

О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Д. Д. Ивлев

(Москва)

В работе исследуется вдавливание штампов клинообразной и прямоугольной формы в плане в пластическое полупространство.

Эти задачи являются дальнейшим развитием известных результатов Л. Прандтля [1]. Отметим, что решение осесимметричной задачи о вдавливании штампа дано А. Ю. Ишлинским [13] и Р. Шилдом [9].

Первоначально рассматривается теория сферического деформированного состояния, частным случаем которой является теория плоского деформированного состояния. Обобщение основано на свойствах различных систем координат включать в себя, как частные случаи, другие системы: так прямоугольная декартова система координат может рассматриваться как вырожденный случай цилиндрической и сферической систем и т. д.

В данном случае исходной явилась сферическая система координат.

1. Уравнение равновесия в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{\rho\theta}] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Угол θ — измеряется между радиусами и положительной осью z , φ — угол, измеряемый вокруг оси z вправо.

Обозначая через u , v , w скорости перемещения вдоль осей ρ , θ , φ , будем иметь выражения компонент тензора скорости деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho}, & \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2\rho \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - w \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{dv}{d\theta} + u \right), & \varepsilon_{\theta\rho} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{w}{\rho} \right) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \sin \theta + v \cos \theta \right), & \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Предположим, что

$$u = \rho u^*(\theta, \varphi), \quad v = \rho v^*(\theta, \varphi), \quad w = \rho w^*(\theta, \varphi) \quad (1.3)$$

Очевидно, что в этом случае компоненты ε_{ij} не будут зависеть от величины ρ ; следовательно, решение можно искать в виде $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\theta, \varphi)$.

Предположим далее, что

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\varphi} = 0 \quad (1.4)$$

Тогда из первого уравнения равновесия получим, что

$$\sigma_{\rho} = \frac{1}{2}(\sigma_{\theta} + \sigma_{\varphi}) \quad (1.5)$$

Следует отметить, что равенство (1.5) следует при предположениях (1.4) из уравнений равновесия.

Предположим, что имеет место условие пластичности Треска.

Из условий (1.4) и (1.5) следует, что напряженное состояние не может соответствовать ребру призмы Треска (условию полной пластичности) и соответствует грани этой призмы.

Так как при условиях (1.4), (1.5) третий инвариант тензора девиатора напряжений равен нулю, то следуя [8], получим

$$(\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi})^2 + 4\tau_{\theta\varphi}^2 = 4k^2 \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{\rho} = u^* = 0, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{\partial v^*}{\partial \theta} = \lambda(\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi})$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \varphi} + v^* \cos \theta \right) = \lambda(\sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta}) \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w^*}{\partial \theta} - w^* \cos \theta + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right) = 2\lambda\tau_{\theta\varphi}, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \varepsilon_{\rho\varphi} = 0$$

Легко видеть, что при предположениях (1.3), (1.4) соотношения (1.6), (1.7) будут иметь место и при условии пластичности Мизеса (с точностью до постоянной в правой части (1.6)). Уравнения (1.1) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + (\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi}) \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta = 0$$

Полученное состояние названо сферическим деформированным состоянием по аналогии с плоским деформированным состоянием. В самом деле, если в последнем случае рассматривается деформирование в некоторой плоскости, то в данном — на некоторой сфере. Очевидно, что сферическое деформированное состояние включает в себя плоское деформированное состояние как частный случай, чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену переменных

$$x = R\varphi, \quad y = R(\theta - 1/2\pi) \quad (\varphi \rightarrow 0, \theta \rightarrow 1/2\pi, R \rightarrow \infty)$$

$$u_x = Rw^*, \quad u_y = Rv^* \quad (v^* \rightarrow 0, w^* \rightarrow 0)$$

где u_x, u_y — перемещения вдоль осей x, y .

