться к нулю. Выясним закон этого стремления к нулевому пределу. С этой целью найдем величину бесконечного ряда формулы (2.13) для θ_0 малых. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n}{4n^2-1}\,\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 n\theta_0 = -\frac{1}{8}\ln\cos\theta_0 + \frac{\theta_0^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n}{4n^2-1}\,\frac{\sin^2 n\theta_0}{n^2\theta_0^2} +$$

$$+\, 2\theta_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n^3}{4n^2-1}\,\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\,\frac{\sin^2 n\theta_0}{n^2\theta_0^2}$$

Отсюда вытекает, что для малых θ_0 будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n}{4n^2-1}\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 n\theta_0=\left\{\frac{1}{8}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n^3}{4n^2-1}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}\theta_0^2$$

Теперь формула (2.13) дает для малых θ_0 такой результат:

$$Q\theta_0^2=\frac{2\pi lV_2}{\pi+4+64S},\qquad S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{4n^2-1}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}$$

Подставляя это выражение $Q\theta_0^2$ в формулы (2.12) и (2.14), получаем результаты Чаплыгина [7]:

$$OC=\frac{64l}{\sqrt{q}}\frac{T}{\pi+4+64S},\qquad R=\frac{2\pi\rho lV_2^2}{\pi+4+64S},\qquad T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n^3}{4n^2-1}\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

Рассмотрим еще один частный случай. Допустим, что область нулевой скорости отсутствует перед пластинкой; в этом допущении число q будет равно нулю и формула (2.13) приобретает следующий вид:

$$2l=\frac{32Q}{\pi V_2}\left(\frac{1}{8}\pi\sin^2\frac{1}{2}\theta_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin^2 n\theta_0\right)$$

или после суммирования бесконечного ряда

$$l=\frac{2Q}{\pi V_2}\left[\pi\sin^2\frac{1}{2}\theta_0+\sin\theta_0\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

Определяя из этого уравнения θ_0 через l, Q и V_2, получаем по формуле (2.14) давление потока на пластинку:

$$R=\frac{2\pi\rho lV_2^2}{\pi+\operatorname{ctg}{}^1/_2\,\theta_0\ln[(1+\sin\theta_0)/(1-\sin\theta_0)]}$$

Это выражение для R совпадает с тем, которое было указано Жуковским [6], п.10°.

11°. Вернемся к общим формулам пп. 8°, 9° и найдем геометрические характеристики и силу R для того случая, когда скорости V_1 и V_2 близки друг к другу.

Для исследования формул (2.6) и (2.9) мы должны рассмотреть в зависимости от n две функции:

$$\frac{1}{z_n(\tau_2)},\qquad\frac{z_n'(\tau_2)}{z_n(\tau_2)}$$

Но эти функции были изучены: это функции $f_1(n)$ и $f_3(n)$ (см. п. 3°) при $\lambda={}^1/_2\pi$. В силу этого мы можем воспользоваться проведенным уже анализом и написать разложения этих функций по главным частям:

$$\frac{1}{z_n(\tau_2)}=\frac{1}{z_0(\tau_2)}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j m_j}{n^2+m_j^2}$$

$$\frac{z_n'(\tau_2)}{z_n(\tau^2)}=\frac{z_0'(\tau^2)}{z_0(\tau^2)}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j}{m_j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j m_j}{n^2+m_j^2}$$

причем

$$i\xi_j=\left[\frac{1}{\partial z_n(\tau_2)/\partial n}\right]_{n=im_j},\qquad i\zeta_j=\left[\frac{z_n'(\tau_2)}{\partial z_n(\tau_2)/\partial n}\right]_{n=im_j}\qquad(2.15)$$

Подставим эти разложения в формулы (2.6) и (2.9); получим

$$OC = \frac{16Q\tau_1}{\sqrt{2\alpha\tau_1}(1-\tau_1)^\beta}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{4z_0(\tau_0)}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}\frac{1}{1+4m_j^2}\right]\sin^2\frac{1}{2}\theta_0+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{1+4m_j^2}\frac{\operatorname{sh}^2 m_j\theta_0}{\operatorname{sh}\pi m_j}\right\} \tag{2.16}$$

$$2l = \frac{32Q}{\sqrt{2\alpha\tau_2}(1-\tau_2)^\beta}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{8}+\frac{\tau_2 z_0'(\tau_2)}{4z_0(\tau_2)}+\frac{\tau_2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{m_j}\frac{\zeta_j}{1+4m_j^2}\right]\sin^2\frac{1}{2}\theta_0+\tau_2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j}{1+4m_j^2}\frac{\operatorname{sh}^2 m_j\theta_0}{\operatorname{sh}\pi m_j}\right\} \tag{2.17}$$

Если скорости V_1 и V_2 близки одна к другой, то эти две последние формулы значительно упрощаются. Эти упрощения возникают в силу того, что при значениях τ_1 и τ_2, мало отличающихся одно от другого, числа m_j будут определяться следующей формулой (см. п. 5°):

$$m_j = \frac{\pi}{\nu'}j \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

которая показывает, что все m_j, начиная с m_1 и m_{-1}, весьма велики при ν' малом. Отсюда следует, что две последние бесконечные суммы правых частей формул (2.16) и (2.17) могут быть отброшены. Суммы же

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{m_j}\frac{1}{1+4m_j^2}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\zeta_j}{m_j}\frac{1}{1+4m_j^2}$$

в силу формул конца п. 5° получают соответственно следующие значения

$$-\frac{1}{48}\left[\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_2}}{\tau_2\sqrt{1-\tau_2}}\right]^2(\tau_2-\tau_1), \qquad \frac{1}{24}\left[\frac{\sqrt{1-(2\beta+1)\tau_2}}{\tau_2\sqrt{1-\tau_2}}\right]^2(\tau_2-\tau_1)$$

если учитывать только первые члены разложений по степеням малой разности $\tau_2-\tau_1$.

Отсюда по формуле (2.17) получаем

$$l = \frac{4Q\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta\sqrt{2\alpha\tau_2}}\frac{\sin^2 {}^1\!/_2\theta_0}{\tau_2-\tau_1} \tag{2.18}$$

Возьмем теперь формулу (2.11) и подставим в нее вместо $\sin^2 {}^1\!/_2\theta_0$ его значение из последней формулы; получим тогда выражение для давления потока на пластинку при малом отличии τ_1 от τ_2:

$$R = \frac{2(\beta+1)}{1-\tau_2}l(\tau_2-\tau_1)p_1$$

Отметим, что, учитывая лишь первые степени разности $\tau_2-\tau_1$, мы не улавливаем отличия длины OC от l.

Формула (2.18) может служить для определения угла θ_0 отклонения струи в бесконечности.

III. Вытекание газа из сосуда

12°. Уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция тока $\psi(\theta, \tau)$ плоско-параллельного потенциального движения газа, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \qquad (3.1)$$

Для построения решения задач о струйном движении газа Чаплыгин нашел ряд частных решений уравнения (3.1); для решения же тех задач, которые мы имеем в виду рассмотреть в этом разделе, необходимо найти другие частные решения того же уравнения (3.1).