Соотношению (1.6) удовлетворим, полагая

$$\sigma_{\theta} = 2kp + k \cos 2\psi, \quad \sigma_{\varphi} = 2kp - k \cos 2\psi, \quad \tau_{\theta\varphi} = k \sin 2\psi \quad (1.9)$$

Подставляя выражения (1.9) в уравнение равновесия (1.8), получим

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} - \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\cos 2\psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \cos 2\psi \operatorname{ctg} \theta = 0$$

$$\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\sin 2\psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \sin 2\psi \operatorname{ctg} \theta = 0 \quad (1.10)$$

Определяя характеристики уравнения (1.10), получим

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}(\psi \pm 1/4\pi)}{\sin \theta} \quad (1.11)$$

Легко найти, что вдоль линий (1.11) имеют место соотношения, обобщающие известные интегралы Г. Генки [3]

$$dp \pm d\psi \pm \cos \theta d\varphi = 0 \quad (1.12)$$

Рассмотрим уравнение для скоростей перемещений. Соотношения (1.7) дадут для определения двух компонент v^* и w^* два уравнения, одно из которых уравнение несжимаемости

$$\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0$$

а второе может быть записано в виде

$$\frac{\varepsilon_{\theta\varphi}}{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi} = \frac{\tau_{\theta\varphi}}{\sigma_\theta - \sigma_\varphi} \quad (1.13)$$

Переписывая эти уравнения в компонентах скорости перемещения, учитывая (1.9) и, опуская индекс звездочка наверху, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \operatorname{ctg} \theta &= 0 \\ 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin 2\psi - \cos 2\psi \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \operatorname{ctg} \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Легко найти, что характеристики уравнений (1.14) запишутся в виде (1.11). Вдоль характеристик будут иметь место соотношения, обобщающие известные соотношения Г. Гейрингер [4] (если в (1.15) перейти к компонентам скорости вдоль характеристик)

$$\cos \theta d\varphi [v \operatorname{tg}(\psi \pm 1/2\pi) - w] + dv + dw \operatorname{tg}(\psi \pm 1/4\pi) = 0 \quad (1.15)$$

Для исследования свойств характеристик воспользуемся способом исследования, развитым С. А. Христиановичем [5,6].

Предположим, что $\alpha(\theta, \varphi) = \operatorname{const}$ и $\beta(\theta, \varphi) = \operatorname{const}$ уравнения первого и второго семейства характеристик.

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{tg}(\psi + 1/4\pi)}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \operatorname{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \cos \theta \left[v \operatorname{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) - w \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$$

а также

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\operatorname{tg}(\psi - 1/4\pi)}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} - \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial w}{\partial \beta} + \cos \theta \left[v \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) - w \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0 \quad (1.17)$$

Предполагая, что $\psi = \psi(\alpha)$, $v = v(\alpha)$, $w = w(\alpha)$, можно взять в качестве параметра α величину ψ .

Тогда уравнения (1.17) примут вид

$$\varphi - \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \Phi_1(\psi), \quad p - \psi + \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \ln \sin \theta = \Phi_2(\psi) \quad (1.18)$$

$$v - \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) w + \left[v \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) - w \right] \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \ln \sin \theta = \Phi_3(\psi)$$

Первое семейство характеристик состоит из линий (1.18) при $\psi = \text{const}$, второе семейство найдется из интегрирования систем (1.16)

$$\begin{aligned} \varphi - \int \frac{\text{tg}(\psi + 1/4\pi)}{\sin \theta} d\theta &= \Phi_4(\beta) \\ p + \psi + \int \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ctg} \theta d\theta &= \Phi_5(\beta) \\ v + \int \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) dw + \int \left[v \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) - w \right] \cos \theta d\varphi &= \Phi_6(\beta) \end{aligned} \quad (1.19)$$

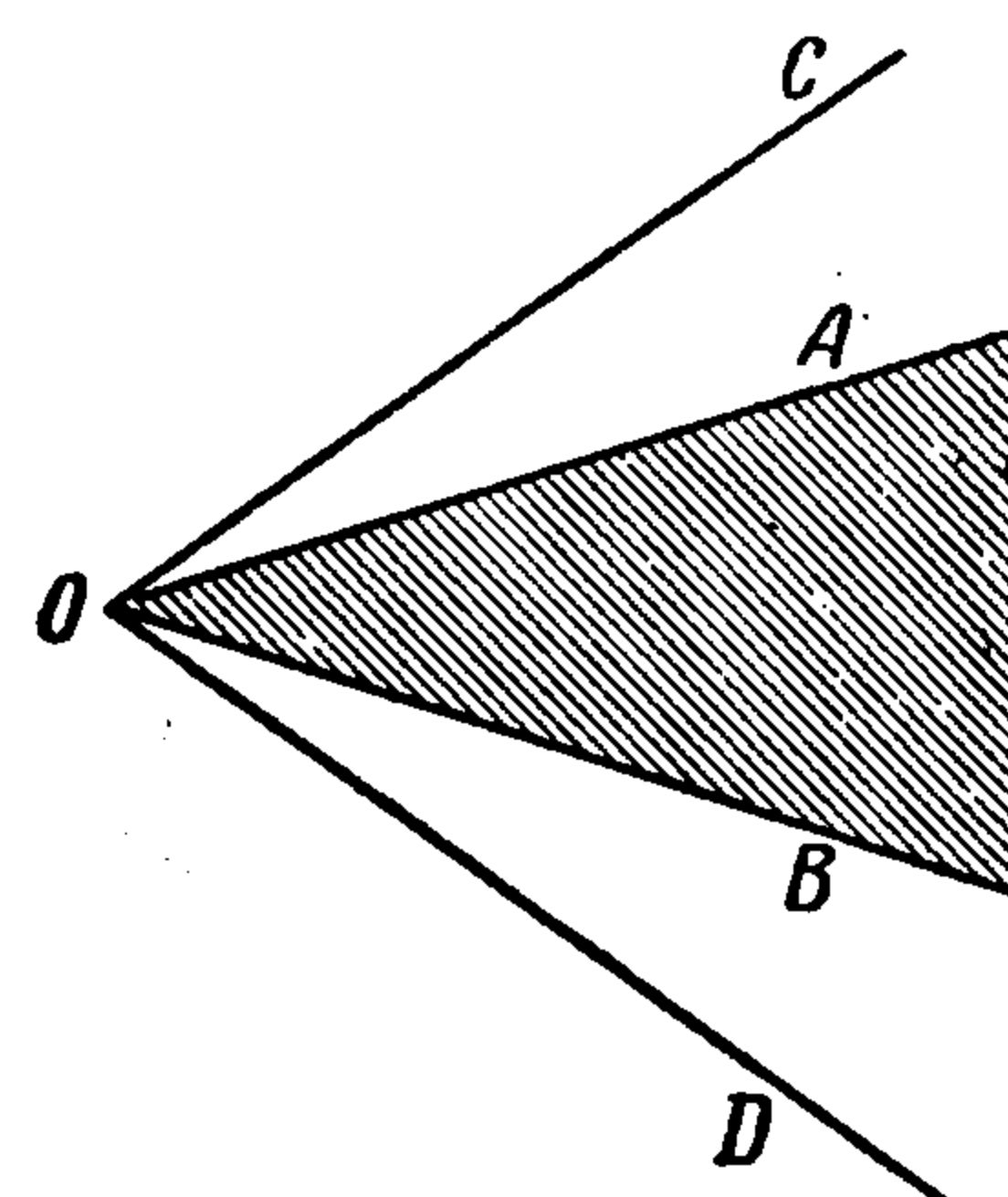
Совершенно аналогично рассматривается случай $\psi = \psi(\beta)$. Предположим, что $\psi \equiv \text{const}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi - \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \ln \text{tg} \frac{\theta}{2} &= \Theta_1(\beta) \\ p + \psi + \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \ln \sin \theta &= \Theta_2(\beta) \\ v + \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) w + \int \left[v \text{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) - w \right] \cos \theta d\varphi &= \Theta_3(\beta) \\ \varphi + \text{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \ln \text{tg} \frac{\theta}{2} &= \Theta_4(\alpha) \\ p - \psi - \text{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \ln \sin \theta &= \Theta_5(\alpha) \\ v - \text{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) w + \int \left[v \text{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) - w \right] \cos \theta d\varphi &= \Theta_6(\alpha) \end{aligned} \quad (1.20)$$

2. Результаты теории плоского деформированного состояния могут быть обобщены на случай сферического деформированного состояния.