Будем искать частные решения уравнения (3.1), выраженные в виде произведения двух функций $\Theta(\theta)$ и $T(\tau)$, зависящих каждая лишь от одного аргумента. Подстановка произведения $\Theta(\theta)\,T(\tau)$ вместо функции ψ в уравнение (3.1) дает следующий результат:

$$\frac{1}{T}\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{dT}{d\tau}\right\}:\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

Приравняем общее значение правой и левой частей этого уравнения некоторому отрицательному числу $-n^2$; тогда для определения неизвестных функций Θ и T будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}-n^2\Theta=0, \qquad \frac{d}{d\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{dT}{d\tau}\right\}+n^2\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}T=0 \qquad (3.2)$$

Первое уравнение интегрируется в гиперболических функциях, и его общий интеграл записывается так:

$$\Theta=A\operatorname{ch}n\theta+B\operatorname{sh}n\theta \qquad (3.3)$$

Интеграция же второго уравнения может быть выполнена в гипергеометрических рядах. Положим

$$T=\tau^{\frac{1}{2}ni}S(\tau)$$

тогда для определения функции $S(\tau)$ будем иметь следующее уравнение Гаусса:

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2S}{d\tau^2}+[(1+ni)+(\beta-1-ni)\tau]\frac{dS}{d\tau}+\frac{1}{2}i\beta n(1+ni)S=0$$

Решением этого уравнения будет гипергеометрический ряд $F(a, b, c; \tau)$ с параметрами a, b, c, определяемыми из формул

$$a+b=ni-\beta, \qquad ab=-\frac{1}{2}i\beta n(1+ni), \qquad c=1+ni \qquad (3.4)$$

Таким образом, второе уравнение (3.3) имеет частное решение

$$T=\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)^{\frac{1}{2}ni}F(a,\ b,\ c;\ \tau)$$

Здесь τ_2 — произвольное постоянное число.

Совершенно таким же путем можно найти, что уравнение (3.4) обладает и частным решением следующего вида:

$$T=\left(\frac{\tau_2}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}ni}F(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c};\ \tau)$$

причем параметры $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ нового гипергеометрического ряда определяются из уравнений

$$\bar{a}+\bar{b}=-ni-\beta, \quad \bar{a}\bar{b}=\tfrac{1}{2}i\beta n(1-ni), \quad \bar{c}=1-ni \tag{3.5}$$

Образуем теперь при помощи частных решений T и $\bar{T}$ новые частные решения T' и T'' уравнения (3.3), полагая

$$T'=\tfrac{1}{2}(T+\bar{T}), \qquad T''=\tfrac{1}{2i}(T-\bar{T})$$

Эти частные решения можно представить в следующем виде:

$$T'=M(\tau,\ n)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\ln\tfrac{\tau_2}{\tau}\right)-N(\tau,\ n)\sin\left(\tfrac{1}{2}n\ln\tfrac{\tau_2}{\tau}\right) \tag{3.6}$$

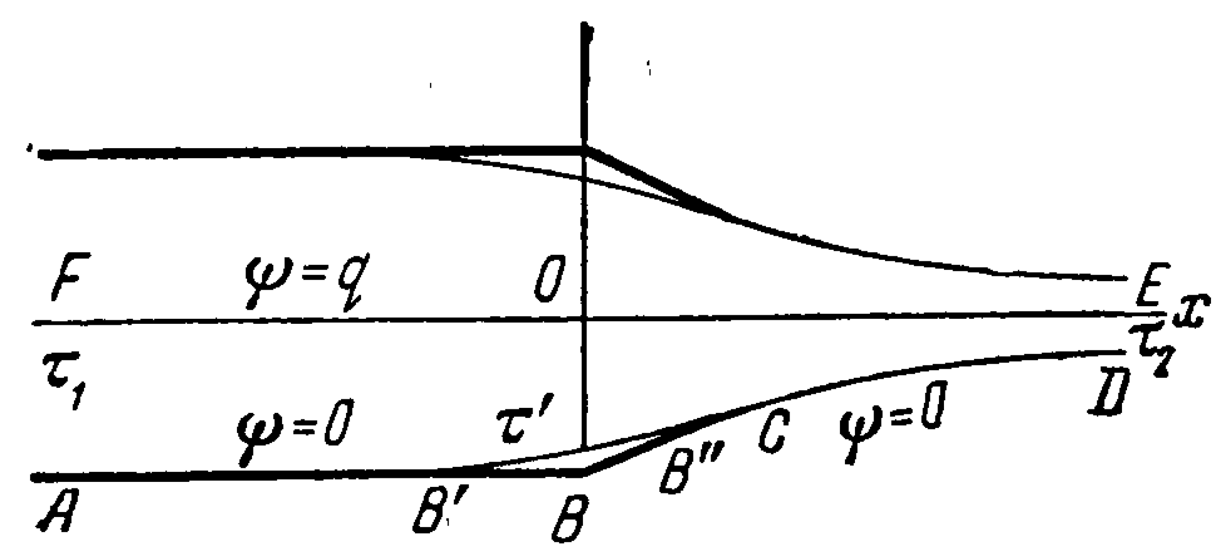
$$T''=M(\tau,\ n)\sin\left(\tfrac{1}{2}n\ln\tfrac{\tau_2}{\tau}\right)+N(\tau,\ n)\cos\left(\tfrac{1}{2}n\ln\tfrac{\tau_2}{\tau}\right)$$

где функции $M(\tau,\ n)$ и $N(\tau,\ n)$ суть две функции переменного τ и параметра n, представимые следующими рядами:

$$M(\tau,\ n)=1+p_1(n)\tau+p_2(n)\tau^2+\ldots \tag{3.7}$$

$$N(\tau,\ n)=[q_1(n)\tau+q_2(n)\tau^2+\ldots]\,n$$

причем $p_1,\ p_2,\ldots,\ q_1,\ q_2,\ldots$ — суть рациональные функции параметра n, содержащие в своих выражениях лишь четные степени это го параметра.