Рассмотрим обобщение решения Л. Прандтля [1] задачи о вдавливании жесткого штампа в пластическое полупространство.

Представим себе, что угол $\theta = \text{const}$. В этом случае будем иметь часть пространства, ограниченную круговой конусообразной поверхностью. Обобщенный штамп Л. Прандтля в этом случае будет контактировать на части поверхности, ограниченной двумя радиусами.



Фиг. 1

Наибольший интерес представит простейший случай, когда $\theta = 1/2\pi$, при этом будет иметь место вдавливание в пластическое полупространство штампа клинообразной формы в плане с плоским основанием (фиг.1). Отметим, что аналогичная упругая задача рассматривалась Л. А. Галиным [7].

Рассмотрим вспомогательную плоскость $\theta\varphi$ (фиг. 2), причем $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $\theta \geq 1/2\pi$. Предположим, что на линии AB действует некоторое нормальное давление, вызывающее пластическое состояние в области $CAOFE$ и ей симметричной.

Напряженное состояние в областях CAE и AOE естественно искать не зависящим от угла φ , в этом случае из (1.10) получим

$$\sin 2\psi = \frac{c_1}{\sin^2 \theta}, \quad c_1 = \text{const} \quad (2.1)$$

Но так как $\tau_{\theta\varphi} = 0$ при $\theta = 1/2\pi$, то $c_1 = 0$ в (2.1) и, следовательно, $\tau_{\theta\varphi} = 0$ всюду в областях CAE и AOF .

Далее найдем, что в этих областях

$$p = \kappa \ln \sin \theta + c_2, \quad c_2 = \text{const} \quad (2.2)$$

где $\kappa = -1$ при $\psi = 0, \pm\pi, \dots$; $\kappa = 1$ при $\psi = \pm 1/2\pi, \pm 3/2\pi$. Предполагая, что в областях CAE компонента σ_φ сжимающая, положим $\psi = 0$.

Тогда из условия $\sigma_\theta = 0$ при $\theta = 1/2\pi$ получим, что в этой области

$$c_2 = -1/2$$

Предполагая, что в области AOF компонента σ_φ растягивающая и что давление на AO равно q , положим $\psi = 1/2\pi$, и получим, что в этой области

$$c_2 = \frac{1}{2} (q + 2k) / k$$

Искомую величину давления q получим из сопряжения областей CAE и AOF путем построения области пластического состояния EAF , являющейся обобщением области централизованного веера характеристик, использованной Л. Прандтлем.

Следует взять интеграл

$$p - \psi = \text{tg}(\psi - 1/2\pi) \ln \sin \theta + c_3, \quad c_3 = \text{const}$$

Из условий сопряжения получим

$$q = -k(2 + \pi)$$

Таким образом, давление, необходимое для вдавливания в пластическое полупространство штампа клинообразной формы, в плане оказалось совпадающим с давлением, необходимым для вдавливания штампа в форме полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми в плане (решение Л. Прандтля).

Поле скоростей перемещений определяется из уравнений (1.14). Рассмотрим обтекание пластической массой жесткой границы $OFEC$ (фиг. 2).

На границе AO задана нормальная скорость $v = 1$. Так как в областях CAE и AOF известно, что $\sin 2\psi = 0$, то течение в них бессдвиговое. На границах AF и AE возможны разрывы скоростей по касательным к этим линиям.

Задача определения поля скоростей перемещений может быть решена численно, она же даст изменение координатной сетки в некоторый близкий момент после начала вдавливания. Очевидно, что максимальный угол раствора AOB (фиг. 1) основания штампа в рассматриваемом случае равен $2/3\pi$.

3. Применяя прием Л. Прандтля [2], пополним число точных решений теории идеальной пластичности.

Предположим, что $\tau_{\theta\varphi} = f(\theta)$. Из уравнений (1.6), (1.8) получим

$$\sigma_\theta - \sigma_\varphi = 2\mu \sqrt{k^2 - f^2(\theta)}, \quad \mu = \text{sign}(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \text{ctg} \theta = 0, \quad \sin \theta \frac{df}{d\theta} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2f \text{ctg} \theta = 0 \quad (3.2)$$

Полагая

$$\sin \theta \frac{df}{d\theta} + 2f \operatorname{ctg} \theta = B_1 \quad (B_1 = \text{const})$$

найдем, что

$$f(\theta) = \frac{B_2 - B_1 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (B_2 = \text{const}) \quad (3.3)$$

Из (3.1), (3.2), (3.3) найдем, что

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= -2\mu \int \sqrt{k^2 - f^2(\theta)} \operatorname{ctg} \theta d\theta + \chi(\varphi) \\ \sigma_\varphi &= -2\mu \int \sqrt{k^2 - f^2(\theta)} \operatorname{ctg} \theta d\theta - 2\mu \sqrt{k^2 - f^2(\theta)} \operatorname{ctg} \theta + \chi(\varphi) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\chi(\varphi) = B_1 \varphi$$

Полагая $v = v(\theta)$, $w = w(\theta)$, определим поле скоростей перемещений

$$v = \frac{B_3}{\sin \theta}$$

$$w = \left[2\mu \int \frac{f(\theta) \cos \theta}{\sqrt{k^2 - f^2(\theta)} \sin^3 \theta} d\theta + B_4 \right] \sin \theta$$

где B_3, B_4 — постоянные.

4. Предположим, что вдавливаемый в полупространство штамп имеет в плане прямоугольную форму (на фиг. 3 показана часть штампа в плане $ABCO$).

Предположим, что имеет место условие пластичности [8]

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^2 &= (\sigma_x - \sigma \pm \frac{2}{3} k) (\sigma_y - \sigma \pm \frac{2}{3} k) \\ \tau_{yz}^2 &= (\sigma_y - \sigma \pm \frac{2}{3} k) (\sigma_z - \sigma \pm \frac{2}{3} k) \\ \tau_{zx}^2 &= (\sigma_z - \sigma \pm \frac{2}{3} k) (\sigma_x - \sigma \pm \frac{2}{3} k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad k = \text{const}$$

Зона пластического состояния материала выходит на поверхность полупространства в областях $BCEF$ и $ABCH$ (фиг. 3).