Фиг. 6

Укажем выражения нескольких первых из этих функций. Имеем

$$p_1(n)=0, \qquad q_1(n)=-\tfrac{1}{2}\beta$$

$$p_2(n)=\frac{n^2(1-{}^1\!/_2\beta n^2)}{2(n^2+4)}\beta, \qquad q_2(n)=\frac{2(\beta+1)-n^2(1+{}^1\!/_2\beta)}{2(n^2+4)}\beta$$

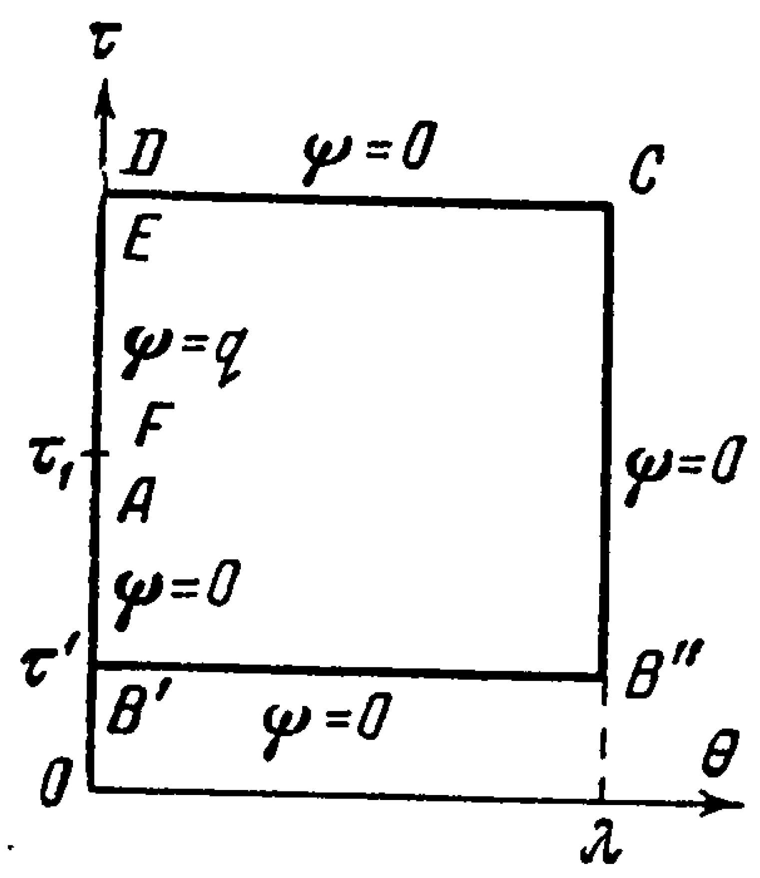
. . . .

13°. Рассмотрим сосуд, ограниченный двумя параллельными стенками, уходящими в одну сторону в бесконечность и снабженный насадком, состоящим из двух небольших и равных между собой прямолинейных отрезков, наклоненных к средней линии сосуда и отходящих от свободных концов указанных параллельных стенок (фиг. 6). Из такого сосуда в свободное пространство выходит под давлением газ в виде струи. Наша задача состоит в построении функции тока этого движения газа*.

Допустим, что значение функции тока ψ вдоль линии симметрии FE потока есть $q>0$, а вдоль сложной границы $ABCD$, включающей свободную границу струи CD, есть нуль. Предположим далее, что в удаленных точках сосуда, откуда выходит газ, значение переменного τ дано и есть τ_1; допустим далее, что в точках свободной границы струи переменное τ имеет значение $\tau_2<\tau_1$.

* С. В. Фалькович решил рассматриваемую здесь задачу путем разбиения области течения на две части: в одной части, содержащей струю и точки нулевой скорости, функция тока дается рядом функций $z_n(\tau)$; в другой части, содержащей удаленные точки трубы, функция тока изображается рядом, общий член которого пишется через вторые решения гипергеометрического уравнения ([5]).

В точке B скорость газа равна нулю, и это обстоятельство сообщает известную сложность данной задаче. Чтобы избежать этой сложности, мы решим предварительно несколько измененную задачу, получающуюся при замене критической точки нулевой скорости областью спокойного газа $B'BB''$, вдоль криволинейной границы которой $B'B''$ переменное τ имеет небольшое значение τ'.



Фиг. 7

Рассмотрим теперь на плоскости переменных θ и τ область изменения этих переменных, отвечающую рассматриваемому течению газа (фиг. 7). Это будет прямоугольник $AB'B''CDEF$, ограниченный прямыми $\tau=\tau'$, $\theta=\lambda$, $\tau=\tau_2$, $\theta=0$; здесь λ — угол наклона отрезка BC к оси OX. Искомая функция $\psi(\theta, \tau)$ должна удовлетворять уравнению (3.1) и следующим граничным условиям на сторонах рассматриваемого прямоугольника:

$\psi=0$ для $\tau=\tau'$, $\qquad \psi=0$ для $\theta=\lambda$, $\psi=0$ для $\tau=\tau_2$

$\psi=0$ для $\theta=0$ при $\tau'<\tau<\tau_1$, $\qquad \psi=q$ для $\theta=0$ при $\tau_1<\tau<\tau_2$

Чтобы найти функцию $\psi(\theta, \tau)$, рассмотрим такое частное решение уравнения (3.1):

$$\psi_n = A_n T_n(\tau)\,\mathrm{sh}\, n(\lambda-\theta)$$

Если подчинить функцию $T_n(\tau)$ условиям

$$T_n(\tau')=0. \qquad T_n(\tau_2)=0 \tag{3.8}$$

то функция ψ_n будет удовлетворять всем граничным условиям, наложенным на функцию $\psi(\theta, \tau)$, кроме условия на стороне $\theta=0$. Чтобы удовлетворить и этому условию, образуем ряд с неопределенными коэффициентами A_n:

$$\psi(\theta, \tau)=\sum_n A_n T_n(\tau)\,\mathrm{sh} n(\lambda-\theta) \tag{3.9}$$

распространяя его на все фундаментальные числа n уравнения (3.2) отвечающие граничным условиям (3.8).

Две фундаментальные функции $T_n(\tau)$ и $T_m(\tau)$ уравнения, соответствующие двум различным фундаментальным числам n и m, удовлетворяют интегральному соотношению

$$\int_{\tau'}^{\tau_2} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\, T_n(\tau)\, T_m(\tau)\, d\tau = 0$$

Примем, кроме того, что

$$\int_{\tau'}^{\tau_2} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\, [T_n(\tau)]^2\, d\tau = 1 \tag{3.10}$$

На основании этих условий ортогональности и обобщенной нормальности функций $T_n(\tau)$ можем определить коэффициенты A_n ряда (3.9). Положим в этом ряду $\theta=0$ и, умножив затем обе его части на

$$\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}$$

проинтегрируем результат по τ от τ' до τ_2. Принимая во внимание граничные условия, накладываемые на функцию $\psi(\theta, \tau)$, находим, что

$$A_n = \frac{q}{\operatorname{sh} n\lambda} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\, T_n(\tau)\, d\tau$$

пользуясь дифференциальным уравнением (3.2), можем выполнить эту квадратуру и, таким образом, получить для A_n следующее выражение:

$$A_n = \frac{q}{n^2 \operatorname{sh} n\lambda} \left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{dT_n}{d\tau}\right]_{\tau_2}^{\tau_1}$$

Таким образом, ряд, решающий поставленную предварительную задачу, запишется так:

$$\psi(\theta, \tau) = q \sum_n \left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{dT_n}{d\tau}\right]_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{\operatorname{sh} n(\lambda-\theta)}{n^2 \operatorname{sh} n\lambda}\, T_n(\tau) \tag{3.11}$$

Пользуясь этим рядом, можно вычислить все элементы, определяющие движение газа.

14°. Для решения первоначально поставленной задачи, когда вместо застойной области $BB'B''$ будет одна точка нулевой скорости B, надо в формуле (3.11) число τ' устремить к нулю. Для выполнения этого предельного перехода следует запастись некоторыми промежуточными положениями.

Возьмем прежде всего уравнение (3.2) и преобразуем его к новому виду; введем вместо независимого переменного τ и функции $T(\tau)$ новое независимое переменное z и новую искомую функцию $u(z)$, полагая

$$u(z) = T(\tau)\sqrt{\mathrm{E}(\tau)}, \quad z = \int_{\tau}^{\tau_2} \frac{d\tau}{2\tau}\sqrt{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{1-\tau}} \qquad \left(\mathrm{E}(\tau) = \sqrt{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}}\right)$$

Получим тогда следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left[n^2 + \frac{\beta(2\beta+1)\tau^2}{1-\tau} \frac{4-2(\beta+2)\tau-\beta(2\beta+1)\tau^2}{[1-(2\beta+1)\tau]^3}\right]u = 0 \tag{3.12}$$

Отметим, что для дозвуковых движений газа числитель второго члена в квадратных скобках положителен.

В согласии с граничными условиями (3.8) мы должны рассматривать те интегралы этого уравнения, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$u_n(0) = 0, \qquad u_n(z') = 0 \tag{3.13}$$

причем нулевое значение переменного z соответствует τ_2, а значение z' отвечает значению τ' переменного τ.

Из формулы, определяющей z через τ, следует, что при стремлении τ' к нулю величина z' будет стремиться к бесконечности и поэтому второе граничное условие (3.13) должно удовлетворяться для очень больших значений независимого переменного z. Пользуясь теорией асимптотического представления интегралов линейных дифференциальных уравнений, возможно дать приближенные значения фундаментальных чисел уравнения (3.12), отвечающих большим значениям величины z'; имеем

$$n_j = \frac{\pi j}{z'} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.14}$$

Отсюда видим, что разность между двумя последовательными фундаментальными числами n, по которым распространяется ряд (3.11), равна π/z' и, следовательно, стремится к нулю при стремлении z' к бесконечности. В силу этого можно предполагать, что при $z' \to \infty$ сумма (3.11) будет обращаться в некоторый определенный интеграл. Чтобы составить этот интеграл, мы должны несколько подробнее рассмотреть общий член ряда (3.11).

Функция $T_n(\tau)$, входящая в общий член этого ряда, может быть представлена через частные решения (3.6) уравнения (3.3) следующим образом:

$$T_n(\tau) = C_n\,[T_n'(\tau_2)\,T_n''(\tau) - T_n''(\tau_2)\,T_n'(\tau)]$$

причем коэффициент C_n должен быть определен из условия (3.10). Придадим этому условию новый вид, вводя вместо переменного интеграции τ новое переменное σ, полагая

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_2}{\tau}, \qquad \sigma' = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_2}{\tau'}$$

Получим

$$\int\limits_0^{\sigma'} \frac{1 - \tau_2(2\beta+1)\,e^{-2\sigma}}{(1-\tau_2 e^{-2\sigma})^{\beta+1}}\,[T_n(\sigma)]^2\,d\sigma = 1 \tag{3.15}$$

Отметим выражения функций $T_n'(\tau)$ и $T_n''(\tau)$ в новом переменном σ; имеем

$$T' = [1 + p_1(n)\,\tau_2 e^{-2\sigma} + \ldots]\cos n\sigma - n\,[q_1(n)\,\tau_2 e^{-2\sigma} + \ldots]\sin n\sigma$$
$$T'' = [1 + p_1(n)\,\tau_2 e^{-2\sigma} + \ldots]\sin n\sigma + n\,[q_1(n)\,\tau_2 e^{-2\sigma} + \ldots]\cos n\sigma$$

Отсюда получаем

$$T_n(\sigma) = C_n\,\{[T_n'(\tau_2) + a_1 e^{-2\sigma} + a_2 e^{-4\sigma} + \ldots]\sin n\sigma - {}$$
$$- [T_n''(\tau_2) + b_1 e^{-2\sigma} + b_2 e^{-4\sigma} + \ldots]\cos n\sigma\}$$

где $a_1,\ a_2, \ldots, b_1,\ b_2, \ \ldots$ — вполне определенные коэффициенты, зависящие от числа n. Можно далее написать

$$[T_n(\sigma)]^2 = C_n^2\Big\{\frac{1}{2}\,[M^2(\tau_2,\ n) + N^2(\tau_2,\ n)] + k_1 e^{-2\sigma} + k_2 e^{-4\sigma} + \ldots +$$
$$+ (l_0 + l_1 e^{-2\sigma} + \ldots)\cos 2n\sigma + (m_0 + m_1 e^{-2\sigma} + \ldots)\sin 2n\sigma\Big\} \tag{3.16}$$

где $k_1,\ k_2, \ldots,\ l_0,\ l_1,\ l_2, \ldots,\ m_0,\ m_1,\ m_2, \ldots$ — некоторые числа, зависящие от параметра n.

Далее мы можем написать следующее разложение:

$$\frac{1 - \tau_2(2\beta+1)e^{-2\sigma}}{1 - \tau_2 e^{-2\sigma})^{\beta+1}} = 1 + A_1 e^{-2\sigma} + A_2 e^{-4\sigma} + \ldots$$

Теперь условие (3.15) может быть записано так:

$$\frac{1}{C_n^2} = \frac{1}{2}\,[M^2(\tau_2,\ n) + N^2(\tau_2,\ n)]\int\limits_0^{\sigma'} d\sigma + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \int\limits_0^{\sigma'} e^{-2j\sigma}\,d\sigma +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} C_j \int\limits_0^{\sigma'} e^{-2j\sigma}\cos 2n\sigma\,d\sigma + \sum_{j=0}^{\infty} D_j \int\limits_0^{\sigma'} e^{-2j\sigma}\sin 2n\sigma\,d\sigma \tag{3.17}$$

причем B_j, C_j, D_j — вполне определенные числа. Имеем

$$\int_0^{\sigma'} d\sigma = \sigma', \qquad \int_0^{\sigma'} e^{-2j\sigma}\, d\sigma = \frac{1}{2j}(1 - e^{-2j\sigma'})$$

$$\int_0^{\sigma'} e^{-2j\sigma} \cos 2n\sigma\, d\sigma = \frac{e^{-2j\sigma'}(n \sin 2n\sigma' - j\cos 2n\sigma') + j}{2(j^2+n^2)}$$

$$\int_0^{\sigma'} e^{-2j\sigma} \sin 2n\sigma\, d\sigma = \frac{n - e^{-2j\sigma'}(j \sin 2n\sigma' + n\cos 2n\sigma')}{2(j^2+n^2)}$$

Из этих формул вытекает, что соотношение (3.17), из которого следует определить C_n, можно переписать так:

$$\frac{1}{C_n{}^2} = \frac{1}{2}[M^2(\tau_2,\ n) + N^2(\tau_2,\ n)]\,\sigma'\,\{1 + L(\sigma')\}$$

где функция $L(\sigma')$ — некоторая функция σ', стремящаяся к нулю при σ' стремящемся к бесконечности.