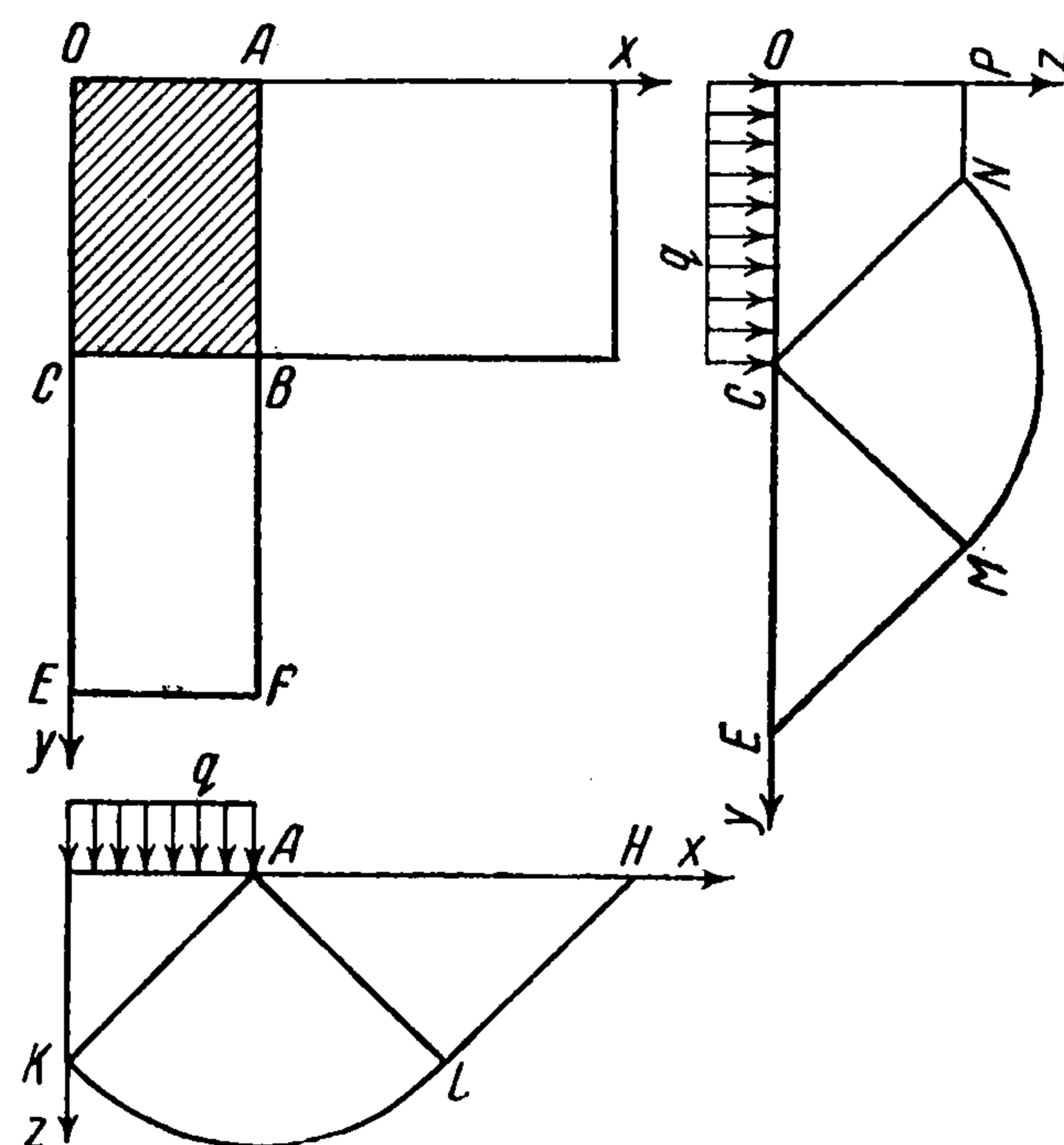
Будем предполагать, что на поверхности $ABCO$ действует равномерно распределенное давление q .

Очевидно, что уравнения равновесия и условие пластичности (4.1) будут удовлетворены при

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = q, \quad \sigma_x = \sigma_y = q + 2k \quad (4.2)$$

Очевидно также, что в зонах пластического состояния материала под областями $BCEF$ и $ABCH$ следует положить

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_y = -2k \quad (4.3)$$



Фиг. 3

Искомое давление q определяется из условия сопряжения пластических зон под областями $ABCO$ и $BCEF$, $ABCH$ (фиг. 3).

Для этого используем области типа, показанных на фиг. 4, которые условно назовем секториальными. Для исследования напряженного и деформированного состояния в этих областях используем цилиндрическую систему координат $\rho \theta \xi$.

Предполагая, что все компоненты напряжения в секториальных областях зависят лишь от угла θ , получим

$$\frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\theta} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} + 2\tau_{\rho\theta} = 0, \quad \frac{d\tau_{\theta\xi}}{d\theta} + \tau_{\rho\xi} = 0 \quad (4.4)$$

Далее полагая $\tau_{\theta\xi} = \tau_{\rho\xi} = 0$, получим

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = k, \quad \sigma_\rho = \sigma_\theta = 2k(c - \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 1/2\pi) \\ \sigma_\xi = 2k(c - \theta) - k, \quad c = \text{const} \end{aligned} \quad (4.5)$$