Таким образом, функция $T_n(\tau)$, входящая в ряд (3.11), может быть записана так:

$$T_n(\tau) = \frac{\vartheta(\tau, n)}{\sqrt{M^2(\tau_2, n) + N^2(\tau_2, n)}}\sqrt{\frac{2}{\sigma'}}\frac{1}{\sqrt{1 + L(\sigma')}}$$

где

$$\vartheta(\tau,\ n) = T_n'(\tau_2)\,T_n''(\tau) - T_n''(\tau_2)\,T_n'(\tau)$$

Теперь ряд (3.11), решающий предварительную задачу, может быть записан так:

$$\begin{gathered}\psi(\theta,\ \tau) = \frac{2q}{\sigma'}\sum_n\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_1,\ n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_2,\ n)}{d\tau_2}\right\}\times \\ \times\frac{\operatorname{sh} n(\lambda-\theta)}{n^2 \operatorname{sh} n\lambda}\,\frac{\vartheta(\tau,\ n)}{M^2(\tau_2, n) + N^2(\tau_2, n)}\,\frac{1}{1 + L(\sigma')}\end{gathered} \tag{3.18}$$

Здесь надо сделать одно важное замечание об обозначениях: функция $\vartheta(\tau,\ n)$ зависит от величин τ_1 и τ_2, но когда мы пишем $d\vartheta(\tau_1,\ n)/d\tau_1$ и $d\vartheta(\tau_2,\ n)/d\tau_2$, то под этими символами понимаем значения производной $d\vartheta(\tau,\ n)/d\tau$, найденные соответственно для τ_1 и τ_2; таким образом, τ_1 и τ_2, которые входят в функцию $\vartheta(\tau,\ n)$ как параметры, не подвергаются дифференцированию.

Между числами τ', z', σ' существуют следующие соотношения:

$$z' = \int_{\tau'}^{\tau_2}\frac{d\tau}{2\tau}\sqrt{\frac{1-(2\beta+1)\tau}{1-\tau}}, \qquad \sigma' = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_2}{\tau'}$$

Из первого соотношения получаем

$$z' = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_2}{\tau'} - \frac{1}{2}(\beta+1)(\tau_2 - \tau') + \ldots$$

Отсюда вытекает, что при малых τ' можно принять $z' = \sigma'$.

В силу этого формула (3.18) для функции тока может быть переписана в новом виде; учитывая связь (3.14) между n_j и z', имеем

$$\Delta n = \frac{\pi}{z'} = \frac{\pi}{\sigma'}$$

Таким образом, получаем

$$\psi(\theta, \tau) = \frac{2q}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_1, n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_2, n)}{d\tau_2}\right\}\frac{\operatorname{sh} n(\lambda-\theta)}{n^2 \operatorname{sh} n\lambda}\times$$
$$\times\frac{\vartheta(\tau, n)}{M^2(\tau_2, n)+N^2(\tau_2, n)}\frac{\Delta n}{1+L(\sigma')}$$

Перейдем теперь к пределу, устремляя число τ' к нулю. В пределе найдем для $\psi(\theta, \tau)$ следующее выражение:

$$\psi(\theta, \tau) = \frac{2q}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_1, n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_2, n)}{d\tau_2}\right\}\times$$
$$\times\frac{\operatorname{sh} n(\lambda-\theta)}{n^2 \operatorname{sh} n\lambda}\frac{\vartheta(\tau, n)\,dn}{M^2(\tau_2, n)+N^2(\tau_2, n)} \tag{3.19}$$

При помощи этой формулы можем найти сжатие струи и давление газового потока на стороны насадка.

Обратимся к фиг. 6 и найдем связь между ординатами точек C и D; назовем эти ординаты соответственно через $-H$ и $-h$.

Имеем следующую общую формулу метода Чаплыгина:

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\alpha\tau}}\left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right)$$

где ρ_0 — плотность в той точке газового потока, в которой скорость газа равна нулю.

Применим эту формулу к дуге CD линии тока $\psi = 0$; получим

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)_{\tau=\tau_2}d\theta$$

Отсюда

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)_{\tau=\tau_2}\sin\theta\,d\theta$$

Следовательно,

$$H - h = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\int_0^{\lambda}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)_{\tau=\tau_2}\sin\theta\,d\theta$$

Подставляя в правую часть этой формулы вместо функции $\psi(\theta, \tau)$ ее выражение в виде интеграла (3.19) и производя вычисления, приходим к следующему результату:

$$H - h = -\frac{2q}{\pi\alpha}\frac{\sqrt{2\alpha\tau_2}}{(1-\tau_2)^{\beta}}\int_0^{\infty}\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_1, n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_2, n)}{d\tau_2}\right\}\times$$
$$\times\frac{\operatorname{sh} n\lambda - n\sin n\lambda}{n^2(1+n^2)\operatorname{sh} n\lambda}\frac{1}{M^2(\tau_2, n)+N^2(\tau_2, n)}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)_{\tau_2}dn \tag{3.20}$$

15°. Применим эти формулы к случаю вытекания несжимаемой жидкости. В этом частном случае $\beta = 0$ и уравнение (3.2) имеет следующие интегралы:

$$T' = \cos\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau}\right), \qquad T'' = \sin\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau}\right)$$

и поэтому

$$\vartheta(\tau, n) = \sin\left(\frac{1}{2} n \ln\frac{\tau_2}{\tau}\right)$$

$$\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_1, n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_2, n)}{d\tau_2} = n\left[1-\cos\left(\frac{1}{2} n \ln\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right]$$

Составим теперь формулу (3.19); получим

$$\psi(\theta, \tau) = \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\mu n}{n}\frac{\operatorname{sh} n(\lambda-\theta)}{\operatorname{sh} n\lambda}\sin\left(\frac{1}{2} n \ln\frac{\tau_2}{\tau}\right)dn \tag{3.21}$$

где

$$\mu = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau_2}{\tau_1} = \ln\frac{V_2}{V_1}$$

причем V_1 — скорость жидкости в удаленных частях сосуда, а V_2 — скорость жидкости на струе.

Из формулы (3.21) легко находим выражение комплексной функции течения $w(\sigma)$ в зависимости от комплексного переменного σ, вводимого формулой

$$\sigma = \ln\frac{V_2}{V} + i(\theta-\lambda)$$

Получаем

$$w(\sigma) = \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\mu n}{n}\frac{\cos\sigma n}{\operatorname{sh}\lambda n}dn$$

Отсюда имеем, выполняя квадратуры, следующее выражение

$$\frac{dw}{d\sigma} = -\frac{q}{\lambda}\left\{\operatorname{th}\frac{\pi\sigma}{2\lambda} - \frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi\sigma}{\lambda}\operatorname{sch}\frac{\pi(\mu+\sigma)}{2\lambda}\operatorname{sch}\frac{\pi(\mu-\sigma)}{2\lambda}\right\} \tag{3.22}$$

Найдем по этим формулам отношение H к h; имеем

$$H - h = -\frac{i}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\int_0^\lambda \left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_{\sigma=i(\theta-\lambda)}\sin\theta\, d\theta$$

Подставляя сюда выражение (3.22) для $dw/d\sigma$, взятое при $\sigma = i(\theta-\lambda)$, получим

$$\frac{H-h}{h} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \sin\theta \operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2\lambda}\left(1+\frac{\sin^2(\pi\theta/2\lambda)}{\operatorname{sh}^2(\pi\mu/2\lambda)}\right)^{-1}d\theta$$

Этот интеграл можно вычислить при $\lambda = {}^1/_2\pi$, и мы получаем

$$\frac{H-h}{h} = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\mu \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\mu}\right)$$

Если вместо μ мы введем новый параметр γ, полагая

$$\operatorname{tg}\gamma = e^{-\mu} = \frac{V_1}{V_2}$$

то придадим предыдущей формуле следующий вид:

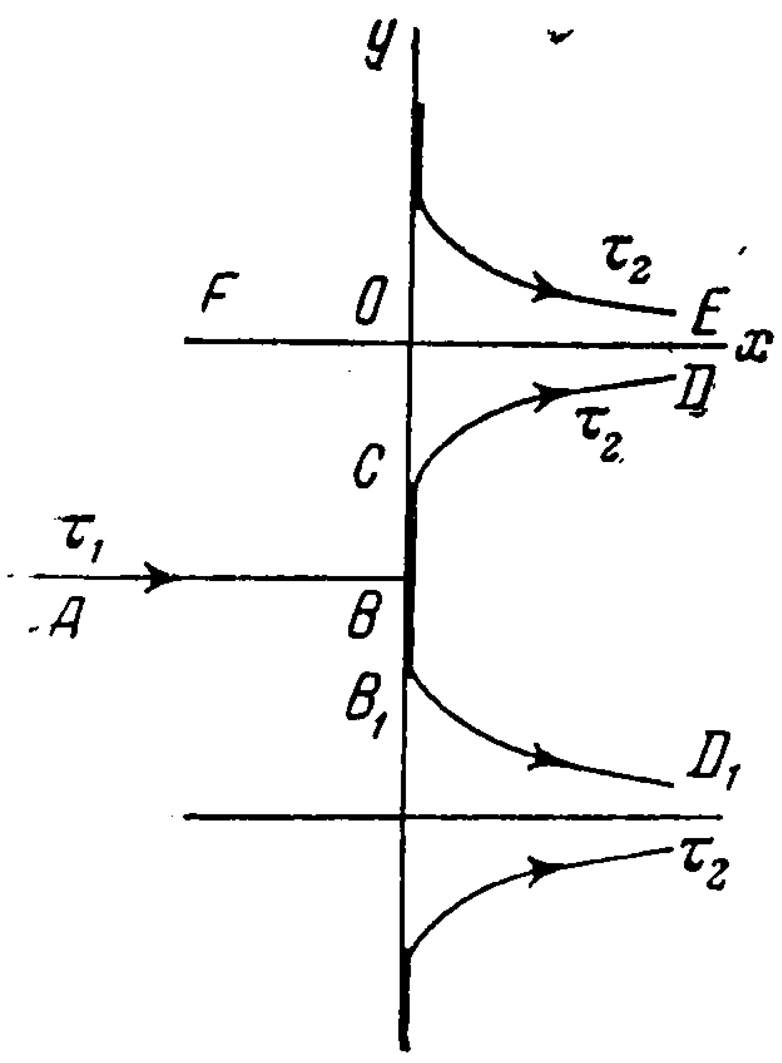
$$\frac{H}{h} = 1 + \frac{4}{\pi}\frac{\gamma}{\operatorname{th} 2\gamma}$$

Внесем сюда вместо h величину $2L$, равную ширине сосуда; получим тогда формулу, указанную Жуковским:

$$\frac{H}{L} = \operatorname{th}\gamma\left(1+\frac{4}{\pi}\frac{\gamma}{\operatorname{tg} 2\gamma}\right)$$

По этой формуле мы сможем определить, задавая H и L, число γ и, следовательно, скорость потока вдоль струи, если скорость жидкости в удаленных частях сосуда известна.

16°. Задача о вытекании газа из сосуда, решенная в предыдущем пункте, равноценна задаче о движении газа в решетке, составленной из клиньев равного размера. Предположим, что $\lambda = {}^1/_2\pi$, тогда будем иметь лобовое обтекание прямолинейной решетки с образованием струй (фиг. 8).



Фиг. 8

Вдоль пера решетки имеем:

$$dy = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d\tau}{\sqrt{2\alpha\tau}}$$

Для определения силы давления P, действующей на все перо решетки, примем в расчет формулу

$$p = p_0(1-\tau)^{\beta+1}$$

Отсюда получаем для P следующую формулу:

$$P = -2p_0\int_0^{\tau_2}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau\sqrt{2\alpha\tau}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\theta={}^1/_2\pi}d\tau$$

Подставив сюда вместо $\psi(\theta,\tau)$ выражение (3.19), получим

$$P = \frac{4p_0q}{\pi}\lim_{\tau'=0}\int_0^\infty\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_1,n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_2,n)}{d\tau_2}\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{n\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2\pi n}\frac{dn}{M^2(\tau_2,n)+N^2(\tau_2,n)}\int_{\tau'}^{\tau_2}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau\sqrt{2\alpha\tau}}\vartheta(\tau,n)\,d\tau$$

Но

$$\int_{\tau'}^{\tau_2}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau\sqrt{2\alpha\tau}}\vartheta(\tau,n)\,d\tau = -\frac{1}{(n^2+1)\sqrt{2\alpha}}\left\{2\sqrt{\tau_2}(1-\tau_2)\frac{d\vartheta(\tau_2,n)}{d\tau_2} - \right.$$
$$\left. -2\sqrt{\tau'}(1-\tau')\frac{d\vartheta(\tau',n)}{d\tau'} - \frac{1+(2\beta+1)\tau'}{\sqrt{\tau'}}\vartheta(\tau',n)\right\}$$

Следовательно,

$$P = -\frac{8p_0q}{\pi}\frac{\tau_2(1-\tau_2)}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\int_0^\infty\{\Gamma(\tau_1,\tau_2;n)\}\frac{d\vartheta(\tau_2,n)}{d\tau_2}\times$$
$$\times\frac{1}{n(n^2+1)\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2\pi n}\frac{dn}{M^2(\tau_2,n)+N^2(\tau_2,n)} +$$
$$+\frac{4p_0q}{\pi\sqrt{2\alpha}}\lim_{\tau'=0}\int_0^\infty\left\{2\sqrt{\tau'}(1-\tau')\frac{d\vartheta(\tau',n)}{d\tau'} + \frac{1+(2\beta+1)\tau'}{\sqrt{\tau'}}\vartheta(\tau',n)\right\}\times$$
$$\times\Gamma(\tau_1,\tau_2,n)\frac{1}{n(n^2+1)\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2\pi n}\frac{dn}{M^2(\tau_2,n)+N^2(\tau_2,n)} \tag{3.23}$$