На площадках, лежащих под углом $1/4\pi$ к оси в зонах, где реализуются состояния (4.2), (4.3), будем иметь

$$\tau_n = k, \quad \sigma_n = q + k, \quad \tau_n = -k, \quad \sigma_n = -k \quad (4.6)$$

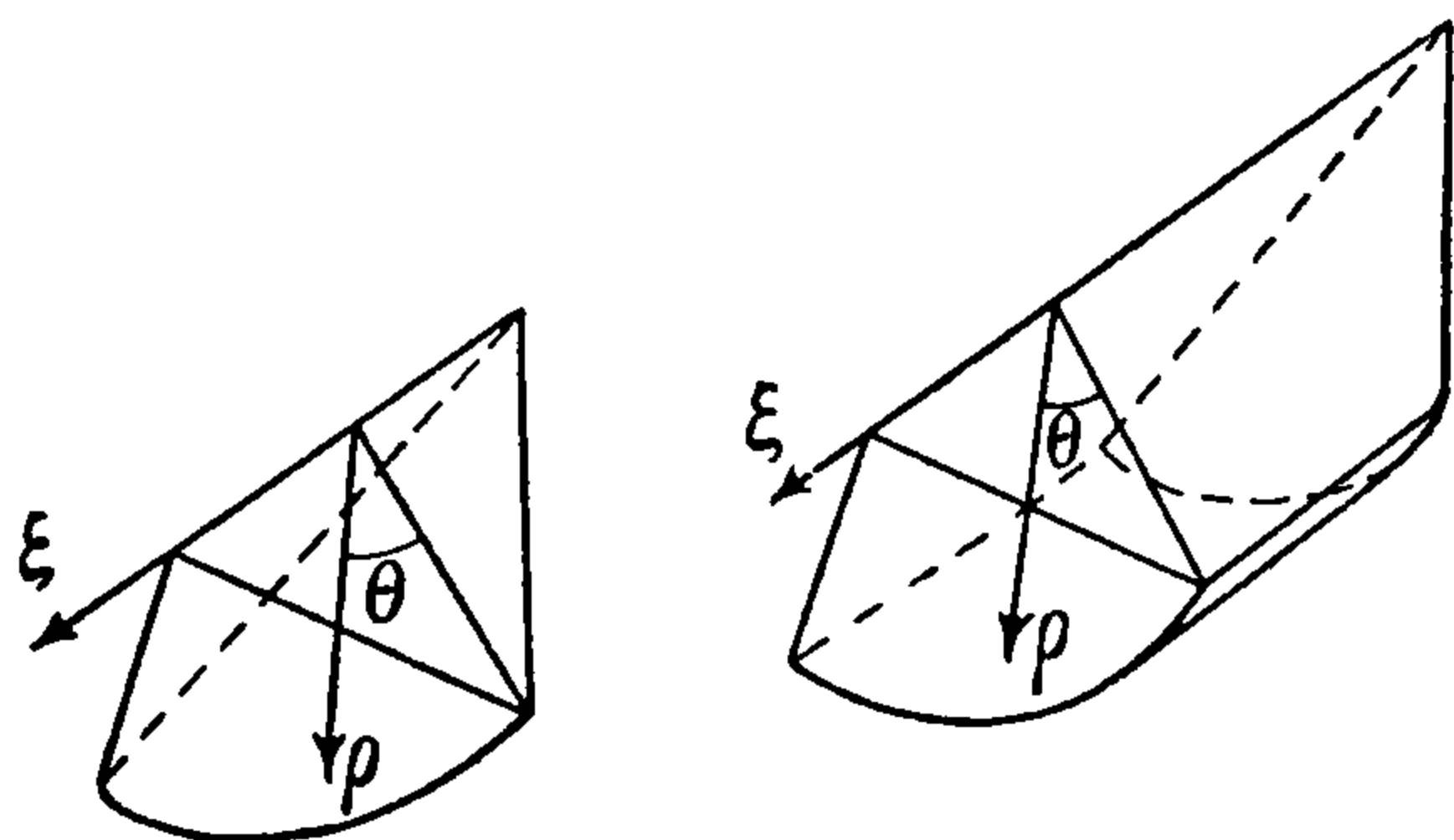
Тогда из условий сопряжения легко получить

$$q = -k(2 + \pi) \quad (4.7)$$

На границах сопряжения пластических зон будут непрерывны все компоненты напряжения за исключением компоненты σ_ξ на AK , CN (фиг. 3). Величина разрыва по модулю равна $2k$. Разрыв компоненты σ_ξ статически допустим.

Отметим, что Р. Шилд и Д. Драккер [11] ранее показали, что величина давления заключена в пределах

$$5k \leq |q| \leq 5.71k$$



Фиг. 4

Обратимся к построению поля скоростей, для определения которого следует использовать соотношения [10]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_{xy} \frac{\sigma_y - \sigma \pm 2/3k}{\tau_{xy}} + \varepsilon_{xz} \frac{\sigma_z - \sigma \pm 2/3k}{\tau_{xz}} = \varepsilon_{xy} \frac{\sigma_x - \sigma \pm 2/3k}{\tau_{xy}} + \\ + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz} \frac{\sigma_z - \sigma \pm 2/3k}{\tau_{yz}} = \varepsilon_{xz} \frac{\sigma_x - \sigma \pm 2/3k}{\tau_{xz}} + \varepsilon_{yz} \frac{\sigma_y - \sigma \pm 2/3k}{\tau_{yz}} + \varepsilon_z \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Следуя Л. Прандтлю, предположим, что зона пластического состояния материала под штампом движется с единичной скоростью вниз.

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = 1$$

В секториальных зонах

$$u_\rho = u_\xi = 0, \quad u_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.9)$$

Очевидно, что соотношения (3.8) будут выполнены для поля скоростей (4.9).

В зонах пластического состояния материала под областями $BCEF$ и $ABGH$ положим

$$u_y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_z = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad u_x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Нетрудно убедиться, что может быть построено решение следуя Р. Хиллу [12], при этом напряженное состояние определяется аналогично тому, как это сделано выше, а построение поля скоростей претерпевает небольшие изменения.

Итак, показано, что формула Л. Прандтля (4.7) справедлива и для штампов прямоугольной формы в плане, вдавливаемых в пластическое полупространство.

Дальнейшим развитием полученных результатов является решение задач о вдавливании штампов многоугольной формы в плане. Однако эти задачи требуют привлечения численных методов расчета, поскольку величина необходимого давления уже не будет постоянной.

Поступила 13 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. P r a n d t l L. Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und Festigkeit im Schneiden. ZAMM, Bd. 1, H. 1, 1921 (русск. пер. в сб. Теория пластичности, ИЛ, М., 1948).
2. P r a n d t l L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. ZAMM, Bd. 3, H. 6, 1923 (русск. пер. в сб. Теория пластичности, ИЛ, М., 1948).
3. H e n c k y H. Über einige statisch bestimmten Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, Bd. 3, H. 4, 1923 (русск. пер. в сб. Теория пластичности, ИЛ, М., 1948).
4. G e i r i n g e r H., P o l l a c z e k. Beitrag zum vollstandendigen ebenen plastizitaesproblem. III. Intern. Congr. Techn. Mech., Stockholm., 1930.
5. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник, новая серия, т. 1 (43), в. 4, 1938.
6. С о к о л о в с к и й В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР, 1946 г.
7. Г а л и н Л. А. Контактная задача теории упругости. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
8. И в л е в Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучей среды. ПММ, т. XXII, в. 1, 1958.
9. Ш и л д Р. О течении металла в условиях осевой симметрии. Механика, ИЛ, № 1, 1957.
10. И в л е в Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. ДАН СССР, т. 124, № 3, 1959.
11. S c h i e l d R. a. D r u k k e r D. The Application of Limit Analyses to Punch-Indentation Problems, J. Appl. Mech., v. 20, 1953.
12. H i l l R. Mathematical Theory of plasticity. Oxford, 1950.
13. И ш л и н с к и й А. Ю. Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бриелля, ПММ, т. VIII, в. 3, 1944.