где

$$\Gamma(\tau_1,\tau_2,n) = \frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_1,n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta}\frac{d\vartheta(\tau_2,n)}{d\tau_2}$$

Выполним в (3.23) предельный переход; для малых τ' имеем

$$T' = \cos\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau}\right), \qquad T'' = \sin\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau}\right)$$
$$\vartheta(\tau',n) = \sin\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau'}\right), \qquad \frac{d\vartheta(\tau',n)}{d\tau'} = -\frac{n}{2\tau'}\cos\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau'}\right)$$

Отсюда второе слагаемое формулы (3.23) может быть переписано так:

$$\frac{4p_0 q}{\pi\sqrt{2\alpha}}\lim_{\tau'=0}\int_0^\infty \frac{1-\cos\left({}^1/{}_2 n\ln\tau_2/\tau_1\right)}{(n^2+1)\operatorname{sh}{}^1/{}_2\pi n}\times$$

$$\times\left\{\frac{1+(2\beta+1)\tau'}{\sqrt{\tau'}}\sin\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau'}\right)-n\frac{1-\tau'}{\sqrt{\tau'}}\cos\left(\frac{1}{2}n\ln\frac{\tau_2}{\tau'}\right)\right\}dn \tag{3.24}$$

Вычислим определенный интеграл

$$\frac{1+(2\beta+1)\tau'}{2\sqrt{\tau'}}\left[\pi(\operatorname{ch}\alpha-1)\sqrt{\frac{\tau'}{\tau_2}}+\sum_{m=1}^{\infty}(-)^m\frac{\operatorname{ch}2m\alpha-1}{m^2-{}^1/{}_4}\left(\frac{\tau'}{\tau_2}\right)^m\right]+\frac{1-\tau'}{2\sqrt{\tau'}}\times$$

$$\times\left[\pi(\operatorname{ch}\alpha-1)\sqrt{\frac{\tau'}{\tau_2}}+2\sum_{m=1}^{\infty}(-)^m m\frac{\operatorname{ch}2m\alpha-1}{m^2-{}^1/{}_4}\left(\frac{\tau'}{\tau_2}\right)^m\right]\qquad\left(e^\alpha=\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)$$

Отсюда видно, что величина (3.24) имеет следующее простое значение:

$$\frac{4p_0 q}{\pi\sqrt{2\alpha}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{\tau_2}}\left(\sqrt[4]{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-\sqrt[4]{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)^2$$

Вернемся к формуле (3.23); мы сможем теперь придать этой формуле такой окончательный вид:

$$P=\frac{2p_0 q}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\left(\sqrt[4]{\frac{\tau_2}{\tau_1}}-\sqrt[4]{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)^2- \tag{3.25}$$

$$-\frac{8p_0 q}{\pi}\frac{\tau_2(1-\tau_2)}{\sqrt{2\alpha\tau_2}}\int_0^\infty\Gamma(\tau_1,\tau_2,n)\frac{d\vartheta(\tau_2,n)}{d\tau_2}\,\frac{1}{n(n^2+1)\operatorname{sh}{}^1/{}_2\pi n}\,\frac{dn}{M^2(\tau_2,n)+N^2(\tau_2,n)}$$

Для несжимаемой жидкости этот интеграл вычисляется, и мы получаем тогда следующую формулу для давления потока на перо решетки:

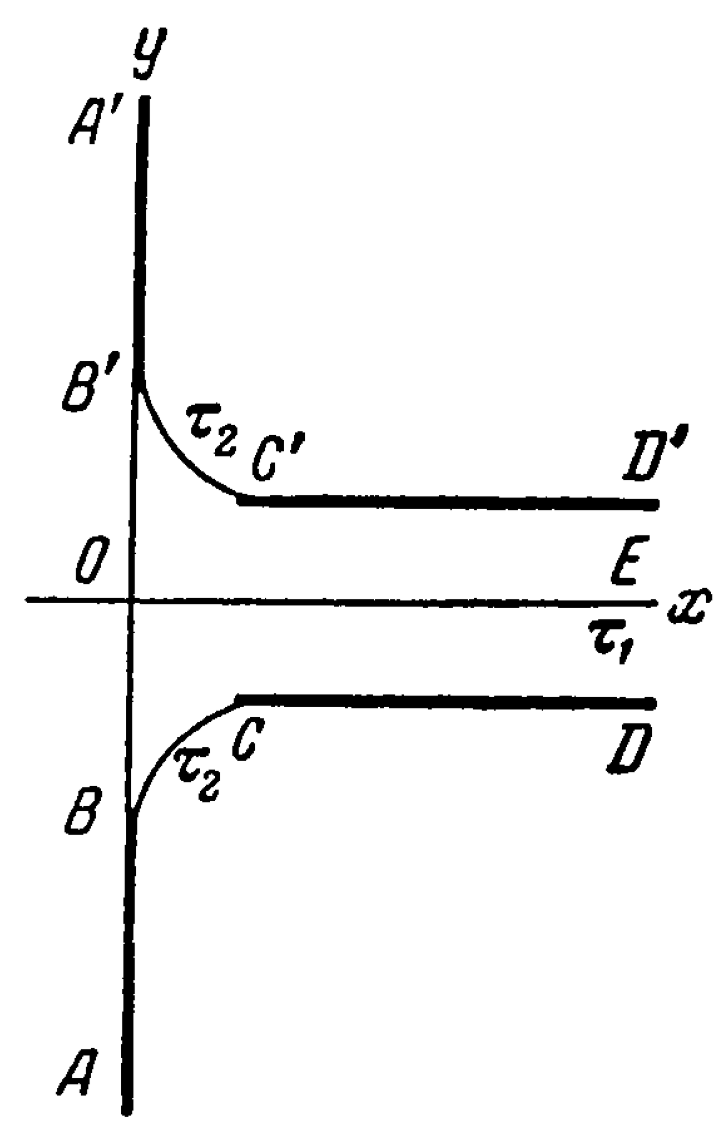
$$P=\frac{2q}{V_1V_2}(V_1-V_2)\left\{\frac{2p_2}{\pi V_2}(V_1+V_2)\operatorname{arc\,tg}\frac{V_1}{V_2}+\frac{1}{2}\rho V_1(V_2-V_1)-p_1\right\}$$

где p_1 и p_2 — давления в потоке соответственно перед решеткой и на струе. Если от этой величины давления мы отнимем противодавление, действующее на перо со стороны покоящейся жидкости и равное $2(L-H)p_2$, то придем к формуле Жуковского

$$P-2(L-H)p_2=2\rho LV_1V_2\left(\frac{1}{\sin 2\gamma}-1\right)$$

17°. Задача о вытекании несжимаемой жидкости из сосуда в наставку была решена Жуковским; мы имеем в виду решить эту же задачу для газа. Содержание задачи иллюстрируется фиг. 9.

Газ из бесконечного сосуда, в удаленных частях которого он имеет скорость, равную нулю, выходит под давлением в отверстие BB', образует маленькие участки свободных струй BC и $B'C'$ и входит затем в бесконечную трубу $CC'DD'$.



Фиг. 9

Предположим, что вдоль свободных струй переменное Чаплыгина τ имеет значение τ_2, а в удаленных частях трубы переменное τ равно $\tau_1<\tau_2$. Допустим, что значение функции тока $\psi(\theta,\tau)$ вдоль линии $ABCD$ есть нуль, а вдоль линии OE равно $q>0$.

Рассмотрим вместо функции $\psi(\theta,\tau)$ новое решение уравнения (3.1) — функцию $\Psi(\theta,\tau)$, связанную с $\psi(\theta, r)$ формулой

$$\Psi(\theta,\tau)=\psi(\theta,\tau)+\frac{2q}{\pi}\left(\theta-\frac{1}{2}\pi\right)$$

Новая функция $\Psi(\theta, \tau)$ будет удовлетворять пограничным условиям:

$$\Psi = 0 \qquad \text{для } \theta = \frac{1}{2}\pi \text{ и } 0 < \tau < \tau_2$$

$$\Psi = \frac{2q}{\pi}\left(\theta - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ для } \tau = \tau_2 \text{ и } 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$$

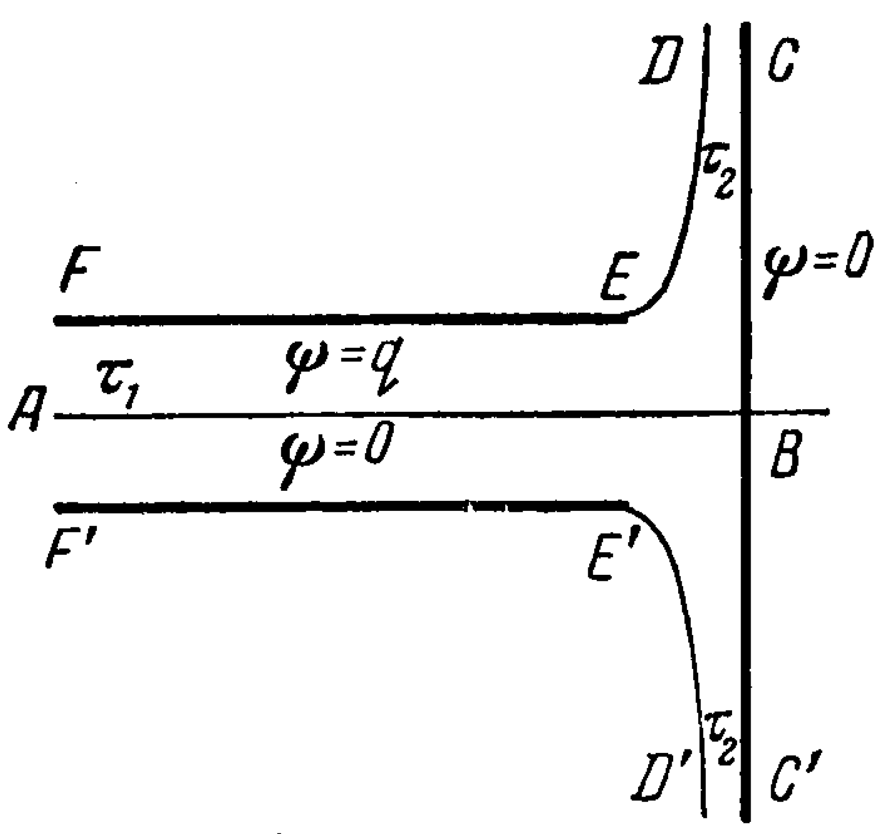
$$\Psi(\theta, \tau) = \begin{cases} -q & \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_2 \quad \text{для } \theta = 0 \\ 0 & \text{при } 0 < \tau < \tau_1 \quad \text{для } \theta = 0 \end{cases}$$

Искомая функция $\Psi(\theta, \tau)$ может быть представлена в виде суммы двух функций $\Psi_1(\theta, \tau)$ и $\Psi_2(\theta, \tau)$, определяемых формулами

$$\Psi_1(\theta, \tau) = -\frac{2q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_2)}\frac{\sin 2n\theta}{n}$$

$$\Psi_2(\theta, \tau) = -\frac{2q}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_1, n)}{d\tau_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_2, n)}{d\tau_2}\right\}\frac{\operatorname{sh} n\,({}^1/{}_2\pi - \theta)}{n^2 \operatorname{sh} {}^1/{}_2\pi n}\,\frac{\vartheta(\tau, n)\,dn}{M^2(\tau_2, n) + N^2(\tau_2, n)}$$


Фиг. 10

Эта последняя функция может быть получена из формулы (3.19) заменой в ней q на $-q$ и полагая λ равным ${}^1/{}_2\pi$.

18°. Допустим, что из открытой трубы выходит газ, имея в местах, удаленных от отверстия трубы, скорость V_1; при выходе из трубы газ встречает плоскость $C'BC$ и растекается вдоль нее, образуя свободные линии тока ED и $E'D'$ (фиг. 10). Скорость течения вдоль этих линий постоянна и равна $V_2 > V_1$. Построение функции тока этого течения газа может быть получено и здесь также использованием формулы (3.19).

Применяя, как и в предыдущей задаче, функции $z_m(\tau)$ Чаплыгина, можем записать выражение функции тока в следующем виде:

$$\psi(\theta, \tau) = \frac{4q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{z_{2n}(\tau)}{z_{2n}(\tau_2)}\frac{\sin 2n\theta}{n} +$$

$$+ \frac{2q}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_1, n)}{d\tau_1} - \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d\vartheta(\tau_2, n)}{d\tau_2}\right\}\frac{\operatorname{sh} n\,({}^1/{}_2\pi - \theta)}{n^2 \operatorname{sh} {}^1/{}_2\pi n}\,\frac{\vartheta(\tau, n)\,dn}{M^2(\tau_2, n) + N^2(\tau_2, n)}$$

Знак $'$ у суммы показывает, что индекс суммирования n может принимать лишь нечетные значения.

Поступила 16 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., том. II, стр. 19—137, ОГИЗ, М., 1948.
2. Poincaré H. Sur la diffraction des ondes hertziennes. Oeuvres; t. X, p. 94—203. Gauthier — Villars, Paris, 1954
3. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. t. II, §178; Gauthier — Villars, Paris, 1893.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Гл. I и II., ГТТИ, М., 1954.
5. Фалькович С. В. К теории газовых струй, ПММ, т. XXI, вып. 4, 1957, стр. 459—464.
6. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа, Собрание сочинений, т. II, ГТТИ, М. 1949.
7. Чаплыгин С. А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости, Собр. соч., т. II, стр. 5—18, ОГИЗ, М.—Л. 1948